MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE

S. 804. D. 27.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

TOME QUATORZIÈME

PARIS

IMPRIMERIE IMPÉRIALE

M DCCC LVI

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS LE QUATORZIÈME VOLUME DES SAVANTS ÉTRANGERS.

Pages.

Étude de l'appareil reproducteur dans les cinq classes d'animaux vertébrés, au point de vue anatomique, physiologique et zoologique, par G. J. Martin Saint-Ange 1

Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément, par M. de Saint-Venant 233

Histoire anatomique et physiologique des scorpions, par M. Léon Dufour. 561

Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, d'après des indications tirées d'un manuscrit arabe, par M. F. Woepcke 658

Considérations anatomiques et thérapeutiques sur les fistules vésico-vaginales (autoplastie par glissement), par A. J. Jobert de Lamballe 721

Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique, par M. Edmond Bour 792

FIN DE LA TABLE.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE.

ÉTUDE

DE

L'APPAREIL REPRODUCTEUR

DANS LES CINQ CLASSES D'ANIMAUX VERTÉBRÉS,

AU POINT DE VUE ANATOMIQUE, PHYSIOLOGIQUE ET ZOOLOGIQUE,

PAR G. J. MARTIN SAINT-ANGE,

DOCTEUR EN MÉDECINE,
OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
MEMBRE DE PLUSIEURS ACADÉMIES NATIONALES ET ÉTRANGÈRES.

MÉMOIRE COURONNÉ PAR L'INSTITUT DE FRANCE (ACADÉMIE DES SCIENCES).

INTRODUCTION.

L'Académie des sciences de Paris a proposé en 1845 pour sujet du grand prix des sciences physiques la question suivante :

« Démontrer par une étude nouvelle et approfondie, et

par la description, accompagnée de figures, des organes de la reproduction des deux sexes, dans les cinq classes d'animaux vertébrés, l'analogie des parties qui constituent ces organes, la marche de leur dégradation et les bases que peut y trouver la classification générale des espèces de ce type. »

L'Académie demande que ces recherches soient faites sur un lapin ou un cochon d'Inde pour la classe des mammifères, sur un pigeon ou un gallinacé pour celle des oiseaux, sur un lézard ou une couleuvre pour celle des reptiles, sur une grenouille ou une salamandre pour celle des amphibiens, et enfin sur une espèce de carpe, de loche ou même d'épinoche et de lamproie pour celle des poissons.

Indépendamment de cela, l'Académie demande que les concurrents aient à s'aider des faits acquis à ce sujet, dans l'état actuel de la science de l'organisation, sur des animaux plus rarement à la portée de l'observation, comme les didelphes, les ornithorhynques, les raies et les myxines, sans la considération desquels, en effet, la démonstration resterait nécessairement incomplète.

Toutes ces conditions du programme ont été scrupuleusement remplies dans mon travail. De plus, j'ai représenté, dans l'atlas qui l'accompagne, les espèces rares dont parle l'Académie, afin de donner aux descriptions, de détails surtout, la plus grande démonstration possible.

Ainsi posée, la question du concours est déjà très-vaste par elle-même, puisqu'elle comprend la description anatomique et physiologique des organes de la reproduction dans les deux sexes, et dans les cinq classes d'animaux vertébrés; elle le devient encore plus, si l'on considère que l'étude des organes reproducteurs est inséparable de celle des voies urinaires, et cela, à cause de la fusion souvent

intime des appareils génitaux et urinaires entre eux. Enfin, la question s'agrandit encore quand on songe qu'elle touche aux données embryogéniques. Ne s'agit-il pas en effet de faire connaître la dégradation que subissent les organes de la reproduction chez les animaux vertébrés? et cette dégradation, si l'on prend l'homme pour point de départ, n'exprime-t-elle pas, le plus souvent, chez des êtres placés au-dessous de lui, un des états transitoires de la vie embryonnaire, un arrêt de développement, enfin, qui en est ici l'équivalent? Interprété de cette manière, le programme de l'Académie m'a servi de guide dans mes recherches, qui toutes ont été entreprises à ce triple point de vue de la question.

Quant à mes nouvelles investigations sur l'anatomie et la physiologie des appareils génito-urinaires, elle m'ont permis de rectifier sur plusieurs points des erreurs depuis longtemps accréditées dans la science, d'apprécier à leur juste valeur l'analogie des parties qui constituent les organes, d'assigner à chacun d'eux leur véritable fonction, d'établir un parallèle rigoureux entre les appareils reproducteurs mâle et femelle, de suivre leur dégradation successive, et enfin de fournir quelques données de plus pour la classification des vertébrés.

En outre de cela, des études plus spéciales encore sur les organes urinaires m'ont conduit à préciser les rapports qui existent entre ces organes et les corps de Wolf, à rechercher d'où proviennent les débris des glandes décrites par Rosenmüller, et à établir à quel appareil appartiennent les conduits de Gartner.

Toutes ces questions, d'un grand intérêt, sont de nature à élucider les fonctions si complexes des appareils reproducteurs mâle et femelle des animaux vertébrés, et se trou-

vent résolues par l'appréciation rigoureuse des modifications successives que subissent les organes urinaires; modifications qui vont jusqu'au point d'annihiler presque complétement la substance rénale, en ne laissant plus subsister que le conduit excréteur de l'urine.

Jusque-là il s'agit de la partie essentielle de mon travail; quant à la forme à adopter, voici celle qui m'a paru la plus convenable à lui donner pour plus de clarté dans l'exposition des faits.

J'ai d'abord établi trois divisions principales : la première, concernant l'anatomie et la physiologie des organes génito-urinaires, mâle et femelle, des animaux vertébrés, comprend onze chapitres; chacun d'eux se rapporte à des classes et à des groupes différents; la seconde division, qui comprend trois paragraphes, traite de l'analogie des parties qui constituent les organes génitaux, du parallèle à établir entre les appareils reproducteurs, mâle et femelle, et de la marche de leur dégradation; la troisième, enfin, est relative aux déductions anatomiques, physiologiques et zoologiques que l'on peut tirer de l'étude des appareils génito-urinaires des animaux vertébrés.

A toutes ces descriptions sont joints des dessins représentant la texture des organes génito-urinaires, et surtout le mode de connexion des appareils génital et urinaire entre eux. A part ensuite les détails anatomiques, qui sont représentés plus ou moins grossis, les autres figures sont le plus souvent de grandeur naturelle; le tout fait par moi-même d'après nature. Il m'a semblé utile également d'ajouter aux seize planches qui accompagnent mon ouvrage, dont le nombre était primitivement de trente-deux, un tableau synoptique composé de figures théoriques, et représentant les appareils génito-urinaires, mâle et femelle, dans

les cinq classes d'animaux vertébrés. Toutes ces figures, comprises dans trois zones disposées arbitrairement, montrent, par la diversité des couleurs qui les composent, quels sont les organes formateurs des produits de la génération dans les deux sexes, quels sont les organes chargés de compléter et de transmettre ces produits, et quels sont ceux enfin qui les conduisent simplement jusqu'à leur destination, en même temps qu'ils servent aussi de passage à l'urine et aux autres produits du canal de l'urètre. Ce même tableau fait voir ensuite, d'un seul coup d'œil, la dégradation de chaque organe, les rapports plus ou moins intimes qui existent entre les appareils urinaires et génitaux, et le classement des diverses espèces composant le type des animaux vertébrés.

PREMIÈRE PARTIE.

RECHERCHES ANATOMIQUES ET PHYSIOLOGIQUES SUR LES ORGANES GÉNITO-URINAIRES DES ANIMAUX VERTÉBRÉS.

Dans cette première partie de mon travail, j'expose avec détails, et dans chaque classe de vertébrés, la structure des organes de la génération et celle des organes urinaires qui ont des rapports intimes avec l'appareil reproducteur; j'indique avec soin l'évolution que subissent les produits de la génération mâle et femelle avant et après le fécondation, et je fais connaître de quelle manière s'exécutent les fonctions de l'appareil de la reproduction dans les deux sexes.

§ I.

LAPIN DOMESTIQUE.

La facilité avec laquelle on se procure ce petit mammifère a souvent déterminé les anatomistes et les physiologistes à le choisir, de préférence à tout autre, pour des recherches scientifiques du plus haut intérêt. Les études embryologiques, en effet, et les dissections qui ont fait connaître tant de faits nouveaux, ont été entreprises sur le lapin domestique. De si nombreuses investigations sembleraient indiquer que l'organisation de ce petit animal est parfaitement connue, et pourtant, on peut le dire, l'anatomie et la physiologie de l'appareil reproducteur laissent ici de grandes lacunes à remplir.

On s'est contenté d'énoncer d'une manière générale que les fonctions génératrices du lapin s'exécutent au moyen d'organes comparables à ceux des autres mammifères. Quelques auteurs, toutefois, ont cru pouvoir établir le contraire; mais ni les uns ni

les autres ne se sont appuyés sur des données anatomiques exactes. Aussi s'en faut-il de beaucoup que les faits avancés aient un mérite scientifique incontestable.

Les résultats auxquels je suis arrivé diffèrent donc essentiellement de ceux qui sont consignés dans les traités spéciaux d'anatomie comparée et autres. On en acquiert la preuve à la simple inspection des planches de ce mémoire, où chaque fait important est, en quelque sorte, enregistré. Ce sont ces faits que je vais actuellement développer.

On sait que, chez le lapin, les organes sexuels extérieurs sont situés très-près de l'anus, et qu'ils peuvent servir à faire distinguer le mâle d'avec la femelle. Pourtant il ne faudrait pas s'en tenir à la simple inspection de l'orifice génital, car, d'une part, le méat urinaire se trouvant également fendu dans l'un et l'autre sexe, et, de l'autre, le clitoris ressemblant assez à l'extrémité de la verge rétractée, il pourrait y avoir méprise. Il faut donc, pour s'assurer du sexe, constater la présence des testicules. Ceux-ci, de forme oblongue, enveloppés dans un double repli de la peau, se trouvent placés un peu en avant de l'anus. Entre cet orifice et celui des organes sexuels, s'ouvrent les conduits des glandes cébacées prépuciales et ceux des glandes anales. Voilà ce que l'on peut constater au dehors. Quant aux autres parties constituant l'appareil reproducteur, elles sont situées à l'intérieur, et doivent être étudiées séparément dans les deux sexes.

A. Chez le mâle, quand on a ouvert l'abdomen, on trouve, cachée sous l'intestin grêle, la vessie urinaire, qui est en rapport en arrière avec la vésicule séminale et le rectum [1]. Un peu plus haut, et sur les parties latérales de la colonne vertébrale, on voit les vaisseaux

[1] Sur cette portion de l'intestin, on voit accolés latéralement deux chapelets de vésicules bleuâtres, de forme ovoïde pour la plupart, qui adhèrent entre eux au moyen d'un tissu cellulaire très-lâche. Ces vésicules à parois minces constituent des poches d'hydatides. Le cysticerque est formé d'un corps renflé, d'une extrémité pointue et d'un col. Ce petit être parasite se développe et se fixe sur la partie du rectum qui traverse le bassin, et ce n'est que dans ce point de prédilection qu'on le rencontre toujours.

spermatiques. Les testicules (*d*, *f*, pl. 2) ont une forme ovoïde très-allongée. Le grand diamètre de cet ovoïde a généralement trois centimètres de longueur; sur sa partie latérale interne se trouve accolé l'épididyme, qui y adhère au moyen d'une expansion du dartos. Ce conduit du sperme, replié un grand nombre de fois sur lui-même, déborde sur la glande spermagène dans son plus grand diamètre (pl. 2, fig. 1, *g*, *e*), se pelotonne à chacune de ses extrémités, de manière à la coiffer pour ainsi dire d'un côté, c'est la tête de l'épididyme, tandis que, de l'autre, les replis adossés du conduit séminal constituent la queue de l'épididyme.

Sur le bord interne de la glande spermagène, on remarque une sorte de bandelette légèrement saillante, qui semble faire corps avec la glande elle-même (*d*, fig. 1). Cette bandelette, qui ressemble assez aux divers raffés de l'économie animale, constitue un petit réservoir où le sperme arrive du testicule par divers conduits qui y débouchent séparément. Ces conduits spermagènes, d'origine distincte, enroulés sur eux-mêmes et disposés en faisceaux (pl. 2, fig. 1, *d*), contiennent un grand nombre de vésicules ou capsules spermatiques, la plupart à noyaux, et des vésicules graisseuses. Ce sont ces parties élémentaires du zoosperme que l'on rencontre un peu plus développées déjà dans le réservoir testiculaire dont il est ici question. De ce point du canal déférent partent six à sept petits conduits, qui, après s'être anastomosés entre eux, donnent naissance à l'épididyme.

Cette longue portion du déférent spermatique est très-développée chez le lapin; elle est flexueuse dans une grande étendue de son parcours, mais un peu avant de constituer le canal déférent, elle devient droite. Celui-ci se renfle légèrement d'abord, et s'effile ensuite d'une manière remarquable au point de jonction avec la vésicule séminale, organe distinct des auteurs, que je considère comme étant le dernier terme du déférent spécial de la liqueur spermatique. Le mode de terminaison de chaque déférent dans la vésicule séminale mérite d'être décrit avec soin, car

c'est pour avoir commis une méprise à cet égard que l'on a été conduit à des données zoologiques des plus erronées. Je reviens donc sur ce point important, et je dis que chaque déférent spécial du sperme, après s'être rapproché l'un de l'autre jusqu'au contact (*c*, *c*, fig. 2, pl. 2), traverse la paroi postérieure du collet de la vésicule séminale pour aller déboucher dans cette partie du réservoir spermatique, et non dans l'urètre, comme on l'a cru.

Le réservoir spermatique ou vésicule séminale est simple chez le lapin; il est constitué par un sac membraneux offrant antérieurement une légère échancrure médiane qui rend cette partie bilobée. Le reste de ce réservoir ne rappelle pas au dehors sa duplicité originaire; mais à l'intérieur, on voit qu'une cloison membraneuse incomplète la sépare en deux loges égales, situées une de chaque côté de l'axe du corps. Ces loges, qui correspondent précisément aux deux lobes antérieurs du sac spermatique, représenteraient assez exactement les deux vésicules séminales de la plupart des mammifères, si elles étaient complètes et entièrement distinctes l'une de l'autre. Dans tous les cas, les deux parties similaires qui constituent la poche spermatique du lapin, et qui sont soudées ensemble sur la ligne médiane, témoignent suffisamment d'une conformité de plan organique avec d'autres mammifères. Quoi qu'il en soit de ces réflexions entièrement philosophiques, toujours est-il que la liqueur fécondante qui se trouve dans la vésicule séminale, et qui est conduite dans le canal de l'urètre à l'aide d'un collet très-court et étroit, contient des zoospermes très-développés. Ainsi ces corpuscules vivants, que l'on rencontre sous forme vésiculaire dans les conduits séminifères de la glande spermagène, un peu plus développés dans le réservoir testiculaire, plus formés encore dans l'épididyme, se trouvent enfin à leur état parfait dans la vésicule séminale. Les parois de ce réservoir sont, comme je l'ai déjà dit, membraneuses, et elles semblent douées d'un certain degré de contractilité, bien que, le scalpel à la main, on n'y découvre pas de fibres musculaires.

Cette détermination, eu égard à la structure de la vésicule séminale, est d'autant plus importante à signaler, que quelques anatomistes lui ont attribué, à tort, un système glandulaire qu'elle n'a réellement pas, et qui appartient, comme je le démontrerai tout à l'heure, à la glande prostate elle-même.

Pour éviter l'erreur qui a été commise à ce sujet, et pour se rendre un compte bien exact de tout l'appareil génito-urinaire du lapin, il faut préalablement injecter de couleurs diverses la prostate, les prostates accessoires, les glandes de Cowper et la vésicule séminale. Alors, mais alors seulement, il est possible de pouvoir déterminer d'une manière rigoureuse les rapports, les limites et la structure des organes en question. Ainsi le réservoir spermatique distendu ressemble assez à une seconde vessie, et n'est qu'accolé en partie à la prostate, au moyen d'un tissu cellulaire très-serré. En ce point de jonction, le péritoine abandonne la partie postérieure du sac séminal pour se porter sur la glande prostate, qu'il recouvre ; celle-ci s'isole entièrement de la vésicule séminale et des glandes prostates accessoires. Les six lobes qui la composent sont placés symétriquement, trois de chaque côté de la ligne médiane. La première paire, celle qui est la plus volumineuse (voy. pl. 2, fig. 1 et 4), est facile à séparer, les lobes n'étant qu'adossés l'un à l'autre ; la deuxième paire est disposée de telle sorte, que les prolongements glandulaires se confondent sur la ligne médiane, à la manière des doigts de deux mains qu'on croiserait; enfin, la troisième paire, la plus petite de toutes, est tellement entrelacée, qu'il serait impossible de l'admettre sans le secours de la matière colorante qu'on y a fait pénétrer. Avant de séparer les lobes de la prostate, et alors même que ces lobes ne sont distendus que par le liquide albumineux qu'ils sécrètent, l'aspect général de la glande est vésiculeux; mais quand on la déplisse avec soin, on reconnaît que sa structure a de l'analogie avec le placenta de la brebis (fig. 1'). Relativement au parcours du liquide prostatique, celui-ci est versé directement dans le canal de l'urètre (et non dans la vésicule séminale, comme on l'a dit),

au moyen de six petits conduits distincts qui vont s'ouvrir symétriquement, trois de chaque côté du vérumontanum (pl. 2, fig. 3, *g*).

Les prostates accessoires se trouvent situées sur les parties latérales externes des conduits déférents, et correspondent plus particulièrement au renflement terminal de ces conduits (voy. pl. 2, fig. 2, *j*). On trouve ordinairement trois vésicules de forme oblongue de chaque côté. Les conduits excréteurs de ces vésicules, au nombre de six, s'ouvrent séparément, dans le canal de l'urètre, un peu en arrière du vérumontanum (fig. 3), au-dessus de l'orifice de la vésicule séminale (*p*). Le produit de sécrétion de ces glandes prostates accessoires est, en tout, analogue à celui que l'on rencontre dans les six lobes prostatiques.

Un peu en avant des vésicules dont il vient d'être question, et du côté de l'extrémité de la verge, se trouve une masse granuleuse rougeâtre, résistante, longue d'un centimètre et demi environ et large d'un demi-centimètre. Cette masse constitue les glandes de Cowper : celles-ci se composent de quatre lobes distincts, dont la structure est analogue à celle de la prostate. Les conduits excréteurs de ces glandes, au nombre de quatre, vont s'ouvrir dans le canal de l'urètre, à un centimètre et demi du vérumontanum, deux de chaque côté du raffé urétral interne (voy. fig. 3, *r*). La liqueur sécrétée par les glandes de Cowper ne semble pas différer de celle produite par la prostate et les prostates accessoires.

Les corps caverneux et la dernière portion du canal de l'urètre ne présentent rien de particulier. Ces organes ont la plus grande analogie avec ceux de la verge de l'homme.

Avant de terminer la description des appareils génito-urinaires de ce petit mammifère, je crois devoir signaler un fait qui, bien que peu important en lui-même, ne sera pas sans valeur dans l'appréciation que j'aurai à faire plus loin des rapports et des dispositions générales concernant les organes urinaire et génital. Ma remarque porte ici sur le mode de terminaison des uretères. Les

orifices de ces conduits se trouvent placés dans la vessie à une distance très-grande du col vésical; ils sont situés presque au centre de la vessie, très-près l'un de l'autre, et entourés d'un repli membraneux qui leur sert de valvule.

B. Chez la femelle du lapin domestique, les ovaires, organes essentiels de la reproduction, sont situés dans la profondeur de l'abdomen, un peu au-dessous des glandes rénales, l'un à droite, l'autre à gauche de la colonne vertébrale, d'une manière non symétrique, celui de gauche étant ordinairement un peu plus éloigné du bassin que celui de droite. Leur forme est oblongue; la surface en est lisse, mais inégale et bosselée à des degrés divers. Le volume total de l'ovaire varie suivant l'âge de l'animal, sa fécondité et l'époque du rut. Cette différence dans la conformation et dans le volume de l'organe tient surtout au plus ou moins grand développement des vésicules ou follicules de Graaf, et à celui des corps jaunes. Les glandes ovariennes peuvent, par conséquent, atteindre un volume assez considérable, et présenter dans leur grand diamètre deux centimètres de longueur, et même quelquefois plus, ou bien n'avoir qu'un centimètre et demi de longueur à peine. C'est ce dernier cas qui se trouve représenté à la planche 1 de ce mémoire. Les modifications que je viens de signaler se rattachent à des phénomènes intéressants de l'ovulation, et coïncident avec des données anatomiques toutes spéciales concernant les fonctions si remarquables de l'ovaire. Ainsi, lorsqu'on examine cet organe avec soin chez une femelle de lapin domestique qui n'a point été fécondée depuis quelques mois, on trouve que toute sa surface est parsemée de petites vésicules bleuâtres, peu saillantes et comme enchâssées sur un fond le plus souvent jaune ou brun de nature fibro-granuleuse. Toutes ces vésicules, assez égales en volume, enfouies dans le stroma de l'ovaire (voy. pl. 1, fig. 3), sont recouvertes par une membrane fibreuse analogue à l'albuginée du testicule, et constituent, avec la membrane vasculaire interne, les capsules ou follicules de Graaf. Quand on veut isoler ces corpuscules de l'ovaire, on

éprouve une difficulté insurmontable à les séparer de la membrane d'enveloppe, tant ils y adhèrent fortement. Aussi là se bornent les connaissances positives que l'on peut acquérir sur l'ovaire à l'état de repos fonctionnel. Mais quand on poursuit ces recherches sur des femelles pleines, on voit que le follicule de Graaf grossit rapidement; qu'il s'isole chaque jour davantage du parenchyme ou stroma de l'ovaire, et qu'il s'élève de plus en plus à sa surface. A cette période de l'ovulation, l'albuginée, fortement distendue et amincie par le développement du follicule de Graaf, se confond tellement avec la paroi vasculaire de ce follicule, qu'il est impossible d'admettre sa présence. En même temps que cette sorte de fusion adhésive s'opère d'une manière si intime, la partie la plus saillante de la bosselure ovarienne s'amincit de plus en plus, et finit par se déchirer, en ce point d'élection, pour donner passage à l'œuf que la vésicule de Graaf a constitué. Pendant toute la période de développement des vésicules, on trouve dans la cavité un liquide visqueux, de nature albumineuse, dont la couleur varie entre le jaune clair ou le rouge plus ou moins foncé; à la surface de ce liquide, d'une densité variable, surnage, en quelque sorte, une membrane granuleuse ou celluleuse, qui est un produit de la paroi interne du follicule de Graaf. Au milieu de ces granules se trouve logé l'œuf au centre du disque proligère, disque que ces granules forment autour de lui, en y adhérant assez fortement. D'après cela, le transport de l'œuf du fond de la vésicule où il apparaît, jusqu'à la partie la plus saillante du follicule de Graaf, est effectué à l'aide de la membrane granuleuse, dont une petite portion reste quelquefois accolée à l'œuf au moment de sa déhiscence. Après sa sortie et celle d'une petite quantité de liquide albumineux, la membrane interne du follicule de Graaf, riche en vaisseaux sanguins, subit une métamorphose fort remarquable, dont le principal phénomène consiste dans une sorte d'hypertrophie des vésicules à noyaux qui la composent, hypertrophie qui tend tout d'abord à rétrécir la cavité du follicule de Graaf, et qui

constitue le corps jaune des auteurs ; celui-ci s'atrophie petit à petit, et finit par disparaître entièrement après quelques semaines de durée. Ainsi, la membrane vasculaire interne à double feuillet du follicule de Graaf préside à la formation de l'œuf, à celle de la membrane granuleuse, à la métamorphose des vésicules à noyaux, dont elle se compose, et au mouvement ascensionnel de l'œuf.

Quant à ce produit de l'ovaire qu'on rencontre dans tous les follicules de Graaf qui n'ont pas la couleur jaune, ceux-ci ayant déjà émis leurs produits, on le trouve composé, dans l'origine de sa formation, de deux sphères transparentes non vasculaires, emboîtées l'une dans l'autre, et d'un liquide albumineux qui les remplit. L'enveloppe de la première sphère représente la membrane vitelline, et celle de la seconde la membrane germinative. A mesure que l'œuf, ainsi ébauché se développe, on voit apparaître, dans le liquide albumineux des deux sphères, de petites vésicules simples. Un peu plus tard, ces vésicules contiennent un noyau central qui commence à donner un aspect jaunâtre à tout l'œuf. Lorsque ces granules se développent dans les vésicules de la sphère germinative, on aperçoit, sur un ou plusieurs points de cette sphère, des espèces d'ombres, irrégulièrement découpées, qui constituent la tache ou les taches de Wagner. Quelques anatomistes ont admis une troisième sphère qui serait contenue dans la vésicule germinative, et ont désigné comme telle les taches dont il est question ici ; mais il suffit, pour dissiper cette erreur, de suivre pas à pas la formation de l'œuf. En effet, lorsqu'on observe de quelle manière les deux sphères passent d'une transparence remarquable à l'état d'œuf parfait, on ne saurait se méprendre sur sa véritable constitution. Indépendamment des vésicules à noyaux, le vitellus se compose également de granulations élémentaires et de vésicules graisseuses ou gouttelettes huileuses. Quand la transparence de l'œuf commence à disparaître, on ne voit plus la sphère germinative qu'avec beaucoup de peine, et lorsque le vitellus est entièrement formé, il n'est plus possible

d'apercevoir la vésicule germinative. C'est à ce moment de l'ovulation spontanée que l'œuf se détache de l'ovaire pour aller à sa destination. Le canal oviducte est chargé de ce soin chez les mammifères et la plupart des vertébrés. Il présente de notables variétés, qu'il est important d'étudier avec soin, dans le but surtout de bien établir sa dégradation successive. Le tube oviducte de la lapine comprend : le pavillon, la trompe de Falloppe, l'utérus, le vagin et le canal urétro-sexuel.

Le pavillon, origine libre de l'oviducte, a la forme d'un entonnoir comprimé ; ses parois membraneuses sont très-minces, excessivement vasculaires et à bords frangés. L'un des sommets du pavillon adhère à l'ovaire, aux ligaments larges et au mésentère utéro-ovarien ; l'autre se confond intimement avec les replis du péritoine, qui vont de l'utérus aux trompes. Par suite de ces dispositions anatomiques, le pavillon de la trompe se trouve en rapport avec l'ovaire ; de telle sorte que, lorsqu'il est déplissé, il peut le coiffer entièrement. Un nombre considérable de plis constituent la face interne du pavillon ; ils sont très-inégaux et proviennent de la terminaison de la muqueuse oviducte. Toute la surface de cette membrane plissée est recouverte d'un épithélium vibratile, dont les cils constituent un appareil fort remarquable. Ces corpuscules mobiles se trouvent, quoique moins développés, sur toute la surface muqueuse des trompes. La fonction de ces cils vibratiles semble être uniquement de faire cheminer l'œuf, du pavillon jusqu'à l'utérus, quoique à la vérité la trompe utérine soit douée d'un mouvement péristaltique fort approprié à cet usage. Ainsi la structure fibro-musculaire du pavillon et celle de la trompe utérine, jointes à la présence des cils vibratiles de la muqueuse qui tapisse ces parties, rendent suffisamment compte du parcours que l'œuf effectue.

La portion de l'oviducte que je viens de décrire se continue avec l'utérus. On remarque au point de jonction, et sur le pourtour de l'orifice de communication, des papilles saillantes formées par la muqueuse, qui ont l'apparence d'une petite valvule (voy.

pl. 1, fig. 3, *d*) ; ces parties sont également couvertes de cils vibratiles. Les deux cornes utérines convergent l'une vers l'autre, et se continuent avec le vagin ; en ce point de jonction quelques fibres, et du tissu cellulaire assez dense, les assujettissent entre elles et au vagin. Au fond de ce conduit se trouvent les deux petits mamelons qui répondent au museau de tanche des auteurs (voy. fig. 3, *f, g*) ; l'un d'eux, ouvert, montre les nombreux plis de la muqueuse utérine, qui s'étendent longitudinalement jusqu'à l'entrée de la trompe de Fallope. Toute la surface de cette membrane est garnie d'un petit épithélium vibratile semblable à celui qui recouvre la muqueuse des trompes utérines et du pavillon.

La tunique musculaire de la matrice est mince et très-résistante ; elle se compose de faisceaux serrés les uns contre les autres, et fortement entrelacés. Aussi, les cornes utérines sont-elles extensibles à un très-haut degré pendant la durée de la gestation. La tunique céreuse, enfin, adhère fortement à la couche musculaire, dont elle suit tous les mouvements de retrait ou de dilatation. Le vagin, qui fait partie de l'oviducte spécial, c'est-à-dire du conduit propre à transmettre le produit de la génération, offre une particularité qui frappe tout d'abord l'observateur, c'est l'excessive minceur de ses parois. Ce tube, long de quatre à cinq centimètres, est composé d'une couche musculaire très-mince, d'où dépend principalement la presque transparence des parois. La membrane muqueuse qui tapisse le vagin est très-mince également ; elle présente des plis longitudinaux assez rapprochés les uns des autres. Enfin le tube musculeux dont il est question est entouré par le péritoine, qui lui est intimement adhérent. Le vagin s'ouvre dans le canal de l'urètre, très-près du col vésical (voy. fig. 3, *i, j*) ; son orifice est marqué par un petit bourrelet en rosette résultant de la terminaison des plis muqueux qui le tapissent. Un plexus veineux sous-muqueux, assez étendu, embrasse l'orifice vaginal et le col vésical contenus, l'un et l'autre, par quelques fibres musculaires qui font l'office de sphincter commun. Un autre muscle analogue à celui-ci, et situé un peu plus en arrière, vers l'extrémité uré-

tro-vulvaire, embrasse le canal de l'urètre et le rectum en même temps. Ces sphincters communs agissent, tant chez le mâle que chez la femelle, de manière à augmenter la puissance des constricteurs spéciaux dans les efforts de la défécation, ou lors de l'expulsion des produits génito-urinaires. La portion de l'oviducte qui s'étend du sphincter vaginal à la vulve, donnant également passage aux urines, constitue le canal urétro-sexuel. Ses parois, en se prolongeant jusqu'au dehors, se confondent entièrement avec les replis vulvaires, dans l'épaisseur desquels se trouve caché le clitoris. Les corps caverneux qui font suite sont situés plus en arrière, et se comportent, au volume près, comme chez le mâle.

Enfin la vulve, dernière partie de l'oviducte, est un orifice oblong (pl. 1, fig. 2, *f*), situé près de l'anus, et donnant passage à l'urine et aux produits de la génération. Des glandes cébacées entourent les grandes lèvres, et ces glandes ont la plus grande analogie avec celles que l'on rencontre sur le prépuce de la verge chez le mâle.

En résumé :

Les organes sexuels externes, examinés avec soin chez le lapin, peuvent servir à faire reconnaître les sexes.

La glande spermagène ou testicule se compose de tubes séminifères enroulés sur eux-mêmes, et disposés en faisceaux distincts qui vont tous aboutir dans un réservoir commun, analogue au corps d'Hygmore, situé sur le côté interne de la glande spermagène, et ayant la forme d'une bandelette.

L'épididyme naît du réservoir d'Hygmore et de six à sept tubes d'origine.

Le conduit déférent fait suite à l'épididyme, et débouche dans la vésicule séminale.

Ce réservoir membraneux, unique chez le lapin, est légèrement bilobé et cloisonné sur la ligne médiane, ce qui rappelle sa dualité originaire.

Le petit collet de la vésicule séminale s'ouvre directement dans

le canal de l'urètre, au sommet de la crête urétrale, par un orifice en forme de V renversé.

La prostate se compose de six lobes ; elle est fortement adhérente à la vésicule séminale ; sa structure est assez analogue aux villosités du chorion de la brebis.

Les conduits prostatiques, au nombre de six, s'ouvrent dans le canal de l'urètre, trois de chaque côté du vérumontanum.

Les prostates accessoires, au nombre de six, sont placées trois de chaque côté de la prostate ; elles débouchent également dans le canal de l'urètre par six orifices situés un peu au-dessus de la crête urétrale.

La glande de Cowper se compose de quatre masses distinctes, dont la structure est analogue à celle de la prostate, et de quatre tubes excréteurs qui débouchent dans la partie moyenne du canal de l'urètre.

Les corps caverneux constituent le dernier terme du conduit urétro-sexuel, et ont la plus grande analogie avec ceux de l'homme.

Les ovaires de la lapine contiennent, dans le stroma qui les compose, un grand nombre d'ovules entourés d'un tissu très-vasculaire.

La loge vasculaire de chaque ovule constitue la vésicule de Graaf.

Celle-ci se compose de deux couches membraneuses vasculaires et d'une couche granuleuse, dans laquelle se trouve logé l'œuf au centre du disque proligère.

Le follicule de Graaf, en se développant rapidement, sécrète une assez grande quantité de liquide albumineux qui soulève la membrane granuleuse, et facilite ainsi la déhiscence de l'ovule.

Après cette émission, le follicule de Graaf donne lieu, par l'hypertrophie de sa double membrane vasculaire, à la formation du corps jaune.

L'atrophie du follicule de Graaf entraîne la disparition du corps jaune, qui est résorbé.

L'œuf qu'émet le follicule de Graaf se compose d'une sphère vitelline et d'une sphère germinative ; toutes deux remplies, dans l'origine, d'un liquide albumineux dans lequel, plus tard, apparaissent des vésicules et tous les éléments constituant le vitellus.

L'œuf, après sa déhiscence, passe dans l'oviducte, où il est fécondé ; s'arrête dans son parcours, subit dans l'utérus l'incubation qui lui est nécessaire ; après quoi il est transmis au dehors à l'aide d'une dernière portion de l'oviducte spécial, et du canal urétro-sexuel, qui est un oviducte mixte.

§ II.

DIDELPHE CRABIER.

Ce remarquable mammifère fait partie du groupe des marsupiaux, si intéressant à étudier, au point de vue surtout du mode de génération des espèces qu'on y observe. Quelques auteurs ayant mal déterminé les organes reproducteurs des mammifères à bourse, en ont déduit des conséquences physiologiques erronées, sur lesquelles je ne m'arrêterai pas ici. Les recherches de Barton et d'Aboville, de Tyron et de Daubenton, ont jeté plus de jour sur l'anatomie des didelphiens. Mais c'est surtout aux savantes investigations de Geoffroy-Saint-Hilaire, Morgan, Collie et Owen en particulier, que la science est redevable d'utiles travaux sur l'anatomie et la physiologie des organes génito-urinaires des marsupiaux. Toutes ces recherches ont aplani un grand nombre de difficultés, et facilitent l'étude que j'ai à poursuivre en ce moment dans le but de résoudre la question posée par l'Académie.

Comme dans le paragraphe précédent, j'examinerai l'appareil reproducteur des didelphes au point de vue anatomique et physiologique, d'abord chez le crabier mâle, puis chez la femelle.

A. Chez le mâle, les testicules, placés dans le scrotum, sont situés en avant de la verge, ce qui est l'inverse chez la plupart des autres mammifères (voy. pl. 3, fig. 1). A une petite dis-

tance de l'anus, on aperçoit l'orifice sexuel, au centre d'un bourrelet tégumentaire peu saillant et dépourvu de poils ; au fond de cette ouverture se trouve une verge bifide (*a*), entourée d'un prépuce qui se continue avec le bourrelet dont il vient d'être question. Sur le rebord de l'anus, il existe deux pertuis (*b*, *b*) conduisant chacun, à l'aide d'un petit canal, à une poche membraneuse distincte (*c*, *c*). Ces poches, du volume d'une noisette et remplies d'une matière cébacée très-odorante, constituent les glandes anales du crabier. Les deux conduits excréteurs de ces glandes, l'orifice génital et l'ouverture de l'anus sont compris dans un sphincter commun (*d*), qui les tient sous sa dépendance et qui en règle les diverses fonctions.

La glande spermagène, dégagée des enveloppes cutanées, est légèrement piriforme (*m*, fig. 2); elle se compose d'une infinité de tubes (*P*, fig. 2) anastomosés entre eux en plusieurs points, et contenus dans une enveloppe commune albuginée. Du sommet du testicule s'élève une sorte de collet assez court où aboutissent tous les tubes spermagènes. Le point vers lequel convergent tous les conduits sécréteurs de la glande constitue le corps d'Hygmore. C'est de là que naît l'épididyme, non pas de plusieurs tubes distincts, comme cela s'observe le plus ordinairement chez les mammifères, mais bien du collet lui-même. La partie du conduit déférent qui fait suite à l'épididyme se dégage brusquement de celui-ci (*n*, *o*, fig. 2), parcourt un trajet d'environ quatre centimètres sans se replier sur lui-même une seule fois, et sans changer de calibre d'une manière notable jusqu'à sa terminaison. Lorsqu'il est arrivé au col vésical, il traverse la paroi du canal de l'urètre, et va s'ouvrir directement dans ce canal à l'aide d'une papille sexuelle analogue à celle des oiseaux. Cette papille, très-rapprochée de sa congénère, se dirige en avant; l'une et l'autre doivent, en conséquence, au moment de l'éjaculation, lancer le sperme du côté du méat urinaire. Cette faculté de diriger la liqueur spermatique dans un sens déterminé constitue une des fonctions attribuées à la crête urétrale des mammifères, crête qui manque

d'une manière absolue chez le crabier. Ainsi le produit de sécrétion de la glande spermagène est porté directement dans le canal de l'urètre, sans être préalablement déposé dans un réservoir quelconque, dans une vésicule séminale unique ou multiple, et sans rencontrer de crête urétrale proprement dite. Or ces faits établissent déjà, tant au point de vue anatomique qu'au point de vue physiologique, une particularité fort remarquable, sur laquelle je reviendrai plus tard dans une autre partie de ce mémoire. Mais ce n'est pas tout : il manque à l'appareil reproducteur du crabier la glande prostate. Il n'existe, en effet, aucun vestige de cet organe dans la région urétrale qui avoisine le col de la vessie, place qui lui est assignée ordinairement. En revanche, on trouve bien plus en avant du canal urétro-sexuel, vers son tiers inférieur, un amas de petites poches placées sur le canal urétral; ces poches (*e, e,* fig. 1 et 2) ressemblent assez aux glandes prostates accessoires du lapin, quant à la conformation et à la structure; mais elles n'occupent pas, à beaucoup près, la même place ; c'est tout au plus si elles correspondent à la région de l'urètre où se rencontrent, en général, les glandes de Cowper. Quoi qu'il en soit de ces rapports et de cette structure, huit poches vésiculaires débouchent, par autant d'orifices, dans le canal urétro-sexuel, en formant deux petits groupes d'orifices bien distincts et symétriquement placés sur les côtés de la ligne médiane. Ce petit appareil est bien l'analogue des glandes de Cowper, et le liquide, sans doute albuminoïde, qu'il renferme, abondant si l'on en juge par le volume des glandes, doit servir à diluer, à leur passage, les spermatozoïdes qui ont déjà parcouru les deux tiers du canal de l'urètre sans rencontrer de fluide prostatique. Au moment de l'éjaculation, la liqueur séminale doit nécessairement se porter dans les deux verges du didelphe crabier, et se diriger à droite et à gauche en divergeant d'une manière très-notable. En effet, les organes copulateurs (fig. 3), composés des parois mêmes du canal de l'urètre divisé, qui s'épaississent de plus en plus à mesure qu'elles vont constituer une

espèce de demi-gland, ne sauraient avoir d'autres fonctions. En rapprochant ces deux demi-verges l'une de l'autre, et en les affrontant bien exactement, on rétablit le canal de l'urètre d'une manière complète jusqu'à sa terminaison. Le bulbe de ce conduit manque entièrement ici, quoiqu'il y ait un tissu fibreux très-vasculaire, et la verge bifide du crabier ne mérite véritablement ce nom que par la fonction qu'elle remplit. On verra bientôt quelle est l'importance d'une double verge chez les didelphiens, cette appréciation ne pouvant se faire d'une manière rigoureuse qu'après la description de l'appareil reproducteur femelle.

Pour terminer tout ce qui est relatif aux organes génito-urinaires mâles du crabier, je signalerai la disposition des orifices des uretères. Ils sont placés en arrière des papilles génitales sur le col vésical, au sommet également, de deux petits mamelons à tissu érectile, qui sont dirigés du côté de la vessie (voy. pl. 3, fig. 2); à la base de ces mamelons commencent les nombreux plis de la membrane muqueuse de la vessie, qui n'ont aucune importance.

B. Chez la femelle du crabier, les organes sexuels externes sont cachés par le sphincter anal au fond d'une ouverture commune (*a*, pl. 4, fig. 1), qui a très-peu de profondeur. Sur le pourtour de l'anus on trouve, comme chez le mâle, l'orifice des conduits excréteurs des glandes anales (*b*), avec cette différence qu'il y en a deux à gauche et un seul à droite; ils correspondent, d'un côté comme de l'autre, à deux loges distinctes de la glande (*c*, *c*). En relevant le bord antérieur de l'anus, on aperçoit immédiatement au-dessous une ouverture circulaire froncée et disposée en rosette, au centre de laquelle se trouve le clitoris bifide. Cet organe, qui, à la dimension près, ressemble à la verge du mâle, s'implante sur les parois du conduit urétro-sexuel (*d*, fig. 2), et est contenu par un sphincter propre (*e*, fig. 3). Ce sont là les particularités que présentent les organes sexuels qui sont accessibles à l'œil sans le secours du scalpel. Quant aux autres parties de l'appareil reproducteur, on ne peut les étudier qu'après

avoir préalablement ouvert l'abdomen de l'animal. Voici alors ce que l'on aperçoit sous le paquet intestinal.

Sur la ligne médiane existe un conduit membraneux du volume d'une grosse plume d'oie, placé sur le rectum, et se continuant d'une manière évidente avec la vessie d'une part, et de l'autre, jusqu'à l'orifice sexuel déjà décrit. Ce conduit (fig. 1 à 3) est le canal urétro-sexuel, fort remarquable, comme on le verra bientôt, par sa disposition et sa structure. Sur son extrémité sexuelle s'insèrent deux muscles rétracteurs (*f, f,* fig. 1), qui doivent ramener en dedans du sphincter anal le clitoris et l'orifice urétro-sexuel. A droite et à gauche de la vessie se trouvent deux espèces de boyaux (*h, h*), recourbés sur eux-mêmes en forme d'anses, et enveloppés, pour ainsi dire, dans un grand repli péritonéal (*g, g*). La partie supérieure de chaque boyau sexuel conduit à une cavité centrale (*j,* fig. 3); l'inférieure s'ouvre dans le conduit urétro-sexuel (*f*). Entre la vessie et les deux anses en question, on aperçoit, de chaque côté, un corps olivaire (*m,* fig. 2), qui se termine par un petit tube, recourbé plusieurs fois sur lui-même ; celui-ci va, en s'amincissant, se perdre dans un repli péritonéal (*i, i,* fig. 3), au fond duquel se trouve l'ovaire. Toutes les parties que je viens d'indiquer constituent l'appareil urétro-sexuel, et ont besoin d'être déterminées par une étude plus approfondie et des descriptions anatomiques plus détaillées. C'est là ce que je vais essayer de faire en adoptant le même ordre que j'ai suivi pour les organes génito-urinaires de la lapine.

Lorsqu'on renverse la vessie en avant, on trouve de chaque côté, dans un repli du ligament large, au fond d'un capuchon membraneux qui semble en dépendre, un petit corps presque sphérique de la grosseur d'un petit pois : c'est l'ovaire ; il était complétement lisse et sans la moindre bosselure sur la pièce qui a servi à ma préparation et que j'ai reproduite pl. 4, fig. 1 et 3. Cet organe est fixé au fond du capuchon en question, qui, en définitive, n'est autre que le pavillon de la trompe, à l'aide des vaisseaux ovariens. Une membrane fine, analogue à l'albuginée,

constitue l'enveloppe propre de l'ovaire. Le stroma de cette glande, assez résistant, contient un grand nombre de granules plus ou moins opaques, lesquels représentent autant de cellules ovariennes, hérissées à leur surface des débris de vaisseaux très-ténus qui leur sont fortement adhérents (voy. fig. 4). Lorsqu'on parvient à ouvrir une de ces petites cellules ou vésicules de Graaf conservées dans l'esprit de vin, on en voit sortir un ovule et des granulations très-fines (fig. 5), dont il est difficile de déterminer la nature et la composition. En déplissant avec soin le pavillon de la trompe, on découvre dans le fond un très-petit orifice qui conduit dans la trompe de Falloppe ; celle-ci, excessivement effilée à son origine, augmente de volume à mesure qu'elle approche de la corne utérine; dans son parcours, elle décrit des zigzags très-irréguliers, à angles arrondis, qui lui donnent une remarquable configuration. Chaque trompe (*m, m*) conduit dans une cavité oblongue (*n, n*), dont les parois, épaisses et musculaires, sont revêtues en dedans d'une membrane muqueuse offrant des plis longitudinaux nombreux et un aspect villeux et vasculaire. La cavité dont il s'agit n'est pas garnie de valvule du côté qui correspond à la trompe; mais, de l'autre, elle se termine dans une poche commune ou renflement médian (*o, o*, fig. 3), en formant une saillie ou col à bords frangés et plissés, qui est manifestement destiné à se fermer ou à s'ouvrir comme une bourse à lacet. La cavité médiane, où débouchent les deux trompes utérines, est légèrement cloisonnée par une petite saillie, sorte de raffé longitudinal placé sur l'axe du corps ; les parois de cette poche commune sont musculaires et tapissées à l'intérieur d'une membrane muqueuse assez lisse, garnie de villosités à peine sensibles. Vers le centre de cette cavité débouchent, à droite et à gauche, deux conduits dont la disposition rappelle entièrement cette espèce de col frangé et plissé qui existe à l'embouchure des trompes; ils conduisent dans les deux boyaux sexuels placés sur les côtés de l'axe médian. Ceux-ci, légèrement renflés vers leur grande courbure, ont des parois peu épaisses, composées d'une tunique moyenne de nature muscu-

laire, sous-péritonéale, comme celles des autres parties que je viens de décrire, d'une tunique interne offrant de nombreux plis longitudinaux et de petites papilles à sa surface. Les plis de cette partie de l'appareil génital s'effacent à l'endroit où commence le canal urétro-sexuel, et, en ce lieu de communication, on ne remarque aucune valvule; au point de jonction avec le canal de l'urètre, les parois des conduits sexuels et urinaires se fusionnent pour constituer le canal urétro-sexuel. Malgré cela, cependant, on peut suivre les fibres musculaires, qui émanent du col vésical, jusqu'à la racine du clitoris bifide (fig. 2 et 3). C'est surtout deux centimètres en avant du col de la vessie que les faisceaux de muscles sont fortement apparents; en ce point, en effet, les fibres se réunissent en deux gros piliers, laissant entre eux une solution de continuité remarquable par sa disposition en forme de fourche. Tout ce qui est en deçà de ce point dans les parois des conduits urétro-sexuels, et tout ce qui est au delà, constitue le canal de l'urètre destiné au passage de l'urine seulement. En d'autres termes, le canal urétro-sexuel du crabier femelle est bien plutôt le résultat de l'affrontement des deux oviductes que celui-ci ne sont l'accessoire du conduit urinaire.

La vessie à parois épaisses, garnie d'une membrane muqueuse très-plissée, a un col très-allongé, dans lequel viennent s'ouvrir les conduits des uretères (*r, r*).

D'après la description anatomique que je viens de donner, et d'après les faits déjà établis concernant les organes sexuels mâles, on peut se rendre un compte assez exact de la fonctionnalité des appareils copulateurs et gestateurs du didelphe crabier. En effet, et pour ce qui concerne d'abord l'acte de copulation, on conçoit très-bien la nécessité d'une verge bifide propre à lancer le fluide séminal dans la direction des deux conduits sexuels. Et quand la fécondation s'est effectuée, l'œuf, qui s'est détaché de l'ovaire, passe de la trompe utérine dans une première cavité de l'oviducte, où son incubation peut s'opérer en grande partie, si ce n'est même totalement, puis dans le réservoir commun, qui peut également

servir à le loger quelque temps, et enfin de là dans la dernière portion de l'oviducte spécial, qui semble plutôt destinée à émettre le produit de la génération qu'à le retenir à son passage. Toutefois, pour être dans le vrai à l'égard de l'évolution embryonnaire et du stationnement que l'œuf peut faire en parcourant l'oviducte, il faudrait pouvoir suivre les diverses phases de la gestation chez le crabier, ce qui n'a pas encore été fait jusqu'à ce jour. Suivant Home, les deux dernières portions de l'oviducte spécial, celles qui sont disposées en anse, se fermeraient après la conception, et il s'établirait une ouverture au sommet du cul-de-sac de la cavité moyenne. Cette ouverture grandirait à mesure que la gestation avance et donnerait passage aux fœtus, qui iraient achever leur formation dans la poche cutanée située au-devant de l'abdomen. Mais cette hypothèse, entièrement gratuite, de Home ne saurait s'expliquer qu'en admettant une seconde perforation vis-à-vis de la première, laquelle s'effectuerait sur la portion du canal de l'urètre qui avoisine la vessie, sans quoi le produit de la conception passerait dans la cavité péritonéale et ne saurait en sortir. Or, en présence de ces faits, il répugne d'admettre une double perforation si contraire à la loi commune, surtout quand on a des données anatomiques exactes sur l'appareil reproducteur du didelphe crabier. Il faut donc croire que c'est par erreur que Home a donné une si étrange description du mode de parturition des didelphiens.

Un autre auteur, Reugger, dit avoir trouvé un fœtus développé, sorti de ses enveloppes, dans l'anse vaginale gauche d'une femelle de didelphes azora, qui avait deux fœtus extrêmement petits dans sa poche extérieure, et deux embryons dans la partie dilatée du conduit vaginal droit, avec leur cordon ombilical.

Ces faits, comme on le voit, sont en opposition avec ceux émis par Home, et semblent plus admissibles. Toutefois, on peut se demander ce que l'auteur entend par cordon ombilical. A-t-il voulu désigner par là un *placenta* adhérent aux parois de l'oviducte, ou bien une allantoïde libre? Il y a bien dans les deux cas un cordon

ombilical plus ou moins développé; mais tandis que les uns caractérisent certaines classes d'animaux vertébrés, les autres se rapportent à des classes différentes. Ainsi le cordon ombilical qui se termine par un placenta adhérent se rencontre chez les animaux dits *placentaires;* celui, au contraire, dont l'épanouissement se fait sous une enveloppe isolante, ne s'observe que chez les animaux *aplacentaires*. La classe des mammifères est presque exclusivement pourvue d'un placenta; celles des oiseaux, des reptiles et des poissons en manquent, quoique l'allantoïde existe le plus souvent. On conçoit d'après cela combien il était important de décrire avec soin la disposition et les rapports du cordon ombilical des didelphes, puisque déjà, par son mode de terminaison, on peut jusqu'à un certain point classer un vertébré. A cet égard, il était réservé à M. Owen de faire connaître les particularités les plus remarquables concernant la gestation des didelphiens et d'en déduire des conséquences rigoureuses. Il résulte des travaux scientifiques de ce savant professeur que l'allantoïde chez les animaux à bourses dont il s'agit ne se trouve pas en contact immédiat avec l'oviducte; que cette poche vasculaire n'a pas un développement aussi grand que chez les mammifères en général; que la circulation vitelline, au contraire, est bien plus étendue que chez les mammifères, et que c'est plutôt elle qui tend ici à se mettre en rapport médiat avec l'oviducte que la circulation allantoïdienne. D'après cela le crabier se trouve placé dans la catégorie des vertébrés aplacentaires. Dès lors on explique la présence d'un même œuf dans les différents points de l'oviducte incubateur, ainsi que le mode définitif du développement du fœtus dans la bourse marsupiale.

En résumé :

La présence des testicules situés exceptionnellement en avant de l'orifice urétro-sexuel indique le sexe chez les crabiers.

La verge bifide de ces animaux n'a point de corps caverneux proprement dits; c'est le tissu vasculaire des parois urétrales, devenu érectile, qui préside à la turgescence de l'organe copulateur.

La glande spermagène se compose de tubes séminifères très-fins, enroulés sur eux-mêmes et anastomosés entre eux plusieurs fois.

Sur l'extrémité ovulaire de la glande se trouve un petit réservoir ou corps d'Hygmore, dans lequel aboutissent les tubes spermagènes et d'où s'élève un petit collet qui, à lui seul, constitue l'origine de l'épididyme.

Chaque conduit déférent se dégage brusquement de l'épididyme et va s'ouvrir directement dans le canal de l'urètre au sommet d'une papille, sans changer de calibre dans tout son trajet.

La vésicule séminale et la crête urétrale manquent entièrement chez le crabier.

Il n'y a pas non plus de prostrate ni de prostates accessoires.

Les glandes de Cowper sont en revanche très-développées. Elles se composent de huit petites poches à parois glandulaires qui versent leur produit dans le canal de l'urètre.

La verge bifide termine le conduit urétro-sexuel et se compose de tissus érectiles et fibreux.

Les uretères débouchent dans la vessie ou plutôt à l'origine du canal de l'urètre au sommet de papilles assez analogues à celles des conduits déférents et placées un peu en arrière.

Chez la femelle du crabier, l'orifice sexuel n'est pas distinct comme chez le mâle; il se trouve compris dans le sphincter anal.

Le clitoris, bifide comme la verge du crabier mâle, se montre à l'entrée du conduit sexuel.

Les ovaires sont très-petits et fixés au fond du pavillon de la trompe, de manière à y demeurer constamment en rapport.

Le stroma de l'ovaire est parsemé de granules; ce sont là les vésicules de Graaf, dont la structure semble être analogue à celle des mammifères.

Chaque vésicule contient un œuf et des granulations qui proviennent sans doute de la membrane granulée.

Chaque trompe utérine se continue jusqu'à un premier renflement de l'oviducte, qui a de l'analogie avec la matrice d'un grand nombre de mammifères.

Les deux cornes utérines convergent vers un même point, où se trouve un second renflement de l'oviducte, qui constitue une loge commune aux deux matrices.

De ce point partent deux conduits ou boyaux sexuels qui aboutissent dans le tiers supérieur du canal de l'urètre, et qui constituent le dernier terme de l'oviducte spécial.

Le conduit urétro-sexuel qui leur fait suite se termine par un tissu érectile d'où provient le clitoris bifide.

Tous les renflements que présente l'oviducte sont autant de points où l'œuf fécondé stationne plus ou moins longtemps.

On a rencontré dans l'oviducte des fœtus qui étaient développés à divers degrés et ayant un cordon ombilical dont l'épanouissement n'était pas greffé sur l'oviducte.

L'allantoïde est moins développée proportionnellement que la vésicule ombilicale, et ce sont les vaisseaux de celle-ci qui semblent se trouver à la périphérie de l'œuf.

L'absence d'un placenta adhérent à l'oviducte incubateur coïncidant avec le peu de développement de l'allantoïde explique jusqu'à un certain point le passage rapide de l'œuf dans l'oviducte et l'achèvement de l'évolution fœtale dans la poche sexuelle externe qui enveloppe les mamelles.

§ III.

ORNITHORHYNQUE ET ÉCHIDNÉ.

Ces groupes de mammifères, que le célèbre Geoffroy-Saint-Hilaire a si bien désignés sous le nom de *monotrèmes,* a été l'objet de recherches nombreuses et de vives controverses. C'est surtout au point de vue des organes de la reproduction de l'ornithorhynque que les savants les plus distingués de notre époque, Cuvier, Geoffroy-Saint-Hilaire, Meckel, de Blainville, Rudolphi, Duvernoy, Owen, etc., ont émis des opinions qui tour à tour ont été rejetées ou admises.

La lutte scientifique engagée entre Richard, Owen, Meckel et

Geoffroy-Saint-Hilaire, a principalement fixé l'attention du monde scientifique et stimulé le zèle des naturalistes de l'Australie, qui par leur concours ont puissamment contribué à la solution du débat. Malgré tous ces efforts, et bien que la science possède actuellement de nombreux travaux sur les mœurs et l'organisation des monotrèmes, on manque encore de données exactes sur l'évolution embryonnaire de ces animaux. La divergence d'opinions qui existe toujours entre les zootomistes à l'égard de l'oviparité ou de la viviparité de ces êtres si singuliers en est la preuve. Quoi qu'il en soit, et au point de vue même de la question posée par l'Académie, l'étude approfondie des organes de la reproduction sera, nonobstant ses lacunes sur l'ovologie, d'autant plus nécessaire pour ce travail, qu'elle fait connaître la dégradation que subissent les appareils génito-urinaires dans les groupes mêmes des mammifères.

Les organes sexuels des monotrèmes sont entièrement cachés, en sorte qu'il est impossible de distinguer le mâle d'avec la femelle à l'aide des caractères anatomiques dont il est question. L'ouverture anale, qui est commune aux voies génitale, urinaire et rectale, d'où vient le nom de monotrème, ne présente pas la moindre différence dans les deux sexes. Cette similitude (voy. pl. 5, 6 et 7) des voies monotrémiques s'étend de proche en proche à tout l'appareil reproducteur; ainsi on rencontre très-près du sphincter anal externe un orifice assez large (*b, f, r*) qui conduit dans le fourreau sexuel (*f, f*). Celui du mâle contient la verge, celui de la femelle, le clitoris. Ces deux organes ne diffèrent l'un de l'autre, en apparence, que par le volume. Plus avant dans le cloaque (*d*), on trouve le méat urinaire (*c*). Il est situé chez le mâle comme chez la femelle à égale distance de l'anus; il a la même dimension dans les deux sexes et s'ouvre sur le même point du cloaque. Le canal de l'urètre (*g*), la vessie (*h*), le fourreau sexuel (*f*), les testicules (*j*), les ovaires (*j*, pl. 6), les spermiductes (*k*, pl. 5), et les oviductes (*k*, pl. 6), paraissent au premier abord tellement semblables, que l'on croirait avoir sous les yeux deux individus du même sexe. Il n'est pas jusqu'aux ligaments péritonéaux (*l*, pl. 5

et 6), qui contiennent d'une part les glandes spermagènes avec les déférents, et de l'autre les glandes ovigènes et les oviductes, qui ne présentent la plus grande ressemblance entre eux. Ce que je dis des ovaires semblera d'autant plus étrange, que quelques auteurs ont cru pouvoir trancher la difficulté de l'oviparité ou de la viviparité de l'ornithorhynque, précisément d'après le caractère anatomique de l'ovaire, qui ressemblerait à celui des oiseaux. Sans vouloir ici réfuter ce qui a été dit de la structure en grappe de l'ovaire de l'ornithorhynque, je puis affirmer que le sujet qui a servi à mes dissections, et que j'ai reproduit avec toute l'exactitude possible dans mes planches, avait les glandes ovigènes analogues à celles des mammifères. Au surplus, cette différence peut tenir au degré de développement de l'ovaire, et surtout à l'âge de l'animal. Enfin, l'ouverture du pavillon de la trompe, qu'il faut chercher avec beaucoup de soin, et la disposition en zigzag du canal déférent, sont les seuls signes évidents qui différencient les sexes.

A. Chez le mâle, les testicules (*j*, fig. 2, pl. 5) se composent de tubes séminifères très-fins (fig. 7), enroulés sur eux-mêmes et anastomosés entre eux plusieurs fois. Ils aboutissent tous à un petit renflement qui est situé au sommet de la glande spermagène, et qui est assez analogue au corps d'Hygmore. De ce point naît l'épididyme (*k*), formé par un ou deux petits tubes qui s'anastomosent bientôt entre eux. Cette partie du déférent spermatique ne se replie pas sur elle-même un grand nombre de fois pour constituer la tête et la queue de l'épididyme; de simples contours, entièrement semblables à ceux que décrit la dernière portion du déférent chez l'homme, le constituent chez l'ornithorhynque et chez l'échidné. Cette même disposition des spermiductes existe jusqu'à la fin du conduit; seulement, un peu avant de s'ouvrir dans le canal de l'urètre, il s'amincit et cesse de se couder sur lui-même. L'orifice terminal du déférent se trouve au sommet d'une petite papille sexuelle située de chaque côté de la ligne médiane sur la portion du col vésical où débouchent les conduits urinaires. Ceux-ci se voient également au sommet de deux papilles

urétrales placées un peu en avant des précédentes et plutôt dirigées du côté du canal de l'urètre que de celui de la vessie. Chez l'échidné, où le col vésical est très-marqué, les papilles urétrales et sexuelles se trouvent plus évidemment encore en deçà du col (voy. pl. 7); en sorte que la vessie ne semble plus faire partie de l'appareil urinaire, bien qu'en définitive elle en soit toujours le diverticulum ou la partie terminale. Le canal de l'urètre, long d'environ deux centimètres et demi, du volume d'une grosse plume d'oie, offre une particularité fort remarquable. Un peu avant sa terminaison dans le cloaque, on y aperçoit une large ouverture infondibuliforme, qui aboutit à l'extrémité de la verge. Ce conduit reçoit à son origine les orifices des tubes excréteurs des glandes de Cowper (*e*, fig. 12), après quoi il traverse le tissu érectile de la verge. Arrivé au point de jonction des deux glandes, il se bifurque, et chaque branche fournit quatre conduits qui vont s'ouvrir au sommet des huit papilles épineuses ou cornées qu'on remarque sur les deux glands (voy. fig. 5 et 6). Chez l'échidné le canal séminal (*m*, fig. 3, pl. 7) se bifurque d'abord en deux troncs, puis chacun d'eux se divise en deux autres branches qui, à leur, tour fournissent chacune quatre rameaux. Ces derniers s'ouvrent à la surface mamelonnée des quatre glands qui composent la verge de l'échidné à la base des papilles très-courtes qu'on y remarque (voy. fig. 5 et 6).

Enfin, il existe chez les monotrèmes un sphincter anal supérieur (*o*, fig. 3, pl. 7) qui retient les matières stercorales au-dessus du cloaque et qui limite ainsi le vestibule génito-excrémentitiel. Chez l'échidné, ce sphincter est plus fortement dessiné, et les fibres musculaires qui le composent sont plus faciles à suivre le scalpel à la main; aussi peut-on en isoler un certain nombre (*n*) et s'assurer qu'elles embrassent, indépendamment de la circonférence du rectum, la terminaison du canal de l'urètre. Il est bon aussi de signaler la gouttière cloacale, qui se trouve tracée sur la paroi inférieure du vestibule commun, et qui conduit, tant chez le mâle que chez la femelle des monotrèmes, à l'orifice du canal urétro-sexuel.

L'ovaire de l'ornithorhynque, du volume d'une petite noisette de forme oblongue, un peu déprimé dans toute son étendue, recouvert par le péritoine, ne présente aucune saillie, aucune irrégularité. Sa membrane albuginée, quoique mince, est assez résistante. Au-dessous d'elle se trouve le stroma, qui contient les ovules. Aucun d'eux ne fait saillie à la surface de l'ovaire, et cette glande ne présente aucune trace de cicatrice indiquant la sortie d'un ovule. Toutes ces circonstances autorisent à penser que le sujet qui nous a servi d'étude était jeune encore et impropre au phénomène de l'ovulation spontanée. Les granules sphériques que l'on rencontre dans le tissu de l'ovaire sont des débris de vésicules de Graaf contenant chacune un œuf à l'état rudimentaire. Les parties qui constituent ces œufs sont très-difficiles à bien déterminer, à cause de la petitesse des vésicules de Graaf et surtout à cause du retrait de celles-ci sur elles-mêmes, par suite de l'action de l'alcool. Malgré ces difficultés, il m'a été possible de constater qu'il y a dans chaque vésicule ovarienne deux sphères emboîtées, une externe, la vitelline, et une interne, la germinative. Ces deux parties, qui entrent dans la constitution de l'œuf, ne peuvent être distinguées sur des pièces conservées dans l'esprit de vin qu'après qu'on les a laissées plonger dans de l'eau pendant quelques jours. La plupart des œufs que j'ai examinés ne contenaient pas encore de vitellus; dans quelques-uns on voyait, à un fort grossissement, des granulations vitellines en suspension dans un liquide assez transparent. Celui-ci était en grande partie aqueux et provenait de l'endosmose, qui avait dû s'établir entre le liquide ambiant et le liquide albuminoïde, plus ou moins condensé, qui existait dans la sphère vitelline.

Suivant B. Owen, et d'après une figure qui a été reproduite dans l'ouvrage de M. Coste (*Embryogénie comparée*), l'ovaire de l'ornithorhynque se compose de granules comparables à ceux des oiseaux, et mieux encore aux ovaires des lézards. On voit de chaque côté de l'appareil reproducteur des masses granuleuses formant de petites sphères grosses, en général, comme des

têtes d'épingles; il y en a beaucoup qui n'ont que le volume d'un grain de millet et deux ou trois qui dépassent celui d'un petit pois. Ces derniers seraient des vésicules de Graaf qui ont déjà émis leurs œufs et qui se trouveraient à leur période de réparation, c'est-à-dire réalisant la formation d'un corps jaune. Cette particularité de l'ovulation est représentée à part sur une figure grossie reproduisant une coupe de l'ovaire. J'insiste sur ces faits pour montrer que l'auteur du mémoire que je cite admet, comme Owen, que la structure de l'ovaire de l'ornithorhynque, quoique en apparence analogue à celle des oiseaux, se compose d'éléments semblables à ceux des autres mammifères. Il faut supposer dès lors que chaque ovule, en se développant, dépasse la surface du stroma, à tel point, qu'il s'isole complétement de la masse ovarienne, comme cela s'observe chez les oiseaux, sans que pour cela la vésicule de Graaf se comporte autrement que chez les mammifères. La formation du corps jaune est donc ici le point capital qui doit faire considérer la structure de la glande ovigène de ces animaux plutôt comme comparable à celle des mammifères qu'à celle des oiseaux.

Au surplus, je le répète, l'ovaire de l'ornithorhynque que j'ai eu occasion d'étudier et de reproduire dans mes planches n'est rien moins que comparable à l'ovaire des oiseaux, et tout porte à croire que le dessin qui accompagne le mémoire d'Owen est inexact, ou tout au moins exagéré sur ce point. Du reste, on ne sait rien de positif relativement à ce qui se passe dans la vésicule de Graaf pendant que l'œuf s'y développe; ni mes observations, ni les descriptions d'Owen ne peuvent suffire à élucider cette question. Y a-t-il, en effet, une membrane granulée offrant un disque proligère à l'ovule, et ce soutien du futur germe est-il dirigé comme par une main habile à l'aide d'un liquide qui le pousse au-devant de lui jusqu'au point de la vésicule de Graaf où doit s'opérer la déhiscence? C'est ce qu'on ne sait pas d'une manière précise. Un autre point de l'ovologie également important à connaître est celui qui a trait au volume du vitellus, au moment

où il se détache de l'ovaire, et ces données anatomiques manquent aussi, faute d'avoir pu être étudiées convenablement. Suivant B. Owen, l'œuf qu'on rencontre dans l'oviducte aurait un peu plus que le volume d'un pois ordinaire; mais ces indications sont insuffisantes pour qu'on puisse établir, d'après elles, les caractères distinctifs de l'oviparité ou de la viviparité des êtres. De nouvelles investigations sont donc nécessaires pour savoir de quelle manière se comporte l'ovule dans l'ovaire, et quelle est sa constitution au moment où il s'en détache pour passer dans l'oviducte.

En parlant des organes qui sont chargés du transport de l'œuf, j'ai dit qu'il était possible, avec un peu d'attention, de les distinguer du spermiducte, par l'ouverture libre qu'on remarque vers leur extrémité ovarienne. Cette fente de l'oviducte (*K*, pl. 6) n'est plus, comme chez les mammifères déjà cités, un pavillon, un évasement considérable chargé de recouvrir et d'embrasser tout l'ovaire, dans le but de recevoir l'ovule qui s'en détache; elle constitue à peine une ouverture capable de recevoir un très-petit œuf. Les parois de la trompe, ensuite, sont assez épaisses, de nature fibreuses, non plissées vers leur bord libre et nullement frangées. Il ne m'a pas été possible de m'assurer si la muqueuse qui revêt son intérieur est garnie de cils vibratiles, bien que la pièce n'ait pas été altérée par l'alcool dans lequel elle avait été plongée. La substance à injection que j'ai fait pénétrer par cette ouverture dans tout l'oviducte n'a que médiocrement distendu ces parois musculaires; elle s'est écoulée en grande partie dans le conduit urinaire par une petite ouverture oblongue, située sur une papille urétro-sexuelle (voy. pl. 6) qui est en regard du col vésical. Au sommet de cette même papille se trouve l'orifice de l'uretère, en sorte que la fusion entre les conduits urinaires et les conduits sexuels est plus grande chez l'ornithorhynque femelle que chez l'ornithorhynque et l'échidné mâles, où il y a des papilles distinctes, deux mamelons perforés au sommet pour les uretères et deux mamelons également perforés au sommet pour les spermiductes spéciaux. La base des papilles urétro-sexuelles de l'ornithorhynque

femelle se continue d'une part avec les fibres musculaires de l'oviducte, et de l'autre avec celles du canal spécial de l'urine; son tissu est en grande partie érectile surtout vers l'extrémité libre de la papille. Les parois du conduit urétro-sexuel semblent se continuer plus spécialement avec celles des oviductes. Du reste, un tissu fibreux inextricable unit la partie terminale des uretères, des oviductes et du col vésical avec le canal urétro-sexuel. Celui-ci, entièrement comparable à celui de l'ornithorhynque mâle par son calibre et son étendue, présente un renflement médian qui lui donne un aspect fusiforme à l'extérieur (fig. 1, pl. 6 *g*). En dedans (fig. 2 et 3), on remarque de nombreux plis longitudinaux de la muqueuse; ils sont l'indice de l'extensibilité du canal. Vers son quart postérieur et exactement au même point où l'on trouve chez le mâle l'orifice du canal séminal, on aperçoit un très-petit pertuis (*m*, fig. 2), non décrit par les auteurs, qui est situé au centre d'une auréole vasculaire. L'injection que j'ai poussée dans cet orifice a pénétré jusque dans le clitoris bifide, et s'est arrêtée dans l'un de ses mamelons (voy. fig. 4) presque à la base des quatre papilles cornées qui le terminent. Le conduit injecté est très-fin d'un bout à l'autre, il reçoit à peine une soie de cochon, et se termine en cul-de-sac dans le tissu spongieux et érectile du clitoris; aucun conduit excréteur, provenant des glandes analogues à celles de Cowper chez le mâle, ne vient ici s'ouvrir dans le canal sexuel. A part cette légère différence et celle que j'ai déjà signalée en parlant du mode de terminaison du canal séminal, il y a pour les deux sexes une telle analogie de plan, que la confusion est possible, si l'on s'en tient à une étude superficielle des organes. Après avoir fourni le canal séminal chez le mâle et le canal clitoridien chez la femelle, le conduit urétro-sexuel s'ouvre dans le cloaque presque à la hauteur du commencement du fourreau sexuel, ce qui établit un hypospadias plus complet chez la femelle que chez le mâle, et qui caractérise ainsi, d'une manière plus spéciale encore, l'arrêt de développement que subit l'appareil reproducteur femelle. Un sphincter un peu sail-

lant sous la muqueuse rectale sert à contenir les produits génito-urinaires, et à en diriger et régulariser la sortie. Quant au vestibule génito-excrémentitiel, il est limité entre les deux sphincters, et ne présente aucune différence anatomique notable dans les deux sexes, si ce n'est que l'entrée du fourreau sexuel est plus grande chez le mâle, et que la gouttière cloacale y est plus prononcée. Relativement aux glandes rectales, elles s'ouvrent au-dessus du sphincter supérieur. Toutes ces remarques sont entièrement applicables aux échidnés, sauf la forme et le volume des organes, ce qui n'est d'aucune importance.

A l'égard ensuite des fonctions de l'appareil génito-urinaire des monotrèmes, tout est encore mystère. Et d'abord, de quelle manière s'effectue l'accouplement? Le pénis du mâle entre-t-il dans le cloaque de la femelle? pénètre-t-il au contraire dans le fourreau clitoridien? ou bien s'engage-t-il dans le conduit urétro-sexuel? Si l'on a égard au mode d'accouplement des oiseaux et à l'analogie qui existe entre les appareils génitaux, urinaires et rectaux de ceux-ci, comparés à ceux des monotrèmes, nul doute que la simple juxtaposition des parties anales des deux sexes ne puisse suffire à l'accomplissement de l'acte reproducteur. Mais de quelle manière s'effectue le rapprochement chez les monotrèmes? Quelques auteurs ont pensé que cela peut avoir lieu comme chez les reptiles ophidiens et sauriens; c'est-à-dire que la verge s'engagerait dans les parties sexuelles de la femelle, et servirait ainsi plutôt de moyen d'union entre les deux sexes que de mode de transmission pour la liqueur séminale. D'après cette manière de voir, le pénis pénétrerait dans le fourreau clitoridien, où la turgescence des organes de sensation vénérienne serait assez considérable pour pouvoir maintenir en rapport les deux anus. Alors l'éjaculation se ferait par l'orifice du canal urétro-sexuel, et le sperme aboutirait dans les conduits génitaux de la femelle à l'aide des gouttières cloacales. Mais, tout en admettant la possibilité de ce mode de fécondation, il est plus que probable que les choses se passent différemment. La structure et la disposition du pénis

perforé des monotrèmes doivent avoir une signification tout autre, un rapport de fonctionnalité plutôt analogue à celui des mammifères qu'à celui des reptiles et des oiseaux, chez lesquels le sperme est simplement déposé dans le cloaque. Il est donc très-présumable que l'élongation du membre viril, qu'on ne saurait déterminer rigoureusement quand il est à l'état de repos, peut facilement atteindre l'orifice urétro-sexuel de la femelle pendant l'érection, et y verser la liqueur fécondante qui, dans ce cas, passerait par le canal séminal, et non plus par le conduit urétro-sexuel, aboutissant au vestibule génito-excrémentitiel. L'état permanent et régulier d'hypospade serait ainsi expliqué, puisque le canal séminal des monotrèmes émettrait le sperme, et l'autre portion du canal, l'urine seulement. Ce qui milite en faveur de cette opinion, c'est que tous les muscles rétracteurs du fourreau sexuel et de l'anus doivent, en agissant activement, faire saillir la verge en avant, et lui donner ainsi plus de longueur. Le même retrait s'opérant également sur les appareils génital et rectal femelle, il est facile d'admettre que l'intromission du gland peut atteindre le canal urétro-sexuel. L'éjaculation dans cette partie doit se faire, si l'on en juge par les orifices très-ténus du gland des monotrèmes, d'une manière lente et continue, comparable à la sortie du lait du mamelon d'une nourrice quand l'enfant tette. Le jet de la liqueur fécondante sera, du reste, d'autant plus fort, que les ouvertures qui lui livrent passage sont plus petites; mais il faut pour cela que la consistance du sperme ne soit pas plus grande que celle du lait, car autrement il ne jaillirait pas convenablement. Cette condition essentielle existe ici, puisque les uretères, qui débouchent dans le canal urétro-sexuel, y versent continuellement de l'urine, et que ce liquide, qui ne peut entrer dans la vessie que par une sorte de régurgitation du canal, est propre à diluer les spermatozoïdes et à en faciliter l'expulsion. Ces mêmes conditions physiologiques, qui se répètent et se reproduisent dans diverses classes de vertébrés, quand surtout les glandes prostates et celles de Cowper n'existent pas ou sont à l'état rudimentaire, rendent

suffisamment compte de ce phénomène, et le généralisent en quelque sorte. Toutes les fois donc que la liqueur prostatique manque, celle-ci est remplacée par l'urine, qui remplit le même office. Ce fait, fort remarquable, établit un rapprochement de plus entre les reptiles écailleux et les monotrèmes. Je reviens actuellement au fluide séminal, que je suppose déposé au fond du conduit urétro-sexuel de la femelle. Si ce conduit était destiné au passage de l'œuf seulement, ce pourrait bien être, à la rigueur, le lieu de la fécondation; mais comme l'urine passe sans cesse dans ce canal, il est impossible d'admettre que les produits de la génération puissent s'y arrêter quelque temps, et que l'imprégnation s'y effectue. Il faut donc nécessairement que le fluide fécondant aille plus loin à la rencontre de l'ovule, et, pour cela, qu'il pénètre jusque dans l'oviducte spécial; mais là est précisément la difficulté apparente, car l'orifice de ce conduit n'est pas dirigé convenablement et n'est pas le seul qui soit situé au fond du canal urétro-sexuel : il y a aussi celui de la vessie et ceux des uretères, qui pourraient recevoir le sperme; or, s'il n'y pénètre pas, il faut admettre que la portion du tube oviducte dont il s'agit a une action physiologique toute spéciale, et qu'il exerce sur le sperme une sorte d'aspiration, peut-être, qui fait venir à lui le principe fécondant du mâle. Il serait bien intéressant aussi de savoir si les spermatozoïdes passent jusque dans la vessie, et si là ils sont ensuite dirigés sur l'ovule à son passage dans le canal urétro-sexuel. Le rapport qui existe entre l'orifice des oviductes spéciaux et le col vésical serait favorable à cette supposition. On pourrait également croire que la vessie, qui a la structure d'un véritable utérus, et qui ne reçoit plus les uretères, est plutôt un organe d'incubation qu'un réservoir urinaire ou spermatique. Mais, bien que l'appareil dont il est question ait subi de profondes modifications, il ne faut pas perdre de vue pour cela les données anatomiques et physiologiques qui éclairent sur la véritable signification de chaque chose. Ainsi, la présence de l'urine dans la vessie exclut immédiatement l'idée d'une toute autre fonction

assignée à cet organe. Le fluide séminal n'étant admis ni par l'orifice vésical, ni par ceux des uretères, qui émettent constamment l'urine, il doit passer forcément dans les oviductes spéciaux, et c'est là que l'ovule, qui s'est détaché de l'ovaire, peut seul s'y rencontrer. Il est très-présumable qu'après que la fécondation s'est opérée, le germe se développe, en grande partie au moins, dans ces conduits sexuels, qui serviraient à l'incubation. Maintenant peut-on déterminer rigoureusement, d'après la structure de l'oviducte spécial, quel est le mode d'incubation? Il est certain que si l'on compare l'oviducte du pigeon, par exemple, à celui de l'ornithorhynque, leur exacte ressemblance peut faire admettre que l'œuf de celui-ci ne se développera pas dans l'oviducte et qu'il ne fera qu'y passer; mais si l'on a égard à la muscularité plus grande de l'oviducte de l'ornithorhynque, surtout dans sa partie terminale, on sera disposé à admettre que l'œuf peut s'y développer à la manière de ceux de certains reptiles écailleux. L'ovoviparité serait alors le mode d'évolution fœtale des monotrèmes. La présence d'œufs volumineux trouvés dans les oviductes de l'ornithorhynque sans le moindre vestige de placenta, comme le dit Owen, est une preuve de plus en faveur de cette opinion. Du reste, de Blainville, qui s'est beaucoup occupé de cette question, se range à l'idée que les monotrèmes sont des animaux mammifères aplacentaires, en ce sens que l'œuf ne se greffe pas sur la muqueuse de l'oviducte. Si donc celui-ci est libre dans son tube incubateur, et si les vaisseaux vitellins, sont, comme le veut Owen, plus développés que ceux de l'allantoïde, l'œuf fécondé devra se comporter, à l'égard de son accroissement et à son mode d'éclosion, comme celui des vipères ou des squales.

En résumé :

Il n'y a point chez les monotrèmes d'organes sexuels extérieurs. Le pénis et le clitoris, cachés dans le fourreau sexuel, ne diffèrent en apparence l'un de l'autre que par le volume.

A l'intérieur, les appareils de la reproduction dans les deux sexes sont tellement semblables, qu'on les dirait calqués l'un sur l'autre.

Ce qui différencie le mâle d'avec la femelle, c'est, d'une part, le pavillon de la trompe, et, de l'autre, la disposition en zigzag du conduit déférent.

La glande spermagène se compose de tubes séminifères assez longs et anastomosés entre eux, qui vont aboutir au corps d'Hygmore.

Le déférent spermatique, né du corps d'Hygmore, ne constitue pas d'épididyme proprement dit, il se comporte plutôt comme la dernière portion de ce tube excréteur que l'on a nommé déférent.

Celui-ci débouche directement dans le conduit urétro-sexuel au sommet d'une papille libre.

La glande prostate et les vésicules séminales manquent entièrement.

Le canal de l'urètre se bifurque en deux conduits : l'un est le canal séminal, l'autre la continuation de l'urètre, et cet état de choses constitue une sorte d'hypospadias.

Le premier conduit, évasé à son origine, reçoit les tubes excréteurs des glandes de Cowper, et va s'ouvrir au sommet du gland; il donne passage au sperme.

Cette sorte d'hypospade ne constitue pas la seule bizarrerie de l'appareil reproducteur : il y a aussi ce fait remarquable chez les monotrèmes, c'est que les uretères débouchent dans le canal de l'urètre et non dans la vessie urinaire.

L'ovaire des monotrèmes ressemble infiniment à celui des autres mammifères, tant par sa forme générale que par sa structure.

La vessie et le canal de l'urètre présentent chez la femelle les mêmes particularités que chez le mâle.

Indépendamment de cette grande similitude, il y a ce fait physiologique étrange, à savoir : que chez la femelle le produit de la génération passe nécessairement par le canal de l'urètre, canal qui tient lieu de vagin.

Le canal séminal du mâle est représenté très-fidèlement chez la femelle des monotrèmes par un conduit rudimentaire imperforé, et cette circonstance établit ici un véritable hypospadias.

§ IV.

PIGEON DOMESTIQUE.

L'étude des organes de la génération dans la classe des oiseaux a plus particulièrement porté sur les espèces communes, d'une grande taille, le coq, la poule, le casoar, l'oie, le canard, etc. On ne trouve rien, ou presque rien, dans les auteurs, qui ait trait à l'appareil reproducteur du pigeon en particulier.

Cette considération, d'une part, et la dissidence d'opinions qui règne encore parmi les ornithologistes, relativement à la question de savoir si les pigeons doivent être rangés parmi les passereaux ou parmi les gallinacés, ou bien s'ils forment un ordre indépendant des uns et des autres, ont sans doute déterminé l'Académie à les désigner plus spécialement comme sujet d'étude. Quoi qu'il en soit, il est une chose certaine, c'est que, de tous les oiseaux, il n'en est aucun peut-être qui offre, sous le rapport des appareils reproducteurs, des traits de comparaison plus grands que ceux qui existent entre les organes générateurs du pigeon et ceux des monotrèmes. Les premiers, en effet, ont, comme l'ornithorhynque et l'échidné, un seul orifice cloacal, qui les caractérise. Outre cela, on trouve aussi dans le premier compartiment du vestibule commun du pigeon une large ouverture qui conduit dans la bourse de Fabricius, et qui rappelle d'une manière frappante celle de l'ornithorhynque aboutissant à la poche ou fourreau sexuel. Plus loin, et dans un compartiment médian du vestibule commun, s'ouvrent, chez les oiseaux, les conduits sexuels et urinaires, de même que cela a lieu chez les monotrèmes, avec cette différence, toutefois, que chez ces derniers il n'y a qu'un orifice commun, tandis que chez les premiers ils sont distincts. Ainsi, déjà par ces similitudes organiques, le nom de monotrème, employé pour désigner les deux genres ornithorhynque et échidné, rappelle que les mammifères qui le portent ont, comme les oiseaux, un orifice unique, un seul trou, un vestibule commun enfin,

dans lequel les voies génitales, urinaires et fécales débouchent à la fois. Mais là ne se borne pas la ressemblance des appareils reproducteurs chez ces animaux de classes différentes, l'oviducte du pigeon est trait pour trait comparable à celui de l'ornithorhynque. Le pavillon de la trompe manque chez les deux, et la fente ou l'ouverture oblongue de l'oviducte est dirigée en dehors, c'est-à-dire du côté opposé à l'ovaire. Ce qui diffère seulement en comparant ces parties, c'est la dualité permanente des organes conducteurs, dualité qui existe chez les monotrèmes et qui manque le plus ordinairement chez les oiseaux. Il y a encore un autre point de similitude entre l'appareil reproducteur du pigeon et celui de l'ornithorhynque, il est relatif à la forme et au volume des testicules. En effet, on trouve constamment chez ces animaux que la glande spermagène est oblongue ou ovoïde, et que leur volume est égal tant chez les uns que chez les autres. Ce dernier point toutefois a été contesté, à l'égard des oiseaux, par Tannimberg, Tiedmann et Carus, qui ont établi que toujours, chez les oiseaux, le testicule gauche est plus gros que le droit. Partant de là, les organes reproducteurs mâle et femelle du côté gauche se trouveraient chez ces vertébrés à leur maximum de développement, quand ceux du côté opposé seraient frappés d'atrophie. Ce rapport si remarquable entre les glandes spermagène et ovigène d'un même côté de l'axe médian, bien qu'infirmé à l'égard du pigeon, n'en est pas moins une règle générale qu'il faut bien reconnaître avec les auteurs que je viens de mentionner, et qui, en définitive, établit une conformité de plan organique pour la classe des oiseaux. Tous ces faits, du reste, ressortiront plus clairement de la détermination anatomique que je vais exposer, concernant les appareils mâle et femelle du pigeon.

A. Chez le mâle, les testicules sont deux corps ovoïdes d'égal volume, situés non loin l'un de l'autre, et symétriquement placés dans la profondeur de la cavité abdominale, sous les lobes antérieurs des reins; ils sont maintenus en place par un repli du péri-

toine qui contient, entre ses deux lames, les vaisseaux de la glande spermagène. La forme du testicule, et surtout son volume, varie beaucoup, suivant l'âge et les saisons : chez le très-jeune pigeon il est fusiforme et d'une petitesse extrême ; vers un âge plus avancé (cinq à six mois), il est au maximum de son développement, et devient plus volumineux, d'un tiers encore, vers le printemps.

Chaque glande spermagène est contenue, indépendamment de l'enveloppe péritonéale, par une membrane propre, l'albuginée, qui se compose d'une couche externe fibreuse et d'une couche interne qui est très-vasculaire ; celle-ci envoie des prolongements dans la glande jusque sur les tubes spermagènes (*B*, pl. 8) ; du reste, il est impossible de s'assurer si les cloisons forment un réservoir analogue au corps d'hygmore des mammifères. L'extrême difficulté que l'on a à détacher l'albuginée des conduits séminifères et la grande ténuité des parois de ceux-ci sont des obstacles insurmontables, qui ne permettent pas de tout observer convenablement. Lorsqu'on examine avec une faible loupe la surface d'une glande spermagène, on voit, à travers ses parois, une multitude de vésicules d'égal volume placées les unes à côté des autres. Entre chaque saillie vésiculaire existe, quand les vaisseaux spermatiques ont été convenablement injectés, un réseau vasculaire admirable (fig. *B*), provenant des radicules artérielles et veineuses qui ont pénétré dans la glande à l'aide des prolongements ou cloisons de l'albuginée (*b*, *b*). Dans l'impossibilité où l'on est de séparer les enveloppes propres de la glande spermagène des tubes qui la composent, il faut nécessairement avoir recours aux coupes du testicule, pratiquées dans divers sens. Cette méthode, quoique très-défectueuse, fait pourtant connaître que les vésicules qu'on remarque à la surface de la glande sont des extrémités de tubes, des espèces de cœcum qui constituent l'origine des canaux séminifères (voy. fig. *B*, *c*, *c*). Quant à savoir ensuite si ces conduits sont enroulés sur eux-mêmes et s'ils s'anastomosent entre eux, il est impossible de l'affirmer à l'égard du testicule du

pigeon. Je sais fort bien que dans la glande spermagène du coq on peut s'assurer de la disposition des canaux séminifères, et établir d'une manière à peu près certaine qu'ils décrivent plusieurs courbes et se pelotonnent en quelque sorte comme ceux du lapin; mais dans le pigeon, où tout est adhérent ou du moins semble l'être, sans doute à cause de l'extrême ténuité des parois des tubes séminifères, on ne saurait rien affirmer. On peut dire cependant que leur glande spermagène diffère de celle des mammifères déjà étudiés, par l'arrangement des vésicules qu'on remarque à sa surface, par la direction régulière de ses tubes et par leur moindre indépendance réciproque.

Quant aux canaux efférents du testicule, il est assez difficile de les suivre à cause de l'extrême mollesse de leurs parois; il m'a semblé pourtant, sur plusieurs préparations, pouvoir en compter de six à huit; ce sont ces conduits qui constituent l'épididyme. Cette partie du spermiducte repliée plusieurs fois sur elle-même adhère intimement au bord interne du testicule; de ce point ensuite jusqu'au cloaque, le conduit déférent ne se coude plus sur lui-même (fig. 1, pl. 8); mais lorsqu'il est parvenu au niveau de la bourse de Fabricius (*h*), il décrit des sinuosités très-courtes en zigzag, puis se renfle tout à coup, prend la forme et le volume d'un grain de blé (*d*, fig. 1), après quoi il s'amincit de nouveau considérablement, traverse la paroi cloacale supérieure, et vient s'ouvrir dans le vestibule commun, au sommet d'une papille érectile, qui constitue une espèce de verge. Les spermatozoïdes contenus dans le déférent sont d'autant plus développés qu'ils ont parcouru une plus grande étendue du spermiducte. La disposition du conduit déférent est tout autre chez le coq, où les contours sont infiniment plus nombreux, plus prononcés et disposés en spirale à l'origine. L'ampoule inférieure, qui représente une sorte de vésicule séminale chez le pigeon, manque chez le coq, et ses deux papilles sexuelles ne sont pas placées aussi près l'une de l'autre ni sur la même ligne que les orifices des uretères. Du reste ces organes copulateurs rudimentaires diffèrent aussi par

leur forme, leur volume et leur disposition, suivant les espèces d'oiseaux, puisque chez le canard, par exemple, ils constituent une véritable verge, non perforée, il est vrai, mais sillonnée de manière à conduire la liqueur fécondante dans les organes sexuels femelles.

Chez le pigeon, donc, les deux papilles sexuelles se trouvent situées dans le compartiment médian du vestibule commun, à six millimètres de distance l'une de l'autre (fig. 2). Elles sont dirigées du côté de l'ouverture anale, et convergent sensiblement en arrière. Entre leurs bases se trouvent les orifices des uretères, au centre d'une petite saillie mamelonnée, qui semble de nature érectile et qui a beaucoup d'analogie avec les points lacrymaux. La région antérieure ou tubulaire du vestibule commun se trouve limitée par le sphincter rectal, et ne présente rien de remarquable ; la région postérieure, au contraire, celle que le célèbre Geoffroy-Saint-Hilaire a décrite, dans son Anatomie philosophique, sous le nom de bourse copulatrice, est très-importante à connaître au point de vue de la fonctionnalité, eu égard surtout à la bourse de Fabricius, qui y débouche. Cette loge ou compartiment du vestibule commun fait partie, comme les deux régions plus profondes, de l'intestin rectum. Toutefois, on peut disjoindre les zones cloacales, en vue d'une analogie de fonction, sans pour cela en faire un organe spécial. La fusion des appareils urinaires et reproducteurs l'un avec l'autre, leur dépendance plus ou moins absolue, la disparition partielle ou complète de certains organes composant ces appareils, montrent à chaque instant, même chez les vertébrés supérieurs, que la fonction ne s'annihile pas comme l'organe. Souvent en effet celui-ci semble ne plus exister, et dans ce cas la fonction reste dévolue aux autres parties de l'organisme, dans le but de ne pas détruire l'harmonie fonctionnelle ; c'est ce qui arrive ici à l'égard de la vessie urinaire, qui manque entièrement chez le pigeon, et qui est remplacée par la zone médiane du vestibule commun ou portion terminale du tube digestif. Cette zone, limitée en effet en avant et en arrière par des sphincters qui

l'isolent de toutes parts, peut, pour un temps donné, ne contenir que de l'urine et être ainsi l'analogue de la vessie urinaire. Ce qui vient à l'appui de cette manière de voir, c'est que l'allantoïde chez le fœtus débouche aussi dans la zone moyenne du vestibule commun. A ce compte la chambre copulatrice deviendrait un conduit urétro-sexuel, et de plus un conduit stercoral. Du reste, les travaux remarquables de Geoffroy-Saint-Hilaire sur la détermination exacte et rigoureuse des compartiments du vestibule commun, improprement appelé cloaque, ne laissent aucun doute sur la véritable signification à lui donner. Quant à la loge copulatrice ou premier compartiment du vestibule commun, elle est limitée par deux sphincters : l'un externe ou anal, l'autre interne, que je nommerai vésical. Au fond de cette première loge et à sa partie supérieure, qui est en rapport avec le rachis, se trouve une large ouverture (*i* fig. 2, 4, pl. 8), qui conduit dans la bourse de Fabricius : cet orifice ne semble pas garni de sphincter ni de tissu vasculaire de nature érectile ; un canal évasé, à parois épaisses, long d'environ un centimètre, conduit dans la cavité de la bourse de Fabricius. Les rapports de connexions de cette bourse sont très-importants à connaître : son volume égale celui d'une grosse amande dépouillée de sa coque ; on la trouve constamment placée sur la ligne médiane entre le rectum, qui est en avant, et la cavité du bassin : aussi pendant la station de l'animal elle occupe le plan supérieur, et le vestibule commun le plan inférieur. Les uretères et l'oviducte passent entre la bourse de Fabricius et le renflement rectal, pour aller s'ouvrir, sur la paroi supérieure du vestibule commun, de la manière que j'ai indiquée. Quand on enlève le feuillet péritonéal qui recouvre la bourse de Fabricius, on voit que celle-ci a une surface granuleuse (voy. fig. 4, *h*), que toutes ces granulations, assez analogues à des grains de millet, se touchent, et que leur densité est assez grande. Lorsqu'on incise les parois de la bourse de Fabricius (*h*, fig. 5), on constate qu'elles sont très-épaisses, surtout vers le fond de l'organe ; qu'elles renferment une multitude de granules, et que la cavité de la bourse

est comme criblée de trous de calibres très-différents. Après un examen plus minutieux, on voit que chaque granule a un conduit excréteur; que tous ces conduits, dont les uns vont s'ouvrir directement à la surface interne de la bourse de Fabricius, et dont les autres, réunis par groupes de deux à cinq, débouchent vers un même point, constituent ces sortes de porosités irrégulières ou trous dont il est question. Toutes ces glandules de la bourse sont enchâssées dans un tissu fibreux très-résistant, et ont des parois qui leur sont propres. Chaque utricule contient une matière visqueuse de nature albuminoïde ou cébacée, qui, chez les pigeons âgés, se convertit en une substance que l'on peut faire arriver dans la cavité de la bourse, sous forme vermiculaire, en comprimant ses parois. La sortie de ce produit de sécrétion s'effectue de la même manière que s'il s'agissait d'expulser d'un des follicules de la peau du visage, par pression, le produit qui s'y est accumulé anormalement. La cavité de chaque utricule est tapissée par une membrane muqueuse qui se continue avec celle de l'intérieur de la bourse de Fabricius et du vestibule commun.

Sur un pigeon de deux ans, j'ai trouvé tout l'appareil glandulaire de la bourse de Fabricius durci, rugueux et bosselé. Il y avait dans chaque glande et dans la bourse elle-même une substance plâtreuse ou cébacée d'une consistance calculeuse, qui remplissait très-exactement ces cavités (voy. fig. *H, I,* pl. 8). Sur ce même individu mâle, les conduits déférents étaient volumineux et contenaient un grand nombre de spermatozoïdes très-bien développés. Sur d'autres pigeons adultes de l'un et de l'autre sexe, j'ai rencontré l'orifice de la bourse de Fabricius entièrement oblitéré; dans ce cas les parois de la bourse étaient minces, ridées, les utricules atrophiés, et tout l'organe réduit à la moitié environ de son volume normal.

B. Chez la femelle il n'y a qu'un seul ovaire, situé à gauche de l'axe médian : sa forme est triangulaire et aplatie; une de ses faces répond aux reins, l'autre aux intestins qui la recouvrent. L'ovaire et ses vaisseaux propres sont contenus dans un mésovaire qui se

fixe sur le trajet de la veine cave inférieure. Des lames inégales de la glande ovigène contenant des œufs à des degrés divers de développement donnent à l'ovaire un aspect tout particulier, qui le fait reconnaître au premier abord. Lorsque les œufs ne sont pas dans une période croissante, le bord libre et externe de la glande ovigène (*b*, fig. 3, pl. 8) est frangé et parsemé de granulations très-fines, qui ne sont autres que des œufs à l'état rudimentaire. Tous ces œufs disséminés dans la substance fibreuse de l'ovaire se composent de vésicules transparentes et contiennent un liquide albumineux qui, traité par la baryte, laisse apercevoir un nombre infini de globules. Lorsque les œufs ont acquis un développement plus grand, et que les granules vitellins les colorent en jaune, la substance fibreuse très-résistante qui les enveloppe de toutes parts s'épanouit, pour ainsi dire, et y adhère moins intimement, ce qui permet de mieux voir les parties qui composent l'ovaire.

Le stroma est encore plus facile à étudier sur des œufs arrivés à leur degré de maturité ; alors on voit que le tissu fibreux forme une enveloppe mince et résistante qui contient la sphère vitelline de tous côtés. Ces parois, que l'on nomme calices, sont éminemment vasculaires, et l'on peut dire qu'elles se composent de deux plans de vaisseaux artériels et veineux, superposés l'un à l'autre. L'arrangement et le mode de terminaison de ces vaisseaux méritent qu'on s'y arrête un instant.

Les artères et les veines ovariennes qui rampent dans l'épaisseur du calice fournissent un réseau qui est très-analogue à celui des vésicules de Graaf, mais qui ne se comporte pas tout à fait de la même manière, et c'est là le point important que je veux signaler ici. Lorsque l'œuf des oiseaux approche de sa maturité, on voit que les vaisseaux du calice, qui s'épanouissent sur la partie la plus éloignée de l'ovaire, ne se rejoignent pas de manière à s'anastomoser les uns avec les autres, comme cela s'observe sur les vésicules de Graaf, mais que chaque ordre de vaisseaux s'arrête dans un tronc principal ou sinus du calice qui les croise à angle droit. Ces sinus sont à quelques millimètres de distance l'un de l'autre,

et décrivent une sorte de demi-zone dont l'étendue varie suivant les diverses classes d'oiseaux. Cette zone est la partie du calice qu'on nomme *stigma*, elle n'est pas entièrement dépourvue de vaisseaux, mais ceux qui la sillonnent deviennent si ténus, qu'ils finissent par ne plus paraître. C'est sur ce point que les parois du calice cèdent et que l'œuf se fraye un passage sans déterminer la moindre rupture de vaisseaux importants. La présence du stigma serait donc la conséquence du volume considérable de l'œuf dans l'ovaire. Une autre particularité fort remarquable de la structure du calice, qui n'est indiquée par aucun auteur, est relative à sa paroi interne : on voit sur cette surface, quand l'œuf en est sorti et à l'aide d'une forte loupe, une multitude de villosités vasculaires disposées en forme de champignons et très-rapprochées les unes des autres. Toutes ces parties, à pédicule étroit et court, ont une extrémité large qui est libre, et sont recouvertes d'une sorte d'épithélium. Ainsi les cellules ovariennes, creusées dans le stroma de l'ovaire, se composent de parois fibreuses et vasculaires, d'une enveloppe péritonéale, et d'une face interne villeuse qui est en contact immédiat avec l'œuf. Maintenant, quelle est la constitution du produit ovarien? Si l'on étudie l'œuf au moment où il apparaît sous la forme vésiculaire, on le trouve composé de deux vésicules transparentes, emboîtées l'une dans l'autre, contenant un liquide clair et très-limpide ; les parois de ces deux vésicules se touchent presque, ce qui fait que les deux sphères concentriques ont à peu près le même calibre, et que quelques anatomistes n'en ont admis qu'une. Cette disposition se rencontre également sur des ovaires de très-jeunes poules, et même quand la glande ovigène est à peine ébauchée. A mesure que l'œuf se développe, on voit que l'espace qui sépare les deux sphères devient de plus en plus grand, et que la sphère interne ne s'accroit plus dans les mêmes proportions que la sphère externe. Bientôt, également, on s'aperçoit que les rapports entre les deux vésicules changent, et que l'interne se met en contact avec un des points de la sphère externe. Quand ces phénomènes intéressants ont lieu,

la transparence de l'œuf diminue sensiblement : c'est qu'alors les molécules du fluide albumineux se modifient déjà, des vésicules apparaissent, elles se groupent vers un même point, enveloppent en quelque sorte la vésicule germinative, et forment autour d'elle le véritable disque prolifère. Pendant que ces vésicules se constituent dans le liquide albumineux qui est interposé entre les deux sphères, on en voit également de développées dans la vésicule germinative elle-même, et cela de la manière la plus évidente, quand on se sert pour les observer de petits diaphragmes et d'un bon microscope. A une période plus avancée du développement de l'œuf, on remarque que chaque vésicule transparente devient, petit à petit, opaque, puis jaunâtre sur un point, et enfin d'un jaune clair partout. Si l'on examine alors avec attention ce qui s'y passe, il est aisé de voir, à l'aide d'un fort grossissement, que la substance albumineuse, qui est soumise à de nouvelles combinaisons chimiques, fournit aux vésicules, par endosmose, des matériaux nouveaux, d'où proviennent des globules excessivement ténus qui s'y accumulent sans cesse et qui finissent par les remplir. C'est en ce moment que les vésicules de la sphère germinative, inégalement remplies de petits noyaux et diversement groupées entre elles, constituent ce que l'on a désigné sous le nom de taches de Wagner ou de la vésicule germinative. Ainsi les vésicules primitives qui apparaissent dans le liquide albumineux finissent par avoir un noyau central, noyau qui a été considéré, à tort, comme primitif, c'est-à-dire de formation antérieure à la vésicule d'enveloppe.

Lorsque les globules ont entièrement rempli les vésicules primitives, celles-ci constituent la presque totalité de la substance vitelline, après quoi apparaissent les gouttes huileuses du jaune quand de nouvelles métamorphoses se sont opérées dans la composition des liquides de l'œuf. La période d'empliation des vésicules vitello-germinatives est précisément celle pendant laquelle la sphère interne cesse d'être apparente. On conçoit, en effet, qu'à mesure que les globules vitellins se développent, ce qui les rend jaunes et opaques, la vésicule germinative disparaît progressive-

ment; elle se place alors sur un point de la sphère vitelline au centre de la cicatricule du jaune. A cette période de l'ovulation, la vésicule germinative est d'une petitesse extrême, par rapport à la sphère vitelline, et ce fait est très-important à signaler, car la segmentation du vitellus après la fécondation, phénomène capital de la formation du blastoderme, ne s'effectue que sur la cicatricule, ou sur le point correspondant à la vésicule germinative. Mais comment cette segmentation se trouve-t-elle limitée sur un seul point de la périphérie de l'œuf, et quelle en est la raison anatomique? J'ai déjà dit qu'au moment où les vésicules primitives apparaissent, elles se groupent autour de la sphère germinative, et que celle-ci, par un mouvement excentrique, se porte vers la face externe de la membrane vitelline; or, à mesure que la substance vitelline se constitue de plus en plus, le disque prolifère prend plus de consistance, les parties qui le composent se serrent les unes contre les autres, et toutes contractent, avec la face interne de la membrane du jaune qu'elles touchent, des rapports intimes. Il résulte de là que la vésicule germinative se trouve comme emprisonnée dans ce disque prolifère.

Maintenant, que se passe-t-il dans ce disque quand l'œuf a été fécondé? Un premier fait généralement établi est celui-ci, la rupture de la vésicule germinative; un autre fait également accepté aujourd'hui est la segmentation du blastoderme. Cette segmentation, d'après quelques physiologistes, porterait sur les parties granuleuses du vitellus seulement; l'autre partie du jaune serait regardée comme impropre à la formation du nouvel être, quoique utile à son alimentation pendant la vie fœtale; aussi la segmentation complète de l'œuf des poissons, des grenouilles, des tritons, etc., tiendrait à l'état granuleux de tout le vitellus. Mais s'il est vrai que des granules existent autour de la vésicule germinative des oiseaux, que tout le disque prolifère est formé de la même substance, et que ses parties ont la plus grande analogie avec celles qui composent le vitellus entier des poissons, des grenouilles, des salamandres, etc., il faut également reconnaître que les éléments pri-

mitifs du jaune se sont métamorphosés; car, dès le principe de sa formation, il n'y a que des vésicules simples, lesquelles, plus tard, deviendront des cellules à noyaux, et enfin de simples granules.

Cette manière de voir n'est pas celle de quelques physiologistes, qui admettent que la cellule primitive se forme autour d'un noyau préexistant; que le point de départ de la formation de l'œuf lui-même est une molécule organique détachée de l'ovaire, autour de laquelle se développent une ou plusieurs cellules concentriques, etc., mais du moins elle est déduite d'observations directes et rigoureuses qui ne laissent aucun doute sur les faits que j'avance. Au surplus, que la métamorphose des parties constituant l'œuf soit telle, qu'il y ait des granulations vitellines en nombre déterminé d'un côté, ou indéterminé de l'autre, toujours est-il probable que le phénomène de la segmentation est subordonné à cet état élémentaire du jaune, et que par conséquent l'œuf des oiseaux n'est qu'un blastoderme partiel, tandis que celui du poisson, de la grenouille, de la salamandre, etc., est un blastoderme entier ou, comme le dit Rusconi en parlant du vitellus du triton, le germe c'est tout l'œuf. D'après cette manière de voir, la vésicule germinative n'aurait pas sa raison physiologique bien déterminée, puisque l'œuf, qui se segmente en entier et qui devient le blastoderme, ne trouverait pas son centre d'action moléculaire uniquement dans les éléments constitutifs de la vésicule germinative comme cela semble être pour l'œuf des oiseaux.

Quoi qu'il en soit de ces considérations, il est bon d'ajouter ici que la segmentation de la portion blastodermique de l'œuf des oiseaux ne commence pas immédiatement après la fécondation, comme cela s'observe chez les poissons, la grenouille, etc., mais bien quand l'œuf est soumis à l'incubation naturelle ou artificielle. Jusque-là les molécules organiques vivantes provenant des deux sexes et en contact les unes avec les autres, restent en léthargie, pour ainsi dire, sans rien perdre, pendant assez longtemps, de leur action vitale. Au surplus, la fécondation étant intérieure chez les oiseaux, les œufs peuvent subir une incubation de quel-

ques jours quand ils tombent dans la cavité du péritoine, et se développer en partie. J'ai plusieurs fois constaté ce fait curieux sur des poules communes; alors on trouve, tantôt la circulation vitelline ébauchée, tantôt celle de l'allantoïde à l'état rudimentaire, et plus rarement ces deux ordres de vaisseaux en même temps, mais toujours incomplétement développés sur un vitellus qui est plus ou moins déformé. Ces sortes de conceptions extra-utérines, fréquentes chez les oiseaux, ont cela de particulier qu'elles ne déterminent aucun accident, que le fœtus n'arrive jamais à un développement complet et que tout l'œuf disparaît par résorption dans un temps donné qui ne semble pas dépasser six à sept semaines. Le plus souvent cependant l'œuf, qui se détache de l'ovaire, passe dans l'oviducte à l'aide du pavillon de la trompe; il est généralement très-développé chez les oiseaux, bien qu'il semble petit dans l'ovaire du pigeon à l'état de repos fonctionnel. (Voy. pl. 8.) Indépendamment de cela, la partie de l'appareil reproducteur des oiseaux qui sert de conduit à l'œuf, organe complexe par sa structure et ses fonctions, mérite d'être étudiée avec beaucoup de soin, tant au point de vue anatomique que physiologique, surtout parce que les auteurs qui se sont occupés de sa détermination, diffèrent d'opinions sur plus d'un point.

L'oviducte du pigeon et des oiseaux, en général, est asymétrique. Il est constitué par un tube membraneux et musculaire, en même temps, ouvert à ses deux extrémités, et s'étendant depuis l'ovaire jusqu'au cloaque. Il présente quelquefois des renflements sur son parcours, qui tiennent autant aux variétés des espèces qu'à l'état particulier de l'organe pendant la saison des amours. Chez le pigeon, ces changements ne sont pas très-appréciables, et l'on peut dire que, dans toutes les saisons, l'oviducte est un tube presque cylindrique d'un bout à l'autre. Il est fixé sur la colonne vertébrale par un mésentère spécial (planche 8, fig. 3 *c*), qui se prolonge en avant jusqu'à la base du poumon gauche. Le mésentère ainsi disposé sert de charnière, pour ainsi dire, à l'oviducte, et lui permet de diriger son ouverture supé-

rieure du côté de l'ovaire; celle-ci n'est point évasée en forme d'entonnoir, comme celle des mammifères que j'ai décrits et comme celle des oiseaux en général, ni à bords frangés; il n'y a qu'une simple fente, assez analogue à celle que présente l'oviducte de l'orithorhynque, qui est dirigée en dehors, c'est-à-dire du côté opposé à l'ovaire. De nombreux vaisseaux provenant du mésentère, rampent sur les bords du pavillon et se continuent sur tout l'oviducte. Au-dessous du péritoine, on aperçoit les fibres musculaires de l'oviducte, fibres dont les principaux faisceaux sont longitudinaux et les autres transversaux. Enfin, une troisième tunique, la muqueuse, séparée de la précédente par une couche cellulaire, tapisse l'oviducte d'un bout à l'autre. Cette tunique interne est légèrement plissée chez le pigeon, et ne présente pas les particularités importantes qu'on lui assigne généralement chez les oiseaux. En effet, chez la poule, par exemple, la disposition remarquable des plis muqueux et l'arrangement tout particulier des papilles muqueuses, joints aux renflements que présente l'oviducte en certains points, ont vivement fixé l'attention des physiologistes, et souvent engagé l'anatomie philosophique dans les voies d'une analogie qu'on n'avait ni connue, ni su apprécier. L'oviducte des oiseaux est, en effet, un organe à fonctions complexes; outre qu'il sert à recevoir et à transmetre l'œuf qui s'est détaché de l'ovaire, il est destiné aussi à lui fournir les éléments qui doivent le compléter, l'albumine et la coque. Ce canal est donc un organe de sécrétion. Il peut aussi retenir quelque temps l'œuf dans un point déterminé de l'oviducte, et toutes ces considérations lui ont fait attribuer des dénominations particulières qui seraient en rapport avec ses fonctions. Ainsi la partie un peu rétrécie de l'oviducte qui fait suite au pavillon, serait l'analogue de la trompe de Fallope. Le renflement médian ou à peu près représenterait l'utérus, et l'espèce de collet qui succède à ce renflement tiendrait lieu de col utérin. Le vagin, enfin, serait représenté par la portion cloacale qui est en avant du tube oviducte. Toutes ces déterminations ont sans doute quelque chose de

forcé, je dirai même d'exagéré, en apparence, surtout quand on s'en tient à la disposition de l'appareil reproducteur du pigeon, par exemple; mais à un point de vue général et après l'étude des organes reproducteurs dans les diverses espèces ou genres composant une même famille, il est impossible de ne pas y voir les données philosophiques dont je viens de parler et sur lesquelles je reviendrai dans un autre chapitre de ce mémoire. J'ajouterai seulement ici, pour terminer tout ce qui est relatif à l'oviducte, que cet organe s'ouvre dans la zone médiane du cloaque, à peu de distance du conduit de l'uretère gauche (voy. fig. 4 et 5), au centre d'un petit bourrelet, espèce de museau de tanche, le plus ordinairement plissé. Lorsque l'oviducte droit existe et quand il est à l'état rudimentaire, on le trouve également au côté externe de l'orifice de l'uretère du même côté, ainsi que cela s'observe pour les papilles sexuelles chez le mâle (fig. 2).

Il me reste à décrire actuellement la dernière portion cloacale ou la bourse copulatrice de Geoffroy-Saint-Hilaire. Cette partie du vestibule commun est exactement comparable à celle du mâle. On voit, en effet, en haut de cette cavité, qui correspond au sacrum, un orifice assez large (*i*, fig. 4); c'est l'entrée de la poche de Fabricius, et en avant de cet orifice le sphincter anal. L'entrée de la bourse de Fabricius a les mêmes dimensions et la même conformation que celle de cette même bourse chez le pigeon mâle, les granulations de forme miliaire existant dans l'un comme dans l'autre sexe jusqu'au bourrelet de l'anus sans distinction aucune. La disposition de ces glandules ou utricules, leur conformation et leur structure anatomique, sont absolument les mêmes chez les pigeons mâle et femelle. Enfin la forme, le volume et la cavité de la bourse de Fabricius sont entièrement semblables dans les deux sexes. Les pigeons femelles d'un âge avancé ont, comme les mâles, la bourse de Fabricius atrophiée, ou leur conduit excréteur oblitéré, quoique ayant encore un ovaire très-développé et la faculté d'émettre des œufs qui sont propres à la reproduction.

Étudiée chez le jeune poulet encore dans l'œuf, la bourse de Fabricius présente cette particularité, c'est qu'elle est plus développée en proportion des autres organes, que chez la poule adulte. La cavité de cette poche est aussi beaucoup plus grande dans les premiers temps de la formation du poulet que plus tard; à la vérité ses parois sont plus minces alors, et c'est à peine si l'on peut distinguer les granulations ou utricules qui entrent dans sa composition. A un âge plus avancé, ces glandules, en se développant, épaississent les parois de la bourse de Fabricius, ce qui contribue puissamment à diminuer sa cavité. Lorsque les utricules en question sont arrivés à leur maximum de développement, on les trouve remplis d'une substance albuminoïde presque incolore, qui se coagule facilement par la chaleur en prenant une consistance plus grande et une coloration d'un blanc mat. On peut facilement faire transuder, en quelque sorte, la liqueur albuminoïde dans la cavité de la bourse de Fabricius, en pressant celle-ci un peu fortement entre les doigts. Mais plus tard, quand l'atrophie des utricules s'effectue, on ne fait sortir, par pression, de leur cavité, que des espèces de filaments vermicellés, qui, comme je l'ai déjà dit, ressemblent très-exactement aux produits anormaux qu'on retire des follicules de la peau. C'est ordinairement après le sixième mois chez le pigeon et après le huitième chez la poule, que les utricules commencent à perdre de leur activité fonctionnelle et à fournir des sécrétions anormales.

D'après ce qui précède, on voit que la bourse de Fabricius est un organe éminemment glandulaire qui fournit une notable quantité de produits muqueux. Cela posé, on se demande quelle peut être son utilité, et à quel appareil elle est le plus étroitement unie? Au commencement de ce chapitre, j'ai dit, en énumérant les analogies qui existent entre les organes reproducteurs des monotrèmes et ceux des oiseaux, qu'à l'entrée de l'orifice anal se trouve, tant chez les uns que chez les autres, un conduit spécial qui aboutit dans une poche membraneuse, abstraction faite, toutefois, de leur structure et de leurs rapports. Eh bien!

sous ce point de vue, le fourreau sexuel membraneux renfermant la verge ou le clitoris, et placé au-dessous du cloaque, ne saurait se comparer rigoureusement à la bourse de Fabricius, qui est de nature glanduleuse et située à la partie supérieure de ce renflement intestinal. Dans le premier cas, il est incontestable que l'on a affaire à une dépendance de l'appareil sexuel, tandis que, dans le second, cette démonstration ne semble pas aussi rigoureuse. Fabricius ab Aquapendente, qui le premier a fait connaître la bourse en question, la croit destinée à recevoir la semence du mâle; mais il ne s'explique pas sur le rôle qu'elle peut avoir chez la femelle. Le célèbre Geoffroy Saint-Hilaire se rapproche beaucoup de cette idée, puisque au point de vue morphologique, il admet qu'elle est, précisément à cause de sa position, le représentant de l'utérus des mammifères, d'une part, et des vésicules séminales, de l'autre; ici au moins l'organe a sa détermination spéciale chez les deux sexes; mais ce qui manque, c'est l'analogie de fonction. En effet, l'utérus des mammifères et les vésicules séminales sont des organes incubateurs où l'embryon et les spermatozoïdes se trouvent et se développent. Or la bourse de Fabricius ne contient jamais ni embryon, ni œuf, ni spermatozoïdes: donc elle n'est l'analogue ni de l'utérus, ni des vésicules séminales. De Blainville et Blumembach pensent qu'elle sert aux fonctions mâles de la génération, sans s'expliquer sur cet usage et surtout sans indiquer ce qu'elle est chez la femelle. Berthold regarde la bourse de Fabricius comme la vessie urinaire des oiseaux, parce qu'il a rencontré dans son intérieur un liquide analogue à l'urine. Mais indépendamment de la difficulté que ce liquide aurait à se porter dans la bourse de Fabricius, qui est placée au-dessus du cloaque, il resterait à expliquer pourquoi la vessie des oiseaux serait composée de parois si richement glanduleuses et pourquoi elle disparaîtrait dans un âge avancé? D'ailleurs les oiseaux, qui sont pourvus d'une véritable vessie urinaire, n'ont-ils pas également la bourse de Fabricius? Ce n'est donc pas non plus un réservoir de l'urine. Perrault, Tiedmann et beaucoup

d'autres anatomistes, admettent que la bourse de Fabricius est l'analogue des glandes anales des mammifères. La structure utriculaire de cet organe, sa conformation générale, ses rapports avec la dernière portion intestinale donnent sans doute quelque valeur à cette opinion; cependant, à tout considérer, on trouve d'abord que la structure des glandes anales n'est pas absolument comparable à celle de la bourse de Fabricius, et que si la conformation de ces glandes est la même, on peut objecter, du moins, que les premières, au nombre de deux, le plus ordinairement, sont situées l'une à droite, l'autre à gauche de l'axe médian du corps, tandis que la bourse de Fabricius, toujours unique, est constamment placée sur la ligne médiane. De plus, le conduit excréteur des glandes anales s'ouvre sur le rebord même du sphincter de l'anus et par un pertuis quelquefois si ténu, qu'on a beaucoup de peine à le trouver, tandis que celui de la bourse de Fabricius débouche largement dans un des compartiments du vestibule commun. Les produits qu'émettent les glandes anales sont de nature cébacée et odorante; et celui de la bourse de Fabricius, au contraire, de consistance albuminoïde pendant une grande partie de la vie, et sans la moindre odeur. Les uns semblent destinés à marquer la trace des animaux qui en sont pourvus, les autres à lubréfier les parties. D'après cela, on ne saurait comparer rigoureusement des organes, qui, tant au point de vue physiologique qu'au point de vue morphologique, diffèrent essentiellement. On a dit aussi que l'usage de ces bourses glanduleuses serait dans les mêmes rapports avec l'âge, que ceux des glandes surrénales ou du thymus; mais celles-ci, chez les mammifères, n'ont ni conduits excréteurs, ni produits de sécrétion à émettre : donc elles diffèrent encore de la bourse de Fabricius, eu égard surtout à la fonction, et ne sauraient lui être assimilées. Reste actuellement, par voie d'exclusion, à comparer cet organe avec la glande prostate des mammifères, ce qui n'a pas été fait. Sous ce rapport, on voit que la bourse de Fabricius occupe, comme la prostate, la ligne médiane du corps, et que, comme elle

aussi, elle est située dans le bassin. Le produit de sa sécrétion est versé dans la portion du vestibule commun qui est située précisément en avant de la loge médiane, portion copulatrice qui représente assez bien le col vésical et qui est toute parsemée de porosités utriculaires, comme pour témoigner par leur présence d'une fonction entièrement analogue à celle de la portion prostatique du canal de l'urètre. Ainsi, d'une part, on trouve chez les mammifères une glande plus ou moins complexe formée d'utricules qui versent leur produit de sécrétion en avant du col vésical pour lubréfier le canal de l'urètre, et de l'autre on voit, chez les oiseaux, la bourse de Fabricius, composée d'utricules, également verser ses produits dans la portion prostatique du canal de l'urètre, et cela dans le but de lubréfier les dernières parties du canal urétro-sexuel et rectal. Jusque-là l'analogie semble évidente entre les parties mâles comparées entre elles. Mais que devient la bourse de Fabricius chez la femelle et à quoi faut-il la comparer? Il est certain qu'au premier abord il semble tout naturel de repousser l'idée que cette bourse puisse être comparée à la glande prostate des mammifères, puisque chez ces vertébrés il n'y a pas de prostate femelle proprement dite; et pourtant, si l'on considère que des travaux récents ont fait découvrir des appareils glandulaires nouveaux dans les parois des oviductes, que de véritables glandes analogues à la prostate ont été trouvées par M. Huguier dans la région urétro-sexuelle de la femme, et que toutes ces parties ont pour fonction de fournir une humeur onctueuse, on sera plus disposé à admettre la comparaison que je cherche à établir. Cependant il reste encore ceci à objecter, c'est que, chez les mammifères supérieurs, certains organes de l'appareil reproducteur mâle ou femelle, quoique répétés exactement chez l'un et l'autre sexe, ne sont jamais développés au même degré. Or, il arrive ici, pour la bourse de Fabricius, qu'elle ne présente pas la moindre différence dans les deux sexes, au point de vue de la forme, du volume, de la structure et des produits qu'elle fournit. Cette particularité tient à ce que l'organisme des

animaux supérieurs offre plus de différence entre les appareils reproducteurs mâle et femelle, que celui des êtres inférieurs. Aussi résulte-t-il de là, que certains organes bien développés chez le mâle de plusieurs espèces se répètent seulement chez la femelle, mais à l'état rudimentaire, et *vice versa*, quand c'est chez la femelle que la prédominance a lieu, comme pour satisfaire à une similitude de plan, à une harmonie organique, en un mot. Mais il faut également le reconnaître, cette harmonie s'équilibre, pour ainsi dire, de plus en plus, à mesure qu'on descend l'échelle animale d'un ou de plusieurs degrés; et cela jusqu'au point de trouver un balancement parfait entre les organes mâle et femelle. On a déjà un exemple de cette ressemblance très-grande chez les monotrèmes, quand on compare les appareils reproducteurs des deux sexes, et l'on voit surtout cette remarquable similitude dans le jeune âge chez tous les êtres; aussi la première ébauche animale, plus régulière et plus stable chez les animaux qui ne se sont pas élevés au dernier degré de développement, par des métamorphoses organiques successives, offre-t-elle une exacte conformité. En faisant l'application de ces données aux oiseaux, on voit que le rang même que ces vertébrés occupent dans la série animale justifie la grande ressemblance, l'exacte conformation des appareils reproducteurs en général, et celui de la bourse de Fabricius en particulier. Que si l'on se demande après cela pourquoi la prostate est si volumineuse chez les oiseaux, on verra que cela tient à la fonction qu'elle doit remplir et qui est de lubréfier, non-seulement les voies urétro-sexuelles, mais encore celles qui donnent passage aux spermatozoïdes, à l'œuf et aux fécés.

Ainsi la bourse de Fabricius est, tant par la position qu'elle occupe, que par ses rapports, sa structure et ses produits de sécrétion, l'analogue de la glande prostate des mammifères.

En résumé :

Les appareils reproducteurs des pigeons mâle et femelle ont plusieurs points de comparaison avec ceux des monotrèmes.

Il n'y a, à l'extérieur, qu'un seul orifice chez les deux sexes pour les voies génito-urinaires et rectales.

Les testicules du pigeon sont absolument du même volume, contrairement à la règle établie à l'égard des oiseaux en général.

Les tubes séminifères qui composent la glande spermagène semblent accolés les uns aux autres, non anastomosés entre eux, et aboutissent dans un canal commun qui tient lieu de corps d'Hygmore.

L'épididyme prend naissance de ce point de jonction des tubes séminifères par six ou huit canaux efférents.

Le conduit déférent qui fait suite à l'épididyme, est presque droit jusqu'à sa terminaison, où il présente un renflement considérable avant de déboucher dans le vestibule commun.

C'est dans le compartiment médian du vestibule commun, en dehors des papilles urinaires, que débouchent les déférents spermatiques au sommet d'une papille sexuelle qui tient lieu de verge.

Ce compartiment ou loge médiane peut être considéré comme l'analogue de la vessie urinaire, chez les oiseaux qui sont dépourvus de cet organe.

La loge copulatrice tient lieu de col vésical et de canal urétro-sexuel.

C'est sur cette partie du vestibule commun que débouche la bourse de Fabricius.

Celle-ci est, au point de vue morphologique, anatomique et physiologique, l'analogue de la glande prostate des mammifères.

Chez le pigeon femelle, l'ovaire est impair, c'est celui du côté gauche qu'on trouve bien développé.

Les ovules contenus dans la glande ovigène sont en grand nombre et comme enchâssés dans le tissu fibreux de l'ovaire, qui leur sert d'enveloppe ou de calice.

Cette enveloppe se rompt sur un point déterminé, le stygma, pour laisser sortir l'œuf.

On trouve après la ponte, à la face interne du calice, une multitude de houppes villeuses éminemment vasculaires qui ont une grande ressemblance avec les villosités du chorion de la jument.

Cet appareil de sécrétion du calice fournit à l'ovule les matériaux nécessaires à son accroissement.

Dans tous les calices, quelque petits qu'ils soient, on trouve constamment deux sphères emboîtées l'une dans l'autre, contenant un liquide albumineux.

Ces deux sphères sont constituées, l'externe par la membrane vitelline, l'interne par la membrane germinative.

Les sphères vitelline et germinative ne prennent l'aspect jaunâtre que doit avoir l'œuf qu'au moment où les vésicules contenues dans l'albumine commencent à se remplir de globules.

Les vésicules sont antérieures à ce que l'on a nommé le noyau central du globule, et celui-ci n'existe pas avant la formation des vésicules germinative et vitelline, ainsi qu'on l'a dit à tort.

Le blastoderme des oiseaux ne s'étend pas au delà de la cicatricule vitelline, et c'est en ce point seulement que s'observe le phénomène de la segmentation.

Ce mouvement moléculaire d'une partie du jaune du vitellus ne commence pas chez les oiseaux aussitôt après la fécondation, mais bien quand l'œuf est soumis à l'incubation.

L'oviducte du pigeon est constitué par un conduit musculo-membraneux droit presque cylindrique. Son ouverture ovarienne, étroite, dirigée en dehors, n'a pas de pavillon; son ouverture cloacale débouche dans la loge médiane du vestibule commun, au côté externe de l'uretère gauche.

Il n'y a pas d'oviducte rudimentaire droit chez le pigeon.

Ce conduit constitue un organe de transmission; il est aussi un organe de sécrétion. Ces fonctions sont donc complexes.

Dans la loge copulatrice aboutit, comme chez le pigeon mâle, le conduit de la bourse de Fabricius.

Cette bourse glandulaire est entièrement analogue à celle du pigeon mâle.

Malgré la parfaite ressemblance de cet organe dans les deux sexes, on doit le considérer comme étant l'analogue de la prostate des mammifères, et conséquemment comme une dépendance de l'appareil urétro-sexuel.

§ V.

LÉZARD VERT.

Nous voici arrivés à la classe des reptiles, que le programme de l'Académie mentionne d'une manière toute particulière en indiquant, comme sujet des recherches, le lézard ou la couleuvre. Ces deux espèces faisant partie de groupes bien distincts, et présentant, à l'égard des organes génito-urinaires, des différences notables, j'ai cherché à donner une description exacte et détaillée de leur appareil reproducteur, tant chez le mâle que chez la femelle de ces animaux. Cette appréciation servira à faire connaître une fois de plus la dégradation que subissent les appareils reproducteurs et urinaires dans une même classe.

Le lézard, de l'ordre des sauriens, a de tout temps fixé l'attention des naturalistes ; mais c'est surtout au point de vue zoologique que les travaux les plus remarquables ont été entrepris. Les descriptions anatomiques de quelque valeur ne datent guère que du commencement de ce siècle, et encore ce sont plutôt des données générales que de véritables monographies.

On sait depuis longtemps que les diverses espèces du genre lézard sont ovipares et à fécondation interne ; toutefois, la *lacerta viviparia* pond des œufs d'où sortent presque aussitôt des petits vivants parfaitement développés. Cette particularité, qui semble tenir à une organisation spéciale de l'appareil reproducteur, ainsi que nous aurons occasion de le démontrer lorsqu'il sera question de la couleuvre à collier, ne nécessite pas des recherches particulières du genre *viviparia*.

Relativement à la distinction des sexes, les appareils reproducteurs externes ne sont d'aucun secours, bien que les organes génitaux et urinaires conservent une sorte d'indépendance que n'ont pas ces mêmes organes chez les oiseaux, par exemple. La seule différence zootomique qu'il y ait à l'extérieur, entre les lézards mâle et femelle, se trouve dans la forme de la queue, qui est aplatie à son origine, large et sillonnée longitudinalement par une espèce de gouttière chez le premier, et, au contraire, étroite et arrondie chez la seconde. Cela tient, à vrai dire, à la conformation et au volume des deux verges, qui sont logées dans la région caudale dont il s'agit. Des organes semblables, constituant les analogues du clitoris, mais bien moins développés, sont également placés dans la queue du lézard femelle; seulement leur présence ne se traduit pas au dehors par les mêmes signes que chez le mâle. A part donc cette différence de la queue, due à la présence des organes copulateurs, on ne saurait distinguer les sexes au dehors à l'aide des appareils reproducteurs. C'est ce qui ressortira, du reste, plus clairement encore de leur étude anatomique approfondie.

A. Chez le mâle du lézard vert, que j'ai préféré étudier parce qu'il est plus commun, on voit, quand on a ouvert l'abdomen et soulevé le paquet intestinal, les glandes spermagènes, la vessie et le rectum; à l'aide, ensuite, d'une dissection plus complète, on met à découvert les reins, les fourreaux sexuels et le cloaque (voy. pl. 9, fig. 1). L'appareil génito-urinaire ainsi dégagé présente les rapports suivants : la vessie occupe la région ventrale, les reins la région vertébrale; ces derniers organes sont placés l'un vis-à-vis de l'autre, et sont séparés seulement par le rectum. Les glandes spermagènes se trouvent bien en avant des reins, et c'est là une circonstance toute particulière qui se rencontre pour la première fois dans le cours de ce travail.

En effet, toujours chez les mammifères, c'est l'inverse qui a lieu, et, chez les oiseaux, c'est tout au plus si ces organes sont sur la même ligne. De cette inversion, qui établit que les glandes

spermagènes sont d'autant moins profondément situées dans le corps des animaux qu'on se rapproche le plus de l'homme, on peut en déduire qu'elle caractérise un degré d'infériorité ou de dégradation organique qui est en rapport avec la situation des testicules dans l'abdomen.

La position relative des deux glandes spermagènes est telle chez le lézard vert, que celle de droite est plus en avant que celle de gauche de toute la différence du testicule en longueur. Ces deux organes ont absolument le même volume; leur forme est ovoïde; elle représente assez exactement celle d'un gros grain de haricot dont la partie convexe est en rapport avec l'axe du corps de l'animal. Chaque glande (*a*) est fixée à la colonne vertébrale à l'aide d'un petit mésentère, qui s'étend depuis le renflement rectal jusqu'aux reins; c'est dans ce même mésentère (*b*), contenant une certaine quantité de tissu graisseux aux époques de la procréation, que se trouve logé le conduit spermatique. Avant de parler de sa disposition, de ses rapports et de sa terminaison, il n'est pas sans intérêt de rechercher quel est son mode d'origine; pour cela, il faut examiner avec soin la structure du testicule.

Cette glande, chez le lézard vert, est formée d'une enveloppe mince et résistante, la membrane albuginée et de conduits séminifères que l'on aperçoit, par transparence, au travers de cette membrane; les prolongements que l'albuginée envoie dans la substance de la glande spermagène sont très-ténus, et destinés à servir de charpente, pour ainsi dire, aux vaisseaux sanguins. Quant aux tubes séminifères, ils sont disposés de manière à représenter les circonvolutions cérébrales; ils prennent tous naissance à la périphérie du testicule, s'anastomosent plusieurs fois entre eux dans leur parcours, et vont aboutir dans une petite loge à parois excessivement minces et très-difficiles à constater, que l'on peut regarder comme l'analogue du corps d'Hygmore. Cette excavation, ou plutôt cette cellule, qu'on réussit quelquefois à mettre en évidence en pratiquant une coupe longitudinale sur le testicule (voy. fig. 2, *a'*), correspond au centre de l'échancrure qui existe sur le bord

externe de la glande spermagène. En ce point, on voit se détacher du testicule deux ou trois petits tubes, rarement plus, qui, après un trajet très-court, se réunissent en un seul conduit. C'est là que commence l'épididyme. Aussitôt après son origine, il se replie sur lui-même en zigzag, se dirige en avant, dépasse la glande spermagène de deux centimètres environ, puis se coude sur lui-même, continue à décrire des sinuosités, et quand il est arrivé au niveau de l'échancrure du testicule, son calibre augmente un peu et parcourt, toujours en se repliant sur lui-même, un trajet d'environ deux centimètres et demi. Quand il est arrivé à la hauteur du rein, il cesse d'être coudé sur lui-même, prend la dénomination de déférent, se place dans l'échancrure que présente la face inférieure du rein, longe ainsi le côté interne du conduit de l'urine, l'uretère, et y débouche après s'être sensiblement renflé (voy. fig. 2, *c*). A partir de cette jonction, les conduits spermatique et urinaire constituent un canal commun, ou urétro-sexuel, très-court, qui traverse les parois du cloaque, et va déboucher au sommet d'une papille, longue d'environ un millimètre et demi. Dans tout le trajet du spermiducte, on trouve, à l'époque où les lézards sont aptes à la reproduction, vers le mois d'avril ou de mai, des spermatozoïdes qui semblent d'autant plus développés, qu'ils sont logés plus avant dans le conduit. La petite ampoule fusiforme, qui tient lieu de vésicule séminale, contient surtout des spermatozoïdes très-agiles, et en grand nombre, qu'on n'aperçoit bien au microscope qu'après qu'ils ont été délayés dans une gouttelette d'urine provenant de la vessie du lézard.

J'ai dit tout à l'heure, en parlant du conduit urétro-sexuel, qu'il débouche dans le cloaque, dernière partie des voies urinaires et génitales. Or cette région excrémentitielle mérite d'être étudiée avec soin au point de vue anatomique et physiologique surtout, afin de bien faire ressortir ses analogies et ses différences avec le cloaque des oiseaux en particulier.

Lorsqu'on enlève avec soin la membrane péritonéale et le tissu

cellulaire qui recouvrent le renflement rectal (voy. fig. 2, *d*), on arrive sur le plan musculaire de l'intestin. En cherchant alors à suivre, le scalpel à la main, les fibres charnues, on voit clairement que celles qui sont le plus superficielles, et qui sont dirigées dans le sens longitudinal, se bifurquent à l'endroit où le col vésical s'insère au cloaque. En ce point, les faisceaux des fibres musculaires rectales se confondent avec celles qui proviennent de la vessie, et s'étendent jusqu'à la fente anale ou sphincter externe; quelques fibres de l'intestin se replient au point de jonction de la vessie, et se confondent avec celles de cet organe. Au-dessous de ce premier plan charnu, on en trouve un autre qui se sépare de celui-ci, et qui se termine à l'orifice du rectum (*e*, fig. 1, 2, 3, 4), qu'on aperçoit en saillie dans le cloaque. Enfin, après ce second plan musculaire, il en existe un troisième dont les fibres sont transversales par rapport aux premières : ce sont elles (*g*, fig. 4) qui constituent le bourrelet rectal ou le sphincter interne. D'après cela, l'intestin se termine, en réalité, sur ce point, qui retient à volonté les excréments, tandis que la vessie, au contraire, qui reçoit quelques fibres musculaires du rectum, constitue les parois du cloaque. C'est donc, à vrai dire, le rectum qui débouche dans le col vésical en perforant la paroi supérieure de l'organe urinaire. Ensuite la membrane muqueuse de la vessie et celle du rectum s'unissent et se confondent pour tapisser la cavité du vestibule commun. Un autre point important à considérer ici, c'est que les papilles urétro-sexuelles sont placées en arrière de l'orifice rectal, et, par conséquent, dans une cavité qui représente la vessie urinaire, fait des plus intéressants, au point de vue de l'analogie qu'on peut établir entre le vestibule commun des oiseaux et celui des reptiles sauriens. Enfin, on trouve au delà des papilles urétro-sexuelles, dans l'épaisseur du sphincter anal et de chaque côté de la ligne médiane, un orifice large et infundibuliforme; ces orifices conduisent dans les fourreaux musculaires des deux verges des lézards. Chaque organe copulateur se présente sous une forme allongée, très-effilée en arrière (voy. fig. 1

et 2, *g*, *g*), bifide en avant, et canaliculée pour pouvoir transmettre la liqueur fécondante. La face interne des sacs copulateurs est tapissée d'un épiderme corné analogue à celui qu'on rencontre sur les organes génitaux des serpents. Au moment de l'acte reproducteur, les deux verges sortent de leur fourreau à la manière d'un doigt de gant qui serait renversé; après quoi elles rentrent entièrement sans laisser la moindre trace de leur présence. Tous ces mouvements s'exécutent à l'aide de muscles nombreux qu'il serait trop long d'énumérer ici, et dont la connaissance ne jetterait aucune lumière sur la question proposée par l'Académie. Ce qu'il importe seulement de connaître, c'est que la verge ou les verges des lézards sont des organes musculaires presque dépourvus de tissu érectile, dont l'allongement ou le raccourcissement tient à l'action des muscles, plutôt qu'à l'accumulation du sang dans de véritables corps caverneux.

B. Chez la femelle du lézard, l'appareil reproducteur présente la disposition suivante. Les deux glandes ovigènes placées l'une à droite, l'autre à gauche de la colonne vertébrale, la première plus en avant dans l'abdomen que la seconde, et rappelant ainsi la disposition des glandes spermagènes, sont sur un premier plan dans l'abdomen au-dessus des intestins. Elles sont en rapport supérieurement avec les vertèbres, inférieurement avec le rectum, et sur les côtés avec les oviductes. Ceux-ci se présentent sous la forme de deux longs tubes aplatis et plissés transversalement. Ils se dirigent en arrière, convergent l'un vers l'autre jusqu'au contact, et quand ils sont arrivés sur la paroi supérieure du vestibule commun, ils la traversent à l'endroit correspondant à celui où les déférents pénètrent dans le cloaque chez le mâle. Indépendamment de ces organes essentiels de l'appareil reproducteur femelle, on trouve sur un dernier plan, qui correspond aux parois abdominales, la vessie urinaire. Ce réservoir, quoique très-grand, contient fort peu de liquide au moment où l'on sacrifie le petit animal, ou après sa mort naturelle; mais quand on ouvre rapidement la cavité abdominale, on voit que la vessie contient une no-

table quantité d'urine. Ce liquide, du reste, s'échappe avec la plus grande facilité de son réservoir naturel pour se porter dans la cavité du vestibule commun, où il est plus fréquent de le rencontrer. Quant aux reins, qui, d'après leur volume, doivent sécréter une assez grande quantité d'urine, ils sont situés, comme chez le lézard mâle, au-dessus du vestibule commun et logés en partie dans l'épaisseur de la queue. Il résulte de là la même inversion, par rapport aux glandes ovigènes, que celle qui existe chez le mâle du lézard entre les testicules et les reins; et de plus, de ce même fait, de l'extrême rapprochement des reins du vestibule commun, la brièveté excessive de l'uretère. C'est à peine, en effet, si ce conduit se détache du rein, que déjà il débouche dans le cloaque sur un point parfaitement correspondant dans les deux sexes. Ici, comme chez le lézard mâle, il n'y a qu'une seule ouverture, un orifice commun des conduits sexuel et urinaire qui aboutit dans le vestibule génito-excrémentitiel, mais avec cette différence, toutefois, que l'ouverture n'est pas placée au sommet d'une papille érectile; elle se trouve en arrière du sphincter anal, au centre de replis muqueux peu saillants (*d*, fig. 5). J'insiste sur ce point parce que la fusion des organes génito-urinaire chez les animaux dépourvus de glandes prostates a une importance physiologique incontestable qui se rattache au mode de propagation. Je reviens actuellement à l'examen particulier de chaque organe de l'appareil reproducteur. Les glandes ovigènes dans le lézard vert constituent deux masses assez volumineuses, de même grosseur à peu près, et disposées en grappe comme l'ovaire des oiseaux. Cette apparence vient du développement plus ou moins grand des ovules ou de leur degré de maturité. Étudié chez d'autres espèces de lézards, l'ovaire présente au centre une petite cavité, une sorte de bourse à parois minces et granulées. C'est dans l'épaisseur même de ces parois que se trouvent les granulations ovigènes, composées de la sphère germinative et de la sphère vitelline. Un certain nombre de ces ovules grossissent à l'époque de la ponte, pendant que les autres restent à l'état rudi-

mentaire. On voit souvent alors tout autour d'un œuf très-développé une infinité de petits ovules transparents (fig. 6, 7, 8), dont l'aspect contraste singulièrement avec celui ou ceux qui sont déjà jaunes. Les premiers contiennent un liquide albumineux, les seconds la substance vitelline. A mesure que l'ovule grossit, il se détache de plus en plus de la membrane formatrice ou du stroma de l'ovaire, au point de devenir pédiculé comme celui de la poule. On voit très-bien, à cette époque, que l'œuf est libre dans ses enveloppes, que la substance fibreuse et vasculaire du tissu ovarien constitue autour de lui une sorte de cellule dont les parois sont renforcées par le péritoine qui la recouvre. Cette loge ovarienne, qui préside au développement de l'ovule à l'aide de vaisseaux sanguins qu'elle reçoit de la glande spermagène, constitue le calice ou l'analogue de la vésicule de Graaf. Au moment de la déhiscence, la membrane fibro-vasculaire et la membrane péritonéale se déchirent pour donner passage à l'œuf. Cette déhiscence, qui s'effectue de la même manière chez le lézard vert que chez la poule, doit, dans d'autres espèces, offrir une cavité ovarienne, passer d'abord dans cette cavité, d'où il sortira après avoir déterminé une nouvelle déchirure au sac ovarien. C'est le même fait qui se reproduit d'une manière plus évidente sur d'autres reptiles. Quoi qu'il en soit, ce qu'il importe de savoir ici, c'est que l'ovaire chez les lézards fournit à l'ovule une loge nutritive dans laquelle il n'y a que l'œuf, et que cette loge ou calice est, comme chez les oiseaux, très-exactement moulée sur le produit qu'elle renferme, et cela à toutes les époques de l'ovulation.

J'arrive actuellement à l'étude de l'oviducte qui, comme je l'ai déjà dit, est double chez le lézard. Chacun de ces conduits se trouve renfermé dans un large mésentère admirablement disposé pour recevoir le canal oviducte, contenir les vaisseaux sanguins et lymphatiques, et pour le passage de l'œuf dans la trompe. Cette toile membraneuse, en effet, formée de l'adossement du feuillet péritonéal, et fixée, en avant, sur la colonne vertébrale, sur les côtés, aux poumons, tient tout l'oviducte ramassé sur lui-

même, permet des mouvements sur son axe, donne aux vaisseaux sanguins la facilité de se distribuer dans ses parois, et préside à l'écartement et au resserrement du pavillon de la trompe. Celui-ci est on ne peut pas plus développé chez le lézard vert (voy. fig. 5 à 8); son ouverture, disposée en forme de boutonnière et dirigée en dehors de l'ovaire, a beaucoup d'analogie avec le pavillon de la trompe des oiseaux. On trouve dans ses parois, fines et très-vasculaires, des couches de fibres musculaires qui se croisent à angle droit et qui se prêtent à l'adaptation exacte de ces parties sur l'ovaire. La muqueuse du pavillon est garnie d'un épithélium vibratile et disposée en larges plis longitudinaux qui s'arrêtent à une petite profondeur, de manière à former une ligne de démarcation bien tranchée. Après le pavillon, le conduit oviducte décrit deux ou trois courbures, se fronce transversalement à l'aide de plis réguliers, et se porte en arrière vers le cloaque, où il rencontre son congénère. Dans tout ce trajet, l'oviducte n'a presque pas diminué de calibre. Lorsqu'on coupe le mésentère qui le bride, en quelque sorte, on obtient une longueur double et même triple de son parcours. Ces organes conducteurs et éducateurs en même temps des produits ovariens sont formés d'une membrane péritonéale, d'un premier plan musculaire transversal, d'un second plan musculaire longitudinal et d'une membrane muqueuse composée d'éléments glanduleux. L'affrontement et la fusion des oviductes entre eux méritent d'être décrits avec soin. Ils s'effectuent sur le plan supérieur du vestibule commun, entre le rectum et les reins. En ce point, les deux oviductes représentent un V. Cette disposition ne peut être aperçue qu'en rejetant de côté les reins (voy. fig. 7). Au sommet de l'angle que forment les deux oviductes, existe une petite échancrure (*f*, fig. 7) par où passent les uretères. Lorsqu'on enlève la membrane péritonéale, on voit que les fibres musculaires se portent des oviductes au vestibule commun, et c'est de cette fusion que se compose la paroi supérieure et terminale de cette loge. La paroi inférieure résulte plus spécialement de la continuation des fibres

musculaires de la vessie. Examiné à l'intérieur, le vestibule commun présente les particularités suivantes : sa cavité est au moins aussi spacieuse que celle du vestibule chez le lézard mâle. Elle est limitée, en avant, par le sphincter rectal; en arrière, par la fente transversale qui donne issue aux produits génito-excrémentitiels. Du bord libre du rectum part une cloison longitudinale médiane incomplète, qui divise en deux compartiments la cavité vestibulaire (*f*, fig. 5). De chaque côté de cette cloison se trouve, sur la paroi supérieure du vestibule et en arrière du bourrelet anal, une large ouverture, celle de l'oviducte. Sur la paroi externe et à l'entrée de chaque oviducte existe un très-petit orifice, c'est celui de l'uretère. En avant, et toujours dans la cavité du vestibule commun, on aperçoit une ouverture étroite et plissée à la manière d'une bourse qui serait fermée : elle aboutit dans la vessie. Avant d'arriver au réservoir de l'urine on a à parcourir un trajet étroit, long d'environ deux millimètres, qui constitue un véritable col de la vessie. Enfin, dans la partie la plus reculée du vestibule commun, il y a à droite et à gauche, sur la voûte vestibulaire et tout à fait à son entrée, une dépression infundibuliforme qui, à la dimension près, constitue le sac ou fourreau sexuel de la verge chez le mâle. Ainsi au fond du vestibule génito-excrémentitiel du lézard femelle se trouve l'orifice anal (*d*, fig. 5), disposé absolument comme celui du lézard mâle, et en arrière de ce bourrelet les orifices des oviductes et ceux des uretères. Les conduits génitaux et urinaires aboutissent donc ici comme chez le mâle sur un point du vestibule commun qui est tout à fait correspondant, mais avec cette seule différence qu'il n'existe pas chez la femelle de papille sexuelle. En retranchant par la pensée cette partie chez le mâle, on aurait, en plus petit, le plan exact de ce qui est chez la femelle. C'est donc un rudiment de conduit urétro-sexuel qui manquerait chez celle-ci. Mais ce canal existe par le fait, car les gouttières qui se trouvent sur la voûte vestibulaire, et qui sont dues à la présence de la cloison dont j'ai parlé plus haut, constituent au

moins deux demi-canaux urétro-sexuels, lesquels se trouvent convertis en canaux complets au moment où le plancher du vestibule s'applique sur la cloison à l'aide des muscles qui le font agir. Au surplus, la cloison en question n'étant autre chose qu'un raffé, une véritable soudure médiane des parois des oviductes, ainsi qu'on peut le démontrer anatomiquement, il est évident que les gouttières vestibulaires en sont une dépendance, d'où il suit qu'elles constituent les analogues des conduits urétro-sexuels du mâle. Le col vésical ensuite, qui vient s'ouvrir sur le plancher du vestibule commun et sur la ligne médiane, est une démonstration de plus pour établir que la région vestibulaire appartient plutôt aux voies génitales et urinaires qu'au rectum. Toutes les parties du vestibule génito-excrémentitiel que je viens de décrire, sont mises en jeu par des muscles propres et tapissées d'une membrane muqueuse, fortement plissée à l'entrée des conduits rectal-urinaire et génital.

En résumé :

L'appareil reproducteur des lézards mâle et femelle est entièrement caché dans la cavité ventrale et sous les téguments; il ne permet pas de reconnaître les sexes au dehors. Toutefois la présence des verges dans la racine de la queue donne à cette partie du corps une conformation particulière qu'on distingue aisément.

Les glandes spermagènes sont placées bien en avant des reins, dans la cavité abdominale, et cette inversion, par rapport aux mammifères, établit un degré d'infériorité du plan organique des vertébrés.

Le volume des glandes spermagènes est absolument le même; seulement celui de droite est situé plus en avant dans la cavité abdominale que celui de gauche.

Leur structure est assez comparable à celle des mammifères : ce sont des tubes séminifères enroulés sur eux-mêmes et anastomosés entre eux, qui vont aboutir tous à un petit réservoir commun ou corps d'Hygmore.

L'épididyme du lézard naît de ce réservoir par trois ou quatre tubes; il est très-développé, et se constitue en canal déférent qui

débouche, après s'être renflé notablement, dans l'uretère. Le tronc commun qui en résulte, et qui constitue un conduit urétro-sexuel, s'ouvre au sommet d'une papille placée au fond du vestibule génito-excrémentitiel et en arrière du bourrelet rectal.

La structure anatomique du vestibule permet de considérer cette loge commune comme étant une dépendance des voies urinaires, dans laquelle va s'ouvrir le rectum.

Les deux verges des lézards sont constituées par des parties charnues; elles ne contiennent presque pas de tissu érectile et sont renfermées dans deux fourreaux à parois musculaires.

La structure des glandes ovigènes du lézard vert a beaucoup d'analogie avec celle des oiseaux.

Des deux glandes ovigènes égales en volume, c'est la droite aussi qui est située plus en avant dans la cavité abdominale.

Les ovules qu'on rencontre dans leurs parois sont composés des sphères germinative et vitelline emboîtées l'une dans l'autre.

Le stroma de l'ovaire fournit, avec le péritoine, une enveloppe à l'œuf qui lui est juxtaposé.

Cette loge nutritive de l'œuf est le calice ou l'analogue de la vésicule de Graaf et se comporte comme elle à l'époque de la déhiscence.

Les oviductes, très-évasés en avant, pour constituer le pavillon, ont un calibre bien plus petit au moment où ils débouchent dans le vestibule génito-excrémentitiel, en arrière de l'embouchure du rectum.

Avant de perforer la paroi supérieure du vestibule, ils reçoivent les uretères, et leur orifice commun se trouve au centre de nombreux plis de la muqueuse. Il résulte de là qu'il n'y a point de papille conductrice comme chez le mâle, et par cela même le canal urétro-sexuel, que celle-ci représente, semble ne pas exister.

Ce conduit, toutefois, est formé par une gouttière vestibulaire qui se complète en un canal véritable, à l'aide d'une cloison médiane du vestibule et de l'action musculaire de cette loge commune.

La vessie débouche sur le plancher du vestibule génito-excré-

mentitiel, ce qui lui permet de recevoir l'urine qui vient d'en haut.

Le vestibule génito-excrémentitiel du lézard femelle est, comme celui du mâle, plutôt une dépendance des voies génitales et urinaires qu'une prolongation du rectum.

§ VI.

COULEUVRE À COLLIER.

J'ai déjà dit, au commencement du paragraphe précédent, que la différence qui existe entre les appareils génito-urinaires des sauriens et ceux des ophidiens m'avait déterminé à étudier les organes reproducteurs et urinaires dans ces deux ordres de reptiles, bien que le programme de l'Académie n'en ait indiqué qu'un seul au choix des concurrents. J'ajouterai ici que le principal motif qui m'a engagé à faire cette double étude, c'est celui de bien préciser, chez la couleuvre en particulier, le mode de connexion des appareils reproducteur et urinaire entre eux. Il règne à cet égard, dans les traités spéciaux d'anatomie comparée, un vague et un laconisme tels, qu'on ne saurait tirer aucun parti de ces descriptions, surtout au point de vue de mon travail. Dans les ophidiens, est-il dit, l'insertion des deux canaux déférents a lieu dans une papille qui a été décrite improprement comme une verge, et ces deux canaux se terminent toujours dans le cloaque, à sa paroi supérieure, *en dehors ou au-dessus des uretères*. Ceci veut dire, si je ne me trompe, que les conduits déférents et les uretères débouchent séparément dans le cloaque. Or c'est là un fait anatomique que mes recherches infirment entièrement, ainsi que je l'établirai plus loin, et qui a été souvent reproduit comme étant une chose exacte. Les lézards également n'auraient point de papilles dans le cloaque, et les conduits de l'urine et ceux du sperme y déboucheraient séparément. Ce sont là encore des données inexactes, que j'ai réfutées dans le paragraphe précédent. Il y a, au contraire, d'après ce que j'ai constaté, conformité très-grande entre

le mode de terminaison des appareils génito-urinaires des sauriens et ceux des ophidiens, et cette uniformité de plan se rapporte plus particulièrement à la fusion des conduits urinaire et spermatique. C'est ce même fait qui, en se généralisant, tend à établir, à l'égard du mode de propagation des vertébrés, un principe physiologique constant que j'exposerai plus au long dans la deuxième partie de ce travail.

Relativement à la détermination des sexes, il est impossible, au dehors et à l'aide des organes reproducteurs seulement, de distinguer le mâle d'avec la femelle[1]. On ne saurait même tirer aucun parti, à cet égard, de la disposition du vestibule génito-excrémentitiel, que l'œil peut aisément interroger par la fente cloacale ou vestibulaire. Cette inspection, en effet, ne laisse apercevoir que des organes qui ont entre eux la plus grande ressemblance, une papille urétro-sexuelle située très-en arrière tant chez le mâle que chez la femelle, puis l'entrée du gros intestin, qui est en avant de ces papilles. Il y a également dans l'un et l'autre sexe deux dépressions infundibuliformes situées à l'entrée du vestibule commun, et toutes ces similitudes laissent du doute dans la détermination des sexes. Il n'en est plus de même quand on interroge les organes génitaux qui sont placés dans l'abdomen : alors la différence est des plus tranchées; les testicules d'une part et les ovaires de l'autre sont tellement dissemblables, qu'il ne saurait y avoir méprise. Les spermiductes et les oviductes également

[1] Cette difficulté n'existe pas pendant toute la durée de la vie fœtale. Alors, en effet, les deux verges bifides du mâle sont placées en dehors de la fente cloacale. Elles ont une coloration toute particulière provenant de la turgescence des vaisseaux qui rampent à sa surface, et qu'on distingue aisément à l'œil nu. On dirait, à voir ces organes dans le premier âge de la vie, qu'il y a érection génitale, ampleur démesurée des petites verges comme au moment du coït. Ce singulier phénomène n'est point seulement départi aux organes de l'appareil reproducteur mâle, il se répète d'une manière tout à fait semblable pour le clitoris; mais comme ici l'analogue de la verge est à l'état rudimentaire, il est toujours facile de distinguer les sexes. Singularité des plus grandes qui contraste d'une manière frappante avec ce qui se passe chez les mammifères, par exemple, où les organes copulateurs sont développés en raison directe de l'âge!

sont si différents entre eux, qu'à la seule inspection de ces organes il est facile de se prononcer sur la nature des sexes.

A. Chez la couleuvre mâle, les glandes spermagènes sont situées très-profondément dans la cavité abdominale, celle de droite plus en avant que celle de gauche de toute la différence en longueur d'un testicule. La forme de ces glandes est très-allongée, et cette disposition se trouve évidemment en harmonie avec l'ensemble de l'organisation de la couleuvre. Déjà chez les sauriens, qui ont un corps allongé, on commence à constater la forme oblongue des testicules, disposition bien autrement exagérée chez les ophidiens, et tout à fait caractéristique des animaux de ce genre. Ces organes, du reste, ne sont pas les seuls qui gagnent en longueur ce qu'ils perdent en largeur ou en épaisseur, les reins, le foie, le poumon, sont dans le même cas, et tous dénotent une organisation d'un autre ordre que celle des vertébrés supérieurs. Les rapports des glandes spermagènes avec les autres organes abdominaux et en particulier avec les reins, sont les mêmes que chez le lézard, c'est-à-dire qu'ils sont placés l'un à droite, l'autre à gauche de l'intestin, et bien en avant des reins correspondants. Cette inversion, eu égard à ce qui existe chez les mammifères, est encore un fait dont la généralisation dans chaque ordre de vertébrés a une signification qui sera examinée plus tard. La situation respective des reins est absolument la même que celle des testicules entre eux, le droit est bien plus en avant dans la cavité abdominale que le gauche, aussi les glandes spermagènes sont-elles échelonnées de la manière suivante : le testicule droit d'abord, puis le gauche, après vient le rein droit, et enfin le gauche. Sans cette gradation des organes, l'abdomen n'aurait pas la forme cylindrique ni le peu d'étendue en largeur qu'on lui connaît. Du reste, chez les reptiles de l'ordre ophidien, surtout, la symétrie des organes pairs n'est plus la règle, et les appareils reproducteurs mâle et femelle sont asymétriquement disposés. Les glandes spermagènes sont maintenues en place par des prolongements du péritoine qui se fixent sur les côtés de la colonne vertébrale;

cette membrane les recouvre de toutes parts, et se porte sur le conduit déférent, en formant une espèce de mésentère dans lequel rampent les vaisseaux sanguins des testicules et du spermiducte. Au-dessous de cette première tunique, le testicule est limité par sa membrane propre, l'albuginée, qui est assez épaisse et résistante. Lorsqu'on parvient à la détacher des tubes spermagènes, on voit que ceux-ci sont enroulés sur eux-mêmes et pelotonnés à la manière des glandes spermagènes des lézards. On trouve par-ci par-là, en les déroulant, des anastomoses qui font communiquer tous les tubes spermagènes entre eux. L'origine de ces tubes est constituée par un conduit borgne dont le calibre n'est ni diminué ni augmenté en ce point. On ne trouve pas ensuite dans la glande spermagène un véritable corps d'Hygmore; mais on voit que les petits tubes de la glande séminale communiquent à l'aide de deux ou trois conduits dans la portion du déférent sinueux et replié qui constitue l'épididyme. Ces conduits n'aboutissent pas sur un même point du déférent; ils sont à une distance de trois ou quatre millimètres les uns des autres (planche 10, fig. 1 *b'*) et placés vers l'extrémité antérieure du testicule. L'épididyme de la couleuvre est bien moins développé que celui du lézard, et c'est tout au plus s'il est distinct de la portion de ce conduit qu'on désigne sous le nom de canal déférent. Il dépasse à peine la glande spermagène, se replie bientôt sur lui-même, se place le long du bord interne du testicule, et chemine ensuite vers le cloaque, en passant devant les reins. Dans ce parcours, il décrit des sinuosités très-rapprochées les unes des autres, conserve le même calibre dans toute son étendue, et un peu avant sa terminaison il cesse d'être coudé sur lui-même. C'est surtout à partir de ce point que le spermiducte s'effile considérablement avant de pénétrer dans la papille cloacale. Il est essentiel actuellement de bien fixer le mode de terminaison de ce conduit. Pour y parvenir d'une manière certaine, il faut d'abord injecter l'uretère et le canal déférent. Alors on constate très-positivement que le spermiducte pénètre dans une petite am-

poule ou renflement ovoïde qui se trouve au-dessus du rectum et de chaque côté de la ligne médiane. Ce renflement (*d*, fig. 2), de forme olivaire, long d'environ un centimètre, se continue avec l'uretère, d'une part, et va se terminer de l'autre au sommet d'une papille qui est implantée sur la paroi supérieure du vestibule génito-excrémentitiel. Pour bien examiner la cavité de cette sorte d'ampoule urétro-sexuelle, il faut l'inciser sur sa paroi supérieure qui correspond au rachis. Dans ce cas, et après avoir enlevé la matière à injection qui s'y est accumulée, on voit : 1° que l'uretère débouche dans la partie antérieure du renflement, à l'extrémité d'un petit tube très-fin qui est placé dans l'épaisseur de la paroi supérieure de cette ampoule olivaire; 2° que le conduit déférent débouche également dans cette cavité, mais bien plus en arrière (voy. fig. 2, *n*) et sur la même paroi qu'il laboure, en quelque sorte. La couleur de l'injection, qui n'est pas la même pour les deux ordres de conduits, permet de déterminer rigoureusement celui qui appartient à l'uretère et celui qui provient du déférent. De plus, la saillie que présentent ces petits conduits dans la cavité olivaire en question montre qu'il y a, entre elle et les dernières portions des conduits urétro-sexuels, une sorte d'indépendance anatomique, d'où doit résulter une double fonctionnalité : pour résoudre cette question, il faut examiner l'ampoule olivaire à l'époque du rut. Lorsqu'on a injecté tout le système artériel et tout le système veineux de la couleuvre, on voit une multitude de petits vaisseaux sanguins ramper à la surface de l'ampoule olivaire. Cette vascularité s'observe pareillement sur les conduits urinaires et déférents; mais à un degré moindre. Quand on a incisé les parois de cette ampoule, on trouve qu'il y a une quantité infinie de vaisseaux capillaires dans leur épaisseur, et que ses parois sont composées d'un tissu fibreux très-riche en vaisseaux sanguins. Ce même tissu, examiné au microscope et à des grossissements variables, laisse apercevoir une foule de petits cylindres, légèrement saillants à la surface de la paroi où a porté la section. En pressant entre deux lames de verre cette partie

renflée, on en fait sortir toute la matière à injection qui se trouvait dans les vaisseaux, et de cette manière, on voit, après un lavage convenable, les conduits vasculaires le plus nettement possible. Il résulte de cet examen que les parois de l'ampoule olivaire sont composées du péritoine en dehors, d'un tissu fibreux très-résistant et très-vasculaire en dedans, et de plus, à la face interne, d'une membrane muqueuse qui se continue avec celles du cloaque et du conduit urétro-sexuel. On peut établir d'après cela que le tissu prédominant des parois en question est érectile. C'est aussi ce tissu qui constitue la papille cloacale et qui se rencontre encore, mais à un degré moindre de développement, sur les conduits urinaires et spermatiques. La conséquence de tout cela, c'est que les vésicules ou ampoules olivaires sont susceptibles d'éprouver une assez grande distension et surtout de se contracter fortement sous l'influence du système nerveux. Mais dans quel but? C'est là le point qu'il convient actuellement de résoudre. S'agit-il en effet d'un réservoir urinaire, d'un réservoir séminal ou d'un réservoir mixte? Dans la première supposition, l'uretère aboutirait seul dans le réservoir en question; la même chose aurait lieu, s'il s'agissait d'une vésicule séminale, ce serait le spermiducte qui y arriverait. Mais ici l'urine et le sperme peuvent s'y accumuler, puisque les déférents et les uretères s'y rendent également. On peut en acquérir la preuve certaine en examinant le contenu des vésicules olivaires à l'époque du rut et lorsque les couleuvres sont aptes à la reproduction. Alors on les trouve remplies d'une innombrable quantité de spermatozoïdes très-développés et d'une agilité extrême, nageant, pour ainsi dire, dans l'urine, qu'ils rendent comme lactescente par leur présence. Mais à l'époque où les couleuvres ne sont plus aptes à se reproduire, on n'y rencontre plus de spermatozoïdes; l'urine seule s'y accumule, et elle est alors transparente. Ainsi l'urine et le sperme peuvent s'arrêter dans ce réservoir, qui est à parois fibro-érectiles, et qui se termine par un petit mamelon perforé lui-même et de

texture érectile. D'après cela, le renflement olivaire est, tant par sa nature que par ses fonctions, un organe comparable au canal de l'urètre des mammifères, ou pour mieux dire l'analogue, fonctionnellement parlant, du conduit urétro-sexuel, lequel dérive ici plus particulièrement de l'uretère que du déférent. Cette ampoule olivaire ou renflement urétro-sexuel, fort remarquable, émet simultanément le fluide séminal et l'urine, bien que, par sa disposition anatomique, ces deux fonctions puissent avoir lieu l'une après l'autre, comme chez les mammifères. La présence des spermatozoïdes dans le renflement urétro-sexuel entraîne donc forcément son mélange avec l'urine, et leur sortie simultanée, quand le réservoir est rempli de produits sécrétés par les testicules et les reins. Il résulterait de ce fait que, pendant toute la saison des amours, les couleuvres émettent constamment de l'urine chargée de spermatozoïdes. C'est ce qui a lieu précisément, puisqu'il y a de l'urine laiteuse partout dans le cloaque, et même jusque dans les fourreaux sexuels, qui en sont quelquefois remplis. Quoi qu'il en soit de ces fonctions complexes de chaque renflement urétro-sexuel, toujours est-il qu'après s'être aminci tout à coup considérablement, il va déboucher dans le vestibule génito-excrémentitiel, formé des fibres musculaires rectales, à l'aide d'une petite ouverture qui se trouve au sommet de la papille érectile, à côté de sa sa congénère. Celle-ci est dirigée en arrière (*e*, fig. 1 et 3) et elle est protégée par une sorte de cloison que la muqueuse cloacale forme à sa base (*m*, fig. 1). C'est surtout pendant l'acte de la défécation que ces parties sont abritées convenablement par le repli muqueux. Le cul-de-sac qu'il constitue sur la ligne médiane est en rapport en avant avec le sphincter anal, et en arrière avec un sillon qui se bifurque bientôt (fig. 3, *g'*) pour aboutir de chaque côté vers l'orifice cloacal, où se trouve l'embouchure des fourreaux sexuels. Quand les verges sont dehors, on reconnaît que le sillon qui part de chaque côté de la papille se continue avec celui de l'organe copulateur (fig. 3, *g'*). Pour bien étudier cet organe chez la couleuvre, il faut préalablement injecter tout

le système vasculaire de l'animal, puis inciser le fourreau sexuel, sur sa paroi inférieure, d'un bout à l'autre (voy. fig. 3). Les choses étant ainsi disposées, on voit que le sillon cloacal, de chaque côté, se continue dans la verge bifide, que cette verge est entièrement creuse, qu'elle est toute tapissée de prolongements en forme d'épines, que ceux-ci sont dirigés d'arrière en avant, et que les parois de ces sacs copulateurs sont épaisses et parsemées d'une innombrable quantité de petits vaisseaux. Plusieurs muscles, sphincter rétracteur et constricteur, président aux fonctions des organes génitaux; mais à part ces muscles, qui ne font pas essentiellement partie de la verge, il y en a d'autres qui entrent dans sa texture propre et qu'il importe de décrire avec soin, dans le but d'établir l'analogie qu'il peut y avoir entre la verge des reptiles et celle des mammifères. En parlant tout à l'heure des parois du sac copulateur de la couleuvre, je disais qu'elles contiennent un grand nombre de vaisseaux, et quand on les examine à un fort grossissement, on voit qu'elles se composent de tissu fibreux très-serré, d'artérioles, de veinules et d'une couche très-mince de tissu cellulaire sous-muqueux. Tous les vaisseaux serpentent dans plusieurs sens et ont évidemment des parois propres, indépendantes de la couche fibreuse qui les enveloppe de toutes parts. Des faisceaux, composés de fibres très-fines, se portent dans les prolongements cornés, terminés en pointe dans la cavité de la verge et représentant d'une manière incomplète, il est vrai, les cloisons fibreuses du pénis des mammifères. Il y a également des vaisseaux très-ténus qui y aboutissent et que l'on voit bien difficilement quand l'injection vasculaire n'a pas bien réussi. Cette circonstance de la présence des vaisseaux dans les faisceaux de fibres musculaires établit encore plus l'analogie de composition et de structure dont je parle. La plus grande partie ensuite du tissu fibreux se répand à la surface de chaque verge et forme ainsi, au-dessous du péritoine, une sorte de cuirasse susceptible d'éréthisme. En supposant ces organes réunis sur la ligne médiane et soudés

entre eux, on aurait constitué un pénis analogue à celui des mammifères supérieurs, sauf que la cavité de chaque moitié de l'organe copulateur serait plus prononcée ici, précisément à cause du cloisonnement incomplet des corps caverneux, ou de l'arrêt de développement des faisceaux musculaires à sommets libres. D'après ce qui précède, on pourrait peut-être attribuer l'érection des deux pénis de la couleuvre à l'état fœtal, à l'asphyxie des petits êtres quand on sacrifie la mère, asphyxie qui, en déterminant la congestion veineuse, produit la turgescence de ces parties. Bien que je n'attache pas une grande importance à cette explication, je dois dire cependant que Koelliker, qui a beaucoup étudié la structure de la verge chez les mammifères, et qui attribue l'érection au relâchement des innombrables muscles qui entrent dans sa composition, ne s'éloignerait pas beaucoup de cette manière de voir. En effet, si c'est le relâchement des muscles intrinsèques de la verge qui facilite l'afflux du sang artériel et la contractilité de ces mêmes organes qui empêchent le reflux du sang veineux, d'où proviendrait l'éréthisme, il est évident que c'est toujours la gêne de la circulation qui préside au phénomène de l'érection. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que, dans la première supposition, le système musculaire en question ne joue aucun rôle, et que s'il est vrai qu'il exerce une action toute spéciale dans ce cas, cette action sur les vaisseaux qu'ils étreignent ou qu'ils relâchent est elle-même soumise à l'influence du système nerveux. Enfin, sans vouloir en aucune façon rejeter l'explication du savant anatomiste Koelliker, je pense qu'il est plus simple d'attribuer le phénomène de l'érection à un appel de fluide commandé et dirigé le plus souvent par l'influence nerveuse, suivant le même mode d'action, peut-être, qui provoque le rouge au visage quand une impression vive nous arrive. Les muscles propres de la verge seraient alors des instruments en action qui maintiendraient plus ou moins longtemps ensuite l'orgasme vénérien. Quelle que soit, du reste, l'explication que l'on peut donner à ce sujet, toujours est-il qu'au moment de l'accou-

plement, les deux verges sortent de leur fourreau en se renversant, à la manière d'un doigt de gant qu'on refoule sur lui-même, et se dirigent, l'une à droite l'autre à gauche, en divergeant sensiblement. Cette disposition est favorable pour faire parvenir convenablement la liqueur fécondante dans les oviductes de la femelle, et pour maintenir en rapport les deux orifices sexuels.

Quant à ce qui est ensuite de la vessie urinaire, cet organe manque complétement chez les ophidiens.

B. Chez la couleuvre femelle, on retrouve comme chez le mâle la même asymétrie des organes qui composent les appareils reproducteur et urinaire. L'ovaire droit et le rein du même côté sont situés plus avant dans la cavité abdominale que les organes similaires qui sont à gauche. Le canal intestinal est au milieu, et les oviductes sont placés symétriquement sur ses côtés.

Les ovaires de la couleuvre à collier ne rappellent en aucune façon ceux du lézard vert, qui ont une très-grande analogie avec ceux de la poule. C'est, en effet, un long tube, une sorte de boyau placé de chaque côté de l'axe du corps et en avant des reins qui constitue les ovaires. Leur disposition et leur conformation ont aussi valu à ces organes la dénomination de boudin. C'est qu'en effet ils sont creux, peuvent s'insuffler, et dans ce cas imiter une portion d'intestin rempli.

La couleuvre qui m'a plus particulièrement servi d'étude et de modèle pour les planches sur les appareils génito-urinaires (voy. pl. 10) a été sacrifiée au mois d'avril, époque à laquelle les organes reproducteurs sont en pleine activité. Sur cette couleuvre et sur mes dessins, qui représentent ses principaux organes, on remarque les particularités suivantes : les reins, les ovaires et les oviductes sont très-développés, les vaisseaux sanguins qui rampent à leur surface sont fortement congestionnés. Dans l'oviducte gauche, on aperçoit un œuf qui est déjà engagé dans ce tube (voy. fig. 4, *c*). Chaque ovaire a la forme d'un tuyau bosselé, presque droit, d'environ huit centimètres de longueur et du volume d'une plume d'oie quand on y a in-

sufflé de l'air. Cette partie du tube ovarien renferme dans ses parois une grande quantité d'ovules de toutes les dimensions, qui sont comme enchâssés dans le tissu propre de l'ovaire. En arrière de cette portion, qui contient des œufs au milieu du stroma, le tube ovarien se continue en s'amincissant de plus en plus, jusqu'à l'extrémité postérieure du rein pour l'ovaire droit, et un peu moins loin pour celui de gauche. Cette seconde partie du même organe est entièrement dépourvue d'ovules (voy. pl. 10, fig. 4, *b″*, *b″*, *b″*). Antérieurement, l'ovaire ne se prolonge pas de la même manière, c'est au contraire sa partie la plus volumineuse qui constitue le gros cul-de-sac du boyau. Le péritoine forme en ce point une sorte de capuchon (*b‴*, fig. 4) fort remarquable, qui fait partie du mésovaire. Quand on injecte de l'air, du vermillon, ou toute autre substance plus ou moins solidifiable dans la cavité ovarienne, on acquiert la certitude que cette cavité est close de toutes parts, même à l'époque où les ovules se détachent de l'ovaire, ce qui n'empêche pas que la déhiscence de l'œuf ne s'effectue qu'en déchirant le péritoine, et dès lors on s'explique difficilement pourquoi le sac ovarien ne présente aucune trace du passage de l'œuf. Cependant, quand on observe avec attention l'ovaire des couleuvres qui viennent d'émettre un œuf, on aperçoit, sur un point du tube ovarien qui est très-variable, que les parois sont un peu plus tuméfiées, qu'il y a une injection vasculaire très-grande des capillaires sanguins, et qu'au centre de ces parties, qui sont comme phlogosées, existe une petite dépression. Si dans ces circonstances on pousse avec une certaine force de l'eau dans la cavité ovarienne, on voit que ce liquide tend à se faire jour sur cette partie déprimée, ce qui indique qu'il y a là une voie de communication, une issue que l'ovule a dû se frayer. La promptitude avec laquelle la nature travaille à la réparation de la vésicule de Graaf chez les mammifères, et à celle du calice de la poule, après la déhiscence de l'œuf, explique suffisamment ce qui se passe chez la couleuvre.

Je reviens actuellement à la description anatomique de l'ovaire. Cet organe, à parois épaisses et résistantes, se compose d'une en-

veloppe externe, qui est le péritoine, et d'un tissu fibreux très-serré, contenant une infinité de petits vaisseaux artériels et veineux. Lorsqu'on ouvre par incision un tube ovarien, on voit que tous les œufs font saillie dans sa cavité, et que les ovules les plus petits sont en bien plus grand nombre et pour la plupart superposés à d'autres œufs d'un volume double ou triple du leur. On dirait, à voir cet arrangement, que l'ovulation est véritablement l'effet d'une sorte de bourgeonnement, et que les petits œufs proviennent des plus gros. Mais, en examinant les choses de plus près, on voit que le tissu propre de l'ovaire ou le stroma, quoique peu développé dans les parois du sac ovarien dont il est question, se comporte, à l'égard des ovules qu'il contient, absolument de la même manière que chez les oiseaux, c'est-à-dire qu'il forme autour de chaque ovule une cellule nutritive ou calice qui lui est intimement accolée. Mais toutes ces cellules, composées de parois fibreuses richement pourvues de vaisseaux sanguins, ne semblent pas avoir la même énergie vitale; aussi les ovaires contiennent-ils des produits qui sont à des degrés divers de développement. On dirait que la nature préside d'une manière régulière à l'accroissement des œufs de chaque portée, et que ceux qui doivent servir pour une prochaine fécondation ne reçoivent pas la même quantité de matériaux nutritifs. La forme des plus petits ovules est en général sphérique; elle change ensuite à mesure que l'œuf s'accroît, devient oblongue, et cet ovoïde conserve jusqu'au moment de l'éclosion une disposition identique. Quant à ses deux bouts, ils sont également arrondis; en sorte qu'il n'y a pas, comme pour l'œuf de la poule, par exemple, une grosse et une petite extrémité (voy. pl. 10 *b'* et *c*, fig. 4). Lorsque les ovules se développent dans le stroma de l'ovaire, ils deviennent de plus en plus saillants sur la surface interne de la glande ovigène, qui est comme bosselée et couverte d'un réseau vasculaire considérable. Quand une fois les ovules ont acquis leur développement, et que le moment de la déhiscence est arrivé, la cellule du stroma se déchire pour lui livrer passage. En ce moment,

l'œuf passerait dans la cavité de la glande ovigène, si les parois du tube ovarien, qui lui sont fortement accolées, le péritoine et le tissu cellulaire ne cédaient pas sur un point qui correspond exactement à celui où le calice s'ouvre. En un mot, le stroma et le péritoine, qui recouvrent l'ovaire, c'est-à-dire l'analogue du calice chez la poule, se rompent pour émettre l'œuf. Celui-ci se compose alors d'un vitellus très-développé et d'une membrane vitelline, résistante quoique molle. Examiné au microscope et à un fort grossissement, on voit que le jaune est formé de vésicules et de granules vitellins, au milieu desquels on aperçoit un grand nombre de globules huileux. Cette matière grasse est, en proportion, en bien plus grande quantité dans la substance vitelline de la couleuvre que dans celle des oiseaux, et surtout dans l'œuf des mammifères en général. A part cette différence, l'étude de la constitution de l'œuf de la couleuvre fait connaître qu'il a la plus grande analogie avec celui des autres vertébrés, c'est-à-dire que dans l'origine et sur les plus petits ovules, on distingue parfaitement la sphère germinative, placée au centre de la sphère vitelline, puis la formation des vésicules qui nagent dans un fluide de nature albuminoïde, et enfin le dépôt de globules dans ces vésicules qui constituent plus tard les granulations vitellines ou la substance propre du jaune. Cette substance, à mesure qu'elle s'accumule dans l'œuf, trouble sa transparence, donne lieu à la formation des taches de Wagner, et fait perdre de vue la sphère germinative. Pourtant la partie albumineuse ou le blanc d'œuf proprement dit n'existe pas ici, bien qu'il y ait dans la composition du jaune des globules d'albumine en grand nombre, et de plus, la coque de l'œuf est toujours molle et poreuse.

Ces particularités établissent une petite différence entre cet œuf et celui de la poule, différence qui se rattache au mode d'incubation qui est propre à chacun de ces vertébrés. En effet, l'œuf de la poule, qui est soumis à une incubation extérieure, et par cela même exposé à une déperdition notable de fluide, est enveloppé d'un albumen liquide très-abondant, tandis que celui de la

couleuvre à collier, qui subit son incubation dans l'oviducte et qui n'émet pas de parties fluides, en est dépourvu; le vitellus, à son tour, très-développé dans l'œuf de la couleuvre, fournit à lui seul tous les matériaux nécessaires à l'accroissement du fœtus. Indépendamment de ces conditions diverses, les œufs de ces reptiles sont déposés dans des lieux humides et chauds, en général sous du fumier, où ils subissent une incubation de courte durée. Lorsqu'on les soustrait à cette action, et qu'on les expose à l'air libre pendant quelque temps, ils se dessèchent rapidement, et les petits succombent. Cette expérience confirme ce que je disais tout à l'heure, que le blanc d'œuf est nécessaire au développement du fœtus quand l'incubation entière s'effectue au dehors. Il est vrai qu'une partie de cette incubation est extérieure chez la couleuvre; mais quand on songe au peu de temps que cela dure et aux conditions toutes particulières dans lesquelles se trouvent les œufs de ces reptiles ovipares, on peut regarder comme nulle la déperdition des fluides qu'ils subissent. A ce propos d'oviparité, je dois ajouter que MM. Geoffroy Saint-Hilaire et Florent Prévost sont parvenus, en privant l'animal d'eau et de nourriture, et en le maintenant à une température convenable, à retarder l'éclosion des œufs, qui, dans ce cas, se fait dans les oviductes, et à rendre ainsi les couleuvres vivipares. D'après cela, les organes incubateurs de l'appareil de la reproduction, chez ces animaux, se prêtent fort bien aux conditions de l'oviparité et de la viviparité, sans qu'ils aient subi des modifications organiques importantes et appréciables. Ces faits ressortiront plus clairement encore de la description anatomique suivante :

Les oviductes de la couleuvre sont constitués par deux tubes très-longs et inégaux : le droit a environ vingt-trois centimètres, le gauche en a quinze ou seize seulement (pl. 10, fig. 4, *c, d*); cette différence tient à ce que l'ovaire du côté droit est placé plus en avant dans l'abdomen; l'oviducte est donc, encore ici, soumis à de certaines conditions qui l'obligent à être en rapport immédiat avec l'ovaire correspondant. Cette condition, qui est favorable

à l'adaptation du pavillon de la trompe sur l'ovaire et au passage de l'œuf dans ce tube, constitue un degré de perfectibilité organique qu'on ne retrouve que chez les vertébrés supérieurs. Le pavillon, pour ces animaux, équivaut à une main qui se dirigerait sur l'ovaire dans le but de s'emparer des œufs qu'il émet. Pour certaines classes inférieures, au contraire, il ne serait plus qu'un organe passif, destiné simplement à recevoir l'œuf au moment de la déhiscence. Le phénomène de préhension, dévolu aux premiers et entièrement refusé aux seconds, établit une démarcation importante qui sera discutée et mieux appréciée à sa juste valeur dans la troisième partie de ce mémoire; mais, pour que le pavillon de la trompe puisse agir convenablement, il faut qu'indépendamment de sa grande mobilité en tous sens il puisse s'adapter d'une manière complète sur l'ovaire; or, pour cela, il est nécessaire qu'il ait une étendue proportionnée à celle de l'ovaire, et c'est précisément ce qui a lieu chez la couleuvre. La fente en forme de boutonnière du pavillon de la trompe n'a pas moins de cinq centimètres de longueur, et les lèvres minces et plissées de cette partie de l'oviducte déployées peuvent recevoir et contenir un tube ovarien double de grosseur de celui de la couleuvre (voy. pl. 10, fig. 4, *c''*). La structure de ce pavillon est entièrement analogue à celle des mammifères; on voit au dehors le feuillet péritonéal, en dedans le feuillet muqueux garni de cils vibratiles, et son tissu moyen, composé de fibres musculaires très-déliées qui se croisent à angle droit. Les plus superficielles sont dirigées suivant l'axe du tube, les autres dans le sens de sa circonférence. Elles ont pour fonction d'imprimer au pavillon des mouvements de coaptation et de serrement qui lui servent pour s'ajuster sur l'ovaire au moment de la déhiscence et pour faire cheminer l'œuf qu'il reçoit vers la trompe utérine. Cette dernière partie de l'oviducte est très-rudimentaire chez la couleuvre; la corne utérine lui succède immédiatement sans qu'il y ait ni changement de structure appréciable, ni valvules apparentes. Lorsque cet organe est arrivé à la partie la plus reculée de l'abdomen, et au moment où il va s'ouvrir

dans le cloaque, il offre intérieurement un col utérin, à museau de tanche bien dessiné (voy. fig. 4, *d*, *d*). Dans tout leur trajet, les cornes utérines présentent les mêmes caractères anatomiques : au dehors une vascularité sous-péritonéale des plus remarquables; au dedans une membrane muqueuse parsemée de glandules, et très-riche en vaisseaux. Entre celle-ci et le feuillet péritonéal se trouvent les deux plans de fibres musculaires que j'ai dit exister dans l'épaisseur du pavillon de la trompe; ces parties musculaires ne sont que la continuation des fibres du pavillon un peu renforcées par le rapprochement des divers faisceaux entre eux. Au point de jonction des deux cornes utérines, qui s'effectue au-dessus de la région cloacale du rectum, les faisceaux des fibres musculaires de chaque oviducte se croisent et se confondent de telle manière qu'il y a véritablement fusion des parois (*c*, *c*, pl. 10, fig. 6). Il résulte de cet affrontement des tubes conducteurs sur la ligne médiane, qu'ils communiquent largement à leur terminaison. Sauf cela, ils se complètent à tel point que leur calibre reste évidemment le même jusqu'à l'ouverture anale (*e*, *e*, fig. 4). Pour avoir une idée bien exacte de cette grande loge commune des deux utérus, ou, pour mieux dire, des deux vagins réunis, il faut inciser les parois inférieures des oviductes, ainsi que je l'ai fait sur la préparation qui m'a servi de modèle pour la planche des reptiles ophidiens (voy. pl. 10, fig. 4). Voici alors les particularités qu'on remarque : tout à fait en avant de cette cavité, à une profondeur de trois centimètres de l'orifice génito-excrémentitiel, et de chaque côté de la ligne médiane, se trouve un col utérin (*d*, *d*, fig. 4); l'un et l'autre sont séparés par un pilier charnu, placé un peu plus en arrière, et provenant de la jonction des parois supérieures de l'oviducte qui est en rapport avec la face supérieure du rectum. De ce point jusqu'à l'orifice anal, il n'y a plus de cloison intermédiaire, par le fait même de la fusion des deux oviductes entre eux. Vers la partie la plus reculée de cette cavité commune, on voit implantée sur la paroi supérieure une papille entièrement comparable à la

papille urétro-sexuelle du mâle. Cet organe (*e'*, fig. 4), de forme mamelonnée, dirigé en arrière sur la ligne médiane, présente à son sommet deux très-petits orifices, qui conduisent l'un et l'autre dans l'uretère correspondant. Le tissu propre de cette papille urinaire est, de même que chez la couleuvre mâle, de nature érectile, et par conséquent susceptible de présenter des dimensions variables; aussi son extrémité libre est-elle placée exactement en face de l'ouverture cloacale (*m*, fig. 4), comme pour témoigner ainsi de sa fonctionnalité, qui est de verser l'urine dans ce réservoir, et non dans la cavité supérieure, qui est commune aux deux oviductes et dans laquelle elle se trouve par le fait. Mais si l'on considère la position de cette papille, sa structure et ses rapports, on ne saurait douter un instant qu'elle ne serve à porter l'urine dans le cloaque. Les oviductes, d'après cela, conservent leur dénomination spéciale jusqu'au point de fusion avec le rectum, et leur partie comprise entre le col utérin et le cloaque représente un véritable vagin commun. Les cornes utérines débouchent dans le vestibule génito-excrémentitiel par la paroi supérieure du rectum, qui est perforée dans sa partie la plus reculée et très-près de l'anus; on ne peut, du reste, se faire une idée bien exacte de la disposition du cloaque qu'en incisant la paroi inférieure ou ventrale jusqu'à son orifice externe. Cette préparation faite (fig. 5, *e*, *e'*), on voit que le rectum a un sphincter interne qui est placé à deux centimètres environ de profondeur de l'orifice externe du vestibule commun; que plus en arrière de ce sphincter il existe un cul-de-sac (*m*, fig. 4) fort remarquable, dans lequel l'urine s'accumule ; puis après cette espèce de réservoir, qui semble tenir lieu de vessie, se voit le vestibule génito-excrémentitiel (*e*, *e'*, fig. 5), dans lequel aboutissent la papille urinaire (*e'*, fig. 5), et sur les côtés les oviductes (*d*, *d*). Dans ce même vestibule et tout à fait en arrière on aperçoit les orifices des conduits clitoridiens (*e*, *e'*, fig. 5). Ces sacs sexuels (*g*, *g*, fig. 4 et 5.), quoique analogues par leur forme, leur position et même par leur structure érectile, à la verge des mâles,

n'ont pas dans leur intérieur les prolongements fibreux, sous forme d'épines, qu'on rencontre dans la verge, et qui représentent les cloisons fibreuses des corps caverneux des mammifères. Enfin, les uretères offrent à leur terminaison les mêmes dispositions que ceux de la couleuvre mâle, c'est-à-dire les deux renflements olivaires. Ici toutefois aucun autre conduit n'y débouche, et cette circonstance permet de conclure que ses analogues chez le mâle sont bien des dilatations appartenant au canal de l'uretère, canal qui va s'ouvrir dans le cloaque après avoir perforé la paroi supérieure des oviductes. La papille cloacale, d'après cela, constituerait un double canal urétro-sexuel chez la couleuvre mâle, et un double canal de l'urètre chez la couleuvre femelle; disposition entièrement en harmonie avec ce qui se passe chez les vertébrés supérieurs.

Avant de terminer ce paragraphe, je dois signaler une particularité fort remarquable du mode d'origine des uretères dans l'un et l'autre sexe, et surtout les rapports qui existent, chez les reptiles ophidiens, entre le tronc principal du conduit de l'urine et le rein. Jusqu'ici, en effet, les tubes urinifères des reins ne se sont pas montrés au dehors de la substance corticale, et l'uretère s'est trouvé placé en dedans de la glande rénale, ou tout au plus sur le milieu de cette glande. Chez la couleuvre, au contraire, les faisceaux des conduits urinaires se montrent à la surface même des reins sous forme de pinceaux, et l'uretère qui en dérive est placé sur le bord externe du rein. Cette inversion complète, par rapport à ce qui est chez les mammifères, mérite d'autant plus d'être signalée, que nous voyons qu'en passant de cette classe de vertébrés à celle des oiseaux, ces rapports sont déjà changés, puisque l'uretère est placé au milieu et sur la face inférieure de la glande rénale; que cette même disposition s'observe chez le lézard vert, et qu'enfin chez les vertébrés des classes inférieures le conduit principal de l'urine se place constamment sur le bord externe du rein. La vessie urinaire ensuite, qui manque entièrement chez les ophidiens, peut, jusqu'à

un certain point, être représentée, chez la couleuvre femelle, par cette dépression qui existe dans la partie la plus reculée du rectum et qui constitue un véritable réservoir, dans lequel aboutit la papille urétrale ou petit canal de l'urètre double dont il a été question.

En résumé :

On ne saurait, au dehors, se prononcer avec certitude sur la différence des sexes en n'examinant que les organes de l'appareil de la reproduction.

Cette distinction, toutefois, est possible pendant la vie fœtale, exceptionnellement à ce qui a lieu en général.

Les glandes spermagènes, asymétriquement placées, sont situées très-profondément dans l'abdomen.

Elles se composent de tubes séminifères enroulés plusieurs fois sur eux-mêmes et anastomosés entre eux.

On ne retrouve pas un corps d'Hygmore, et tous les tubes séminifères sortent de la glande par trois ou quatre petits conduits qui aboutissent à l'épididyme.

Cette portion du spermiducte n'existe pas, à vrai dire, et on ne saurait assigner le point où commence le déférent.

Celui-ci s'effile considérablement vers sa terminaison, et va déboucher dans un renflement olivaire de l'uretère.

Au moment du rut, ce renflement est rempli de zoospermes très-développés, et tient lieu de vésicule séminale.

Le mélange du sperme avec l'urine établit un fait physiologique important qu'on observe toutes les fois que les glandes prostates et de Cowper manquent.

La papille cloacale où aboutit le renflement olivaire de l'uretère constitue un petit canal urétro-sexuel.

Les verges bifides de la couleuvre sont creuses dans leur intérieur, et le sillon qu'elles forment pour transmettre le sperme est garni de prolongements épidermoïdes terminés en pointe.

Ces prolongements sont formés de faisceaux musculaires dans

lesquels rampent des vaisseaux sanguins, et constituent, rudimentairement, les analogues des cloisons musculaires de la verge chez les mammifères.

Indépendamment de cela, les parois de la verge sont d'un tissu fibreux très-érectile.

La vessie urinaire manque entièrement chez la couleuvre, mais la région cloacale où débouchent les uretères, à l'aide de la papille urétro-sexuelle, peut, comme chez les oiseaux, tenir lieu de cet organe.

Les glandes ovigènes, asymétriquement placées dans la cavité abdominale, se composent d'une espèce de boyau fort long, dans les parois duquel se trouvent les ovules.

Le stroma de l'ovaire forme autour de l'œuf un véritable calice comparable à celui de la poule.

Le sac ovarien se déchire sur chaque point correspondant à l'ouverture du calice qui émet l'œuf.

La forme des œufs dans l'ovaire est oblongue au moment de la déhiscence; mais dans l'origine de leur formation, elle est sphérique.

Chaque ovule se compose d'une sphère externe ou vitelline, et d'une sphère interne ou germinative, qui contient, à une certaine époque de son développement, les taches germinatives.

Le vitellus se compose de vésicules à noyaux, de granules et de globules huileux, qui y sont en proportion bien plus grande que dans le jaune de la poule et celui des mammifères.

L'œuf de la couleuvre ne contient pas d'albumine comme celui des ovipares, et le jaune, très-volumineux, se trouve en contact avec la coque, qui est molle et résistante.

L'œuf de la couleuvre à collier est fécondé quand il arrive dans l'oviducte, et cet organe est dans une grande étendue le lieu d'incubation où le fœtus subit son développement presque complet.

Les oviductes, formés de parois musculaires et d'un pavillon fort étendu et libre, sont des organes de préhension disposés

de façon à aller chercher les œufs sur l'ovaire. Ils ont, par conséquent, un rôle actif, comme ceux des mammifères et des oiseaux.

Il n'y a pas de point de démarcation apparent qui puisse servir à limiter la trompe de Falloppe. L'oviducte, qui commence au pavillon, se termine au cloaque à l'aide d'une sorte de vagin.

La jonction des deux oviductes se fait au-dessus du rectum, entre cet intestin et le rachis, et c'est sur ce point que débouchent les uretères au sommet d'une même papille urétrale. Cette papille correspond à une ouverture cloacale par laquelle l'urine passe.

Ce liquide peut s'accumuler dans un cul-de-sac du rectum, qui a quelque analogie avec la région vésicale du cloaque des oiseaux, et qui tient lieu de vessie.

Enfin, les uretères sont placés en dehors et sur le bord externe de chaque rein, contrairement à ce qui a lieu chez les vertébrés supérieurs.

§ VII.

TRITON À CRÊTE.

Cette espèce de salamandre aquatique, autrefois comprise parmi les reptiles en général, est considérée aujourd'hui avec raison, par l'Académie des sciences, comme faisant partie d'un groupe distinct de ces vertébrés que constitue la classe des amphibiens. Pour cette quatrième grande division, le programme de l'Institut indique comme sujet d'étude la grenouille et la salamandre. C'est sur celle-ci que j'ai plus particulièrement porté mes investigations, et cela par la raison toute simple qu'il règne une grande dissidence d'opinions entre les auteurs au sujet des appareils reproducteurs et urinaires de ces animaux, et que mes propres observations, du reste, sont loin d'être toujours conformes à ce qui a été dit sur ce point. Cette divergence d'opinions tient sans doute à la difficulté même du sujet, car il y a déjà plus d'un

siècle que les anatomistes et les physiologistes ont tour à tour admis et rejeté les mêmes faits. Malpertuis en 1727, Fay un peu plus tard, puis Ratké Duméril, Prévost et Dumas, Ridder ensuite, ainsi que Duvernoy dans ces derniers temps, ont étudié l'organisation et les fonctions de la salamandre crêtée au point de vue des appareils reproducteurs et urinaires, et n'ont pu, sur plusieurs points, demeurer d'accord. Tant de travaux entrepris pour la détermination d'une seule espèce de vertébrés témoignent de tout l'intérêt que la science peut retirer de pareilles recherches, eu égard surtout aux habitudes et au mode de reproduction de ces animaux. Les amphibiens, en effet, sous ce dernier rapport plus particulièrement, font assister, à découvert, si l'on peut s'exprimer ainsi, à l'évolution fœtale tout entière. Nulle part, parmi les autres vertébrés, on ne peut mieux voir qu'ici la formation des spermatozoïdes, celle de l'œuf, sa constitution, ses modifications après la fécondation, l'ébauche embryonnaire et sa métamorphose complète, jusqu'au moment de l'entier et parfait développement du nouvel être. Les fonctions si remarquables de la circulation et de la respiration aquifères, modifiées en circulation et respiration aérienne sur le même être, sont aussi des phénomènes qu'on ne saurait ni bien comprendre ni bien apprécier sans la connaissance exacte de ce qui se passe chez les amphibiens en particulier. Indépendamment de cet enseignement si grand, l'appareil des organes de la reproduction en offre d'autres non moins intéressants à connaître, tels que la réapparition des glandes prostates et la segmentation de la glande spermagène chez le mâle, la fixité du pavillon de la trompe et la segmentation également de la glande ovigène chez la femelle; la tendance, dans l'un et l'autre sexe, qu'ont les organes reproducteurs à se placer en arrière du rectum, ou entre cet intestin et le rachis, au lieu d'être en avant de lui sous les parois abdominales. On pourrait ajouter aussi, d'après les auteurs que j'ai déjà cités, la fusion des appareils urinaires et reproducteurs entre eux; mais ici surtout je me trouve en désaccord avec eux, puisque je crois pouvoir établir d'une manière

certaine que ces appareils conservent toute leur indépendance réciproque jusque dans le cloaque, où ils aboutissent séparément.

Relativement à la distinction des sexes au dehors, les appareils de la reproduction ne sont presque d'aucun secours chez le triton ; c'est tout au plus si les lèvres anales qui donnent accès au cloaque sont plus développées chez le mâle que chez la femelle ; toutefois cette différence est assez sensible à l'époque du rut. Il est possible, du reste, de reconnaître le mâle du triton en examinant l'entrée du cloaque. Chez celui-ci, on voit une masse charnue en forme de bouclier, qui obstrue le passage d'une manière presque complète. Cette espèce de bouchon est constituée par la verge, ou, pour mieux dire, par une sorte de gland imperforé dont on ne trouve pas l'analogue chez la femelle.

Quand, ensuite, on ouvre la cavité abdominale, et que l'on met à découvert les appareils reproducteurs dans les deux sexes, on distingue, au premier abord, le mâle d'avec la femelle à la présence des œufs d'un côté et des testicules de l'autre. Cette détermination est surtout très-facile à l'époque où commence le rut chez le triton. En outre de cela, les spermiductes et les oviductes présentent de telles différences entre eux, qu'il ne saurait y avoir d'équivoque.

A. Chez le mâle du triton à crête, les glandes spermagènes sont placées profondément dans la cavité abdominale ; elles sont situées entre les reins et le canal intestinal dans un large repli du péritoine, qui contient une notable quantité de graisse (voy. pl. 11, fig. 1)[1]. Il y a de chaque côté de l'axe du corps une masse

[1] M. Duvernoy attache une grande importance à ces masses graisseuses, qu'il regarde comme étant une sorte de réservoir propre au développement des spermatozoïdes et des œufs chez les amphibiens. Il est bien vrai, en effet, qu'il y a unité dans le système sanguin des glandes spermagènes et ovigènes avec cet appendice, et que le réseau vasculaire qu'on remarque à la surface du testicule ou des ovaires est analogue à celui qui existe dans cette masse adipeuse. C'est d'après ces rapports surtout qu'on a pu déduire la dépendance de ces organes graisseux avec les glandes spermagènes et ovigènes, ainsi que leur utilité, qui semble bien être chez les amphibiens celle que lui assigne le savant professeur M. Duvernoy.

glandulaire qui représente, au premier abord, plusieurs testicules ; on voit, en effet, au milieu du tissu graisseux dont j'ai parlé, de deux à cinq glandes qui semblent distinctes ; ces parties, plus ou moins arrondies, varient entre elles quant au volume et à la couleur, suivant que l'époque du rut est plus ou moins avancée. Déjà en 1729 Fay avait fait la même remarque, mais sans en reconnaître la cause. Ratké, en 1820, décrivit également avec soin la forme et la structure des testicules des salamandres et des tritons ; il s'aperçut des changements de volume et de coloration des diverses masses glandulaires, mais n'en donna point l'explication. Il était réservé à M. Duvernoy de combler cette lacune : c'est ce qu'il a fait à l'aide de l'observation directe et de l'étude microscopique des diverses parties composant les glandes spermagènes.

Ses recherches, qui datent de 1846, lui ont appris que les divisions en lobes des testicules du triton à crête ne sont qu'apparentes, que leur volume diffère suivant que l'animal est ou non en rut, et que la couleur variable de ces lobes est en rapport avec le développement plus ou moins avancé des spermatozoïdes que chacun d'eux renferme. Ainsi les lobes du testicule, dont l'aspect est blanc de lait, sont les seuls qui contiennent des spermatozoïdes bien développés; les autres, dont la couleur est jaunâtre, rougeâtre, et qui sont tout à fait opaques, ne renferment que des vésicules sphériques contenant des granules ou des spermatozoïdes en germe. Ces divisions singulières d'un même organe, ainsi que leurs apparences différentes de couleurs, et l'injection plus ou moins forte des vaisseaux sanguins de leurs capsules, indiqueraient donc, ajoute M. Duvernoy, une sorte d'indépendance et de succession dans leur développement et dans celui de leur contenu, ce développement étant moins avancé dans les parties de couleur gris perle, plus avancé dans celles de couleur blanc de lait.

Du reste, il en serait à cet égard de même pour les glandes spermagènes que pour les glandes ovigènes qui contiennent des ovules à des degrés divers de développement. Il arrive pourtant

un moment où les divers lobes du testicule chez le triton sont entièrement remplis de spermatozoïdes à l'état presque parfait, et ce moment coïncide avec celui où ces animaux sont en plein rut. A cette époque il est plus facile d'étudier l'appareil de la reproduction, à cause précisément de l'engorgement qui existe dans les testicules et dans les conduits spermagènes, depuis leur origine jusqu'à la terminaison du déférent. Malgré cette injection naturelle qu'on doit rechercher avec soin, il faut que les vaisseaux sanguins et les uretères soient remplis de matières colorantes de diverses nuances; sans cette précaution il serait facile de se méprendre sur la nature de chaque organe. On doit également injecter du mercure dans les conduits spermatiques; non pas comme on l'a souvent tenté, du déférent vers le testicule, mais bien de cet organe vers le déférent, en piquant au hasard avec un tube de verre très-fin dans les vésicules qu'on remarque à la surface de la glande spermagène. Ces sortes d'injections, qui suivent le cours naturel du sperme, réussissent infiniment mieux que les autres, dont le principal inconvénient est de faire refluer le fluide séminal dans les plus petits conduits de la glande et de les rompre sur divers points. Quand on a pris toutes les dispositions que je viens d'indiquer et qu'on a sous les yeux plusieurs préparations de ce genre, on peut décrire avec toute la certitude désirable en anatomie les divers organes qui composent l'appareil si compliqué du triton. Lorsque les divers lobes du testicule sont dégagés du panicule graisseux qui les entoure (pl. 11, fig. 3), on voit très-distinctement à l'œil nu qu'il y a de trois à sept conduits spermatiques par lobe, le plus ordinairement, qui sortent brusquement du testicule, et qui se rendent, les uns directement dans le déférent, les autres, et c'est le plus grand nombre, dans un conduit commun qui est situé le long de chaque testicule (*g*, fig. 4). A l'aide ensuite d'une simple loupe, on peut suivre tous les contours de chaque conduit et de plus se faire une idée exacte de la disposition des cellules du testicule, en examinant sa surface. On aperçoit alors au travers de la membrane péritonéale et de l'albu-

ginée, des petits sacs glanduleux entourés et comme encadrés dans un réseau vasculaire disposé en polygones.

Une dissection des plus minutieuses de la tunique propre du testicule, et plus particulièrement de son feuillet interne, fait voir que cette membrane envoie des prolongements dans la substance du testicule, que ceux-ci forment autour de chaque petit sac glanduleux une sorte de robe qui les protége et qui sert en même temps de charpente, pour ainsi dire, aux vaisseaux sanguins du testicule. Chaque prolongement de l'albuginée se dirige de dehors en dedans, en décrivant quelques sinuosités, et va se perdre vers le bord interne du testicule, sur une espèce de conduit qui longe ses divers lobes. Ce conduit commun (*e'*, *c'*, fig. 4), renflé sur les points correspondants aux masses testiculaires, constitue un véritable corps d'Hygmore. Une préparation qui fait bien voir la distribution de l'albuginée consiste à écraser le testicule entre deux plaques de verre, de manière à en faire sortir toute la substance et à mettre ensuite cette pièce dans l'eau. Au bout de quelques heures, les prolongements fibreux qui cloisonnent le testicule sont séparés les uns des autres, et leur disposition rappelle celle d'une ruche d'abeilles. Tous les alvéoles que l'on voit à la périphérie de la glande spermagène convergent vers le corps d'Hygmore et renferment pour la plupart des débris membraneux qui sont restés accolés sur leurs parois. Ces débris proviennent des tubes séminifères qui ont été déchirés au moment où la compression exercée sur le testicule a forcé le sperme à en sortir. Ce sont donc ces organes ainsi protégés par l'albuginée qui constituent les canaux spermagènes où la liqueur fécondante est élaborée. Pour avoir une idée bien exacte de leur disposition, il faut nécessairement se servir d'injection capable de se solidifier au bout de quelques minutes. Cette sorte de moulage anatomique, qu'on obtient par un mélange convenable de vernis blanc à l'alcool et de précipité rouge, permet de bien voir l'arrangement des parties qui composent le testicule. J'ai plusieurs fois examiné au microscope les diverses coupes que l'on peut pratiquer sur une glande spermagène

ainsi préparée à l'avance, et j'ai toujours pu établir rigoureusement, à la chambre claire, que les tubes séminifères sont distincts, non anastomosés entre eux, renflés à leur extrémité périphérique et terminés en cône du côté opposé, qui aboutit presque en ligne droite dans le réservoir d'Hygmore (pl. 11, fig. 4, *e'e'*). A partir de ce point, on voit les tubes séminifères, au nombre de cinq ou six troncs principaux, se dégager de la glande spermagène pour aller, les uns directement dans le canal déférent (*f, f,* fig. 4), les autres dans un tronc commun (*g, g,* fig. 4), qui se continue d'une manière évidente avec le déférent. Ce tronc commun, où aboutissent les conduits séminifères provenant du corps d'Hygmore, et duquel partent un grand nombre de conduits qui vont déboucher dans le déférent, se trouve en rapport avec une masse rubanée qui est la continuation du rein. Cette partie rénale est bien, à la vérité, comme labourée par les tubes spermagènes qui la traversent en se peletonnant sur ce point; mais elle est entièrement distincte des tubes en question, qui constituent l'épididyme. M. Duvernoy dit avoir vu cette partie du spermiducte disposée en massue et placée au-dessus et en avant du testicule. Cette détermination semble bien indiquer que ce savant professeur ne confond pas, comme le pense M. Bidder, la substance rénale avec les organes conducteurs du sperme. L'épididyme est donc bien formé par les tubes plus ou moins enroulés qui partent du corps d'Hygmore et qui vont, à l'aide d'un tronc principal, se jeter dans le déférent. C'est tout à fait en avant, au point correspondant au niveau de la première masse testiculaire, que celui-ci commence. Il se coude bientôt sur lui-même, se dirige vers le cloaque et décrit dans la plus grande partie de son parcours des sinuosités régulières disposées en zigzag. A l'endroit où le déférent se coude, on voit un prolongement (*g'*, fig. 3 et 4), qui s'avance très-loin dans la cavité abdominale, et qui, après s'être bifurqué, se perd sur le sommet du poumon, au point qui correspond, chez le triton femelle, au pavillon de la trompe. Ce ligament semble devoir être dans le premier âge de la vie, chez le têtard très-jeune, un conduit, une espèce

de diverticulum de l'épididyme, car, sur quelques préparations, l'injection y pénètre à une certaine distance de son origine. Quoi qu'il en soit de ce prolongement, sur lequel, du reste, je reviendrai dans une autre partie de ce travail; toujours est-il qu'il fait partie de l'appareil reproducteur, et que sa fonction chez le triton adulte est bien évidemment de servir de point fixe, de ligament de suspension au canal déférent. C'est à partir de là que le spermiducte affecte la disposition ondulée qu'on lui connaît généralement, et qu'il reçoit de nombreux conduits provenant du corps d'Hygmore directement et surtout de l'épididyme. Ces conduits, au nombre de dix-huit à vingt (fig. 3), facilitent le passage du sperme dans le canal déférent. Lorsque celui-ci est arrivé à deux centimètres environ du vestibule commun, il devient presque droit et s'amincit sensiblement jusqu'à sa terminaison, qui a lieu au sommet d'une papille sexuelle perforée.

Avant d'indiquer la disposition, les rapports et les usages de cette papille, je dois m'arrêter sur un fait anatomique important. J'ai dit tout à l'heure, en parlant des conduits qui aboutissent dans le déférent, qu'ils ne proviennent que du testicule ou de l'épididyme, et que par conséquent ils ne contiennent et ne transmettent tous que du sperme. Il n'en serait pas tout à fait ainsi, suivant M. Duvernoy. Voici ce qu'il dit page 67 de son mémoire intitulé *Fragment sur les organes génito-urinaires des reptiles* : « Chez le triton à crête mâle, on voit d'abord, à l'époque du rut, cinq canaux urinaires se détacher successivement de la partie la plus avancée du rein, et se porter isolément vers le déférent, dans lequel *ils se terminent.* » J'ai vainement cherché, pour mon compte, ces conduits, et j'avoue qu'il ne me semble pas possible de les avoir confondus avec d'autres organes, puisque l'injection colorée que j'ai fait pénétrer dans les divers conduits me les a toujours fait reconnaître et distinguer facilement les uns des autres. D'ailleurs, si ces premiers conduits de l'urine, au nombre de cinq, provenaient véritablement du rein, ne devrait-on pas voir, sur des préparations bien faites et complètes, que la portion antérieure

des reins manque de conduits urinaires excréteurs? Or les uretères, que l'on injecte facilement par les orifices du tronc commun, desservent très-bien tout le rein jusqu'à leur partie la plus avancée dans la cavité abdominale (voy. fig. 2), et cette circonstance suffit pour faire admettre que tous les conduits urinifères se réunissent entre eux. S'il en était autrement, et si les cinq premiers tubes allaient véritablement déverser l'urine dans le déférent; il est évident qu'il manquerait à la partie la plus antérieure des reins les conduits de l'uretère, et pourtant on les trouve colorés de la même substance que les autres. Il ne peut donc pas y avoir de méprise quand on s'est servi d'injection pour démêler tous les conduits vasculaires, spermatiques et urinaires, qui suivent souvent le même parcours chez le triton. Du reste, Ratké et de Fay, qui n'ont pas fait usage d'injections, ont pris tout l'appareil des uretères pour des vésicules séminales, s'appuyant, d'une part, sur l'aspect laiteux des urines au moment du rut, et de l'autre, sur la disposition des uretères, qu'ils croyaient adossés simplement par leur partie terminale au bord externe des glandes urinaires. D'autre part, l'absence de spermatozoïdes dans ces urines troubles, constatée déjà en 1824 par MM. Prévost et Dumas, et la continuation évidente des tubes urinaires jusque dans la substance même des reins, sont des faits qui viennent à l'appui de l'opinion que je soutiens. Il demeure donc bien établi, d'après mes recherches, que les déférents ne reçoivent point d'uretères, et que ceux-ci, qui proviennent tous de la substance des reins, vont déboucher directement dans le cloaque, à côté des déférents. Je reviens actuellement sur le mode de terminaison des conduits spermatiques et urinaires dans le vestibule génito-excrémentitiel. Les premiers, ai-je dit, s'effilent un peu en arrivant sur la partie renflée du rectum, traversent sa paroi supérieure, et viennent s'ouvrir au sommet de papilles érectiles très-rapprochées l'une de l'autre, et presque sur la ligne médiane. Leur disposition est telle, que les sommets libres convergent l'un vers l'autre, et qu'ils dépassent un peu le repli muqueux qui correspond au sphincter interne; je dis le sphincter

interne, car c'est au delà de ce cercle ou anneau resserré à la manière d'une bourse à lacets que débouche le col vésical (voy. *c, d'*, fig. 3) dans le vestibule génito-excrémentitiel. Celui-ci se trouve par conséquent limité entre ce point et l'orifice commun des voies génitale, urinaire et rectale. D'après cette détermination, il est évident que les papilles sexuelles ont leur base fixée dans la cavité du rectum, ou pour parler plus exactement, dans la partie froncée du sphincter supérieur. C'est aussi dans ce même point que débouchent les uretères à l'aide de quatre petits orifices, placés deux de chaque côté de l'axe médian et à la base des papilles sexuelles. Il semblerait, d'après cela, que les déférents et les uretères n'aboutissent pas comme la vessie dans le vestibule commun, et que le véritable cloaque se trouverait au-dessus du sphincter supérieur du rectum; mais s'il est vrai que les organes spéciaux du sperme et ceux de l'urine sont situés sur les limites du gros intestin, la disposition des papilles sexuelles et celle des orifices urinaires, jointes à l'admirable arrangement du vestibule commun, font que les produits qu'ils émettent au dehors passent immédiatement dans la région vestibulaire. Pour avoir une idée bien précise des faits que j'avance, il faut préalablement inciser toute la partie comprise entre l'orifice externe du vestibule commun et le sphincter rectal supérieur (voy. fig. 3). Cette préparation fait voir qu'il y a une ligne de démarcation bien évidente, bien tranchée et bien déterminée par les plis de la muqueuse, qui sépare la cavité contenant les fécés de celle où aboutissent, sans s'y arrêter, tous les produits excrémentitiels et le fluide séminal. Sur la ligne médiane et sur la paroi supérieure du vestibule commun, existe une espèce de raffé disposé en saillie, qui s'étend depuis le sphincter interne jusqu'à un petit cul-de-sac placé à l'entrée du vestibule (*a*, fig. 3). Cette cloison incomplète, qui fait saillie jusque dans le sphincter supérieur, et qui se trouve en rapport avec les papilles sexuelles, laisse à droite et à gauche une rainure ou sillon assez profond qui sert évidemment à diriger le sperme et à le conduire dans un lieu déterminé. D'après cela, le raffé médian en question devient l'ana-

logue de la crête urétrale des mammifères. De plus, les sillons qu'elle détermine à droite et à gauche permettent à l'urine qui sort des uretères de passer librement dans le réservoir vésical, dont le col est placé sur la paroi inférieure du vestibule, c'est-à-dire sur la partie déclive et en avant d'une large gouttière qui se termine au point correspondant au cul-de-sac vestibulaire dont j'ai déjà parlé. D'après la disposition anatomique des organes que je viens de décrire, il résulte que le sperme et l'urine peuvent passer l'un après l'autre ou simultanément à l'époque du rut par les gouttières vestibulaires, et que dès lors ces produits doivent ou s'accumuler dans la vessie ou bien sortir immédiatement au dehors. C'est pour cela que M. Duvernoy a pu rencontrer des spermatozoïdes dans la vessie. Ils peuvent aussi exceptionnellement refluer jusque dans les uretères, et c'est ce qui explique, jusqu'à un certain point, la détermination de vésicules séminales que Bidder et J. Müller leur ont donnée; mais cette détermination est inadmissible quand on a une idée précise des organes qui composent les appareils génito-urinaires des tritons. Je disais tout à l'heure que le sillon vestibulaire sert à conduire et à diriger le sperme, et que le sillon de la paroi inférieure du vestibule est destiné à conduire l'urine dans la vessie et à faciliter son émission, quand cet organe se contracte. Ces deux demi-canaux, par conséquent, servent au passage du sperme et de l'urine, et de plus, ils sont comme affrontés l'un à à l'autre. Ils constituent donc, fonctionnellement parlant, un canal urétro-sexuel, émettant tantôt l'urine, tantôt le sperme, ou bien les deux produits en même temps, quand l'époque du rut est venue. Le mélange fort remarquable de l'urine et du sperme se retrouve ici comme chez les reptiles sauriens et ophidiens, quoique la fonction de la fécondation ne s'exécute pas absolument de la même manière. Il y a plus encore, chez le triton, car cette urine et ces spermatozoïdes doivent nécessairement se mélanger avec le produit prostatique qui reparaît en abondance chez ces vertébrés, dans le but bien évident de diluer encore davantage les corpuscules fécondants. On doit ajouter à ces moyens

de divisibilité de la matière, l'eau dans laquelle les produits spermatique, urinaire et prostatique, se dissolvent avant d'arriver sur l'œuf que la femelle vient de déposer. Cette fécondation extérieure [1], que le célèbre Rusconi a si bien étudiée et admise, quoique réfutée encore par quelques naturalistes, est absolument analogue à celle des poissons en général. Aussi voyons-nous la nature attentive leur donner tous les moyens nécessaires pour accomplir régulièrement l'acte reproducteur. D'abord des glandes spermagènes, volumineuses, et à lobes distincts fonctionnant séparément; puis, le mélange de la liqueur fécondante avec l'urine, la liqueur prostatique et l'eau, le tout dans le but de multiplier les points de contact entre les produits sexuels mâle et femelle. L'urine arrive donc dans la vessie bilobée (*c*, fig. 2, 3 et 3′), à l'aide d'une gouttière du vestibule génito-excrémentitiel, et en sort par cette même gouttière, qui se prolonge en arrière jusqu'au sommet du gland (*a′*, fig. 3) au-dessus de cet organe, ce qui établit un véritable *épispadias*. Les orifices des uretères, au nombre de quatre, comme je l'ai déjà dit, conduisent dans un réservoir commun où aboutissent tous les conduits urinifères (*b*, fig. 2). Après cet arrangement si parfait des parties profondes du vestibule commun, on trouve à son entrée le gland imperforé (*a*, *a′*, fig. 3, 3′). Cette masse érectile, logée dans une excavation des lèvres vestibulaires, bouche assez exactement l'orifice commun du vestibule; toutefois, on aperçoit en arrière, quand ces lèvres cloacales sont fortement écartées, un petit orifice oblong qui conduit dans le sillon vésical. Cette ouverture constitue donc le méat urinaire, et livre passage à l'urine et au sperme. Quant aux ma-

[1] Pour avoir la certitude que les œufs du triton ne sont pas fécondés dans les oviductes avant la ponte, j'ai extrait de ces conduits un grand nombre d'œufs qui étaient sur le point de sortir, et je les ai placés dans la même eau des étangs d'où j'avais retiré les tritons en plein rut. Jamais ils n'ont produit de têtards. La même expérience a donné de bons résultats quand les œufs ont été mis en contact avec le sperme extrait de tritons encore vivants. Du reste, le petit organe sexuel du mâle n'est point, à vrai dire, une verge; c'est tout au plus, comme je l'indique, un gland imperforé impropre à l'accouplement.

tières stercorales, elles ne peuvent sortir du vestibule commun qu'après avoir soulevé l'extrémité libre du gland, qui fait fonction de soupape. Cet organe, en effet, qui s'implante sur le pubis à l'aide d'un pédicule fibreux, s'élargit bientôt en forme de champignon, et c'est toute cette portion fibro-vasculaire qui fait l'office de valvule. L'espèce de voûte dans laquelle se trouve renfermé le gland est tapissée d'une membrane muqueuse, lisse et très-vasculaire. En dehors de cette région ou compartiment spécial, on voit de chaque côté une multitude d'orifices cachés au fond de lamelles membraneuses, dont la forme et la disposition sont souvent fort bizarres. Tous ces orifices conduisent dans la glande prostate et dans les glandules de la muqueuse. Enfin, sur la paroi supérieure du vestibule, existe le cul-de-sac dont j'ai parlé en décrivant la crête urétrale. Le bord libre de ce capuchon est plissé d'une manière fort régulière, ce qui dénote la présence d'un petit sphincter sous-muqueux, destiné à fermer l'orifice auquel il correspond. Or cet orifice est précisément celui qui est placé à l'extrémité libre du gland, et que l'on voit si bien sur la partie la plus reculée du vestibule génito-excrémentitiel (*a*, fig. 3′). D'après cela, le méat urinaire peut, à volonté, retenir ou émettre les produits urinaires et spermatiques qui sont accumulés derrière le gland. Il résulte ensuite, tant de cette disposition que de celle qui est relative aux orifices prostatiques, que le produit de ces glandes est porté, non plus dans le canal de l'urètre, comme cela s'observe ordinairement; mais bien au delà du méat urinaire, à l'embouchure du vestibule génito-excrémentitiel.

Il me reste actuellement à décrire la prostate. Cet organe se compose de six lobes glandulaires bien distincts les uns des autres : deux que l'on peut appeler abdominaux, et qui semblent confondus sur la ligne médiane (*b*, fig. 3′); et quatre, que l'on peut désigner sous le nom de vestibulaires. Tous ces lobes, situés trois de chaque côté de l'axe médian du corps, se composent de tubes plus ou moins longs et plus ou moins sinueux, qui présentent une ampoule ou renflement glandulaire assez analogue aux

tubes séminifères des testicules du triton, et qui se terminent séparément à l'entrée du vestibule commun. La substance laiteuse que contiennent les lobes de la prostate semble être de nature albumineuse, comme celle des prostates en général ; elle est de plus très-odorante et d'une consistance aqueuse.

B. Chez la femelle du triton à crête, les ovaires, au moment du rut, remplissent presque la totalité de la cavité abdominale : ils constituent une masse oblongue d'un beau jaune clair, qui se présente tout d'abord sous le scalpel quand on ouvre l'abdomen. Cette masse se compose de deux parties symétriquement placées sur l'axe du corps : chacune d'elles est formée de trois lobes bien distincts (fig. *A*), qui tiennent l'un à l'autre à l'aide de prolongements étroits du tissu ovarien et de nombreux vaisseaux sanguins ; ceux-ci forment, en se ramifiant sur les ovaires, un des plus admirables réseaux qu'on puisse voir ; chaque ovule ensuite est entouré d'un tronc principal, dont la disposition est pentagonale (fig. *D*). Les branches qui en proviennent et les derniers ramuscules de ces vaisseaux constituent une sorte de trame à mailles très-fines qui renferme l'ovule de toutes parts ; la saillie que celui-ci présente à la surface de l'ovaire n'est pas très-prononcée, parce que les œufs se développent beaucoup plus vers le centre de l'organe que vers sa périphérie. Les artères et les veines qui se distribuent à l'ovaire envoient de nombreuses ramifications dans un panicule graisseux qui avoisine l'ovaire. Ces masses graisseuses, analogues à celles qui existent chez le mâle autour des glandes spermagènes, auraient encore pour fonction, d'après M. Duvernoy, de servir au développement du jaune. Ce qu'il y a de bien certain, c'est qu'elles suivent le même accroissement que les ovaires, et que la couleur de ce tissu adipeux est absolument la même que celle du vitellus. Un mésovaire très-étendu maintient tous les lobes de la glande ovigène, et les fixe de chaque côté de la colonne vertébrale. Lorsqu'on incise les parois des ovaires, on voit que celles-ci sont extrêmement minces, et que chaque lobe constitue une poche spacieuse, dans laquelle les ovules sont en saillie. Le plus grand nombre de

ceux-ci présentent un véritable pédicule, ce qui les constitue en grappe comme les ovules des oiseaux, avec cette différence que les premiers sont en relief sur la face interne du sac ovarien, tandis que les seconds le sont à la surface externe de la glande ovigène. Ce développement en sens inverse sur l'organe reproducteur dépend surtout de la disposition du stroma, qui est en masse chez les mammifères et les oiseaux, en nappe et d'une minceur extrême chez les amphibiens. Les trois cavités de chaque ovaire communiquent entre elles de manière à former une grande excavation ou loge commune close de toutes parts. On peut s'assurer très-aisément de cette disposition en insufflant de l'air dans l'un des trois lobes ; à l'instant même les autres se gonflent et restent distendus. Cette détermination est importante à signaler, par la raison que quelques anatomistes ont cru pouvoir établir que les sacs ovariens des tritons offrent en avant une ouverture naturelle par laquelle les ovules passent pour tomber dans la cavité abdominale. Cette prétendue communication n'a été admise que parce qu'on ne connaissait pas d'une manière exacte et précise le mode de déhiscence de l'ovule. Quand on ouvre les loges qui composent l'ovaire des tritons, on voit (fig. *B*) qu'un grand nombre d'ovules sont en saillie sur leur face interne ; tandis que les plus gros sont pédiculés, et que les plus petits de tous ne semblent pas même soulever la membrane qui les renferme. On assiste par conséquent alors à toutes les phases du développement des œufs, et on a sous les yeux l'organe ovarien le plus facile à étudier ; aussi peut-on se faire une idée bien exacte du mode de formation de l'œuf, de son accroissement successif et de son passage à travers les enveloppes qui le recèlent. Quand on soumet au microscope simple une portion de la glande ovigène, on aperçoit une multitude de petits œufs qu'on ne distingue pas bien à l'œil nu, et que l'on prend pour de petites taches, tant la membrane du sac ovarien est transparente. Toutes les granulations que l'on voit sont donc des ovules, et ces ovules sont toujours au centre d'un réseau vasculaire dont les troncs principaux qui l'entourent, artères et veines, ont la forme penta-

gonale. Indépendamment de ces vaisseaux sanguins, que l'injection montre à merveille, il y a une trame fibreuse très-fine, une sorte de toile d'araignée qui enveloppe l'ovule entièrement. La direction des fils qui la composent a quelque chose d'assez régulier dans sa disposition; c'est un tissu dont les mailles se croisent de telle sorte qu'on peut admettre l'existence de deux feuillets membraneux superposés l'un à l'autre. C'est entre ces feuillets, maintenus en rapport par les radicules vasculaires qui les traversent en tous sens, que se trouvent les ovules. Ce stroma de l'ovaire contient très-peu de tissu cellulaire, il est recouvert d'un feuillet péritonéal qui l'entoure de toutes parts, et qui, ensuite, par son adossement, constitue le mésovaire dont il a été question. Lorsqu'on dégage un ovule encore transparent du stroma qui le renferme, et qu'on l'examine à un grossissement de quarante ou cinquante diamètres, on le trouve composé de deux sphères concentriques. Quand on parvient, à l'aide d'aiguilles très-fines, à rompre la première sphère, composée de la membrane vitelline et d'un liquide albuminoïde très-fluide et très-transparent, on voit immédiatement, sur le porte-objet, une plus petite sphère que le liquide entraîne : c'est la vésicule germinative. Cette petite sphère peut se comparer, à cause de la minceur de ses parois surtout, à une bulle de savon : aussitôt qu'on la touche avec une aiguille elle se rompt, et alors on ne voit plus sur la plaque de verre où elle était posée qu'une gouttelette de liquide transparent. Il n'y a sur le porte-objet aucune trace visible de membrane, de quelque manière qu'on dispose le microscope, eu égard à la lumière qu'on dirige sur l'objet. Cette membrane existe pourtant, et l'on peut la retrouver sur les ovules qui ont déjà l'aspect granuleux et la couleur jaune-clair ; elle est alors un peu plus consistante, toujours très-transparente, et assez analogue, à la densité près, à la membrane vitelline. Sa présence, sur le porte-objet, se manifeste par les petits plissements qu'elle forme quand elle n'est plus distendue par le liquide albumineux qu'elle contenait. Ainsi, dans l'origine, l'ovule se compose de la sphère vitelline et de la sphère germinative emboîtées l'une

dans l'autre. Leur diamètre est peu différent : celui de la première est à peine d'un quart plus grand que l'autre. La disposition relative de ces deux sphères est assez variable : l'interne est placée au centre dans les premiers temps; elle perd ensuite petit à petit ses rapports à mesure que l'ovule se développe, et finit par se trouver en contact avec la sphère externe. Tous ces changements coïncident avec la coloration diverse que prennent les ovules, et cette coloration, qui varie du blanc mat au jaune foncé, tient à la métamorphose que subissent les parties constituantes. D'après cela, l'ovule le plus petit et le plus transparent en même temps renferme des globules albumineux, rendus visibles par le contact de la baryte. Ceux qui perdent leur transparence contiennent des vésicules assez analogues à des bulles de savon, et sont infiniment petites, eu égard à la vésicule germinative. Au moment où ces vésicules apparaissent, les ovules, qui deviennent jaunâtres, sont constitués de vésicules semblables aux précédentes, quant au volume, et renferment déjà des corpuscules opaques ou granules qui se déposent au fond du liquide albuminoïde contenu encore dans ces vésicules. A mesure qu'on examine les ovules plus colorés en jaune, on remarque que les granules, déposés dans chaque vésicule, augmentent en nombre et un peu en volume, et qu'ils finissent par les remplir entièrement. Les parties granulées ainsi accumulées dans chaque vésicule primitive constituent, avec la matière huileuse, le vitellus; elles deviennent aussi l'élément fondamental du blastoderme, quand leur enveloppe disparaît pour laisser à nu les matériaux primitifs du nouvel être. C'est en effet au milieu des granulations de la sphère germinative que paraît le travail de segmentation, et que le blastoderme entre en activité créatrice. Ce phénomène, toutefois, ne commence qu'à partir du moment où le fluide séminal a été mis en contact avec l'ovule, ce qui, chez le triton, n'a lieu qu'après la ponte, ainsi que je l'ai dit au commencement de ce chapitre. Je ne reviendrai pas ici sur les modifications que l'ovule présente relativement aux taches de Wagner; celles-ci proviennent de matières organiques opaques accumulées dans les vésicules primitives

de la sphère germinative. Les transformations, ensuite, de toutes les vésicules en substance vitelline, par l'addition de granules et de globules huileux, troublent la transparence de l'ovule et empêchent de voir les changements ultérieurs de la sphère germinative, qui est de plus en plus refoulée vers un point déterminé de la sphère vitelline. Lorsque l'ovule a pris tout son développement dans l'ovaire, la capsule qui le contient et qui constitue le calice se déchire pour lui livrer passage ; il arrive alors dans la cavité abdominale où on le rencontre très-fréquemment à l'état libre, tantôt entre les ovaires et les intestins, tantôt caché dans les circonvolutions que forme l'oviducte, et tantôt enfin entre le poumon et les parois abdominales. Cet œuf, ainsi errant dans la cavité ventrale, cherche une issue, et il ne peut la trouver que lorsqu'il rencontre l'ouverture du pavillon de la trompe. Cette bizarrerie fonctionnelle, que je signale pour la première fois dans cet ouvrage, provient, comme je vais le démontrer tout à l'heure, de ce que le pavillon est fixé au sommet de la cavité abdominale au lieu d'être libre, fait important et qui, au point de vue physiologique, sera discuté plus tard. Qu'il me suffise de dire pour le moment que je le regarde comme conduisant à une dégradation réelle du plan général des vertébrés.

Le tube oviducte du triton s'étend depuis la partie avancée de la cavité abdominale jusqu'au vestibule génito-excrémentitiel, et décrit dans ce trajet un grand nombre de circonvolutions dirigées en tous sens ; son extrémité antérieure ou pavillon est fixée, par des prolongements du péritoine, au sommet de la cavité abdominale, un peu au-dessous du poumon, entre celui-ci et les parois musculaires du ventre. La disposition de cette partie de l'oviducte est assez conforme à ce qui existe chez les mammifères, les oiseaux et les reptiles ; c'est une boutonnière dirigée obliquement d'avant en arrière, qui se continue avec une partie évasée ; les bords du pavillon, non frangés, sont toujours rapprochés l'un de l'autre quand on ouvre la cavité abdominale pour l'examiner. Le rapprochement est même si grand alors, qu'on a vraiment de la

difficulté à trouver l'orifice de l'oviducte. Cela prouve évidemment, il me semble, que le pavillon ne peut devenir béant pour recevoir l'ovule que par la contraction des fibres musculaires qui entrent dans sa composition. Ce sont surtout celles du plan circulaire qui doivent agir dans ce cas, et, dès lors, on conçoit l'utilité qu'il y a à ce que l'un des points d'attache de la boutonnière se fixe sur un organe facile à déplacer et susceptible lui-même de varier de forme et de position ; le poumon, d'après cela, se prêterait singulièrement au jeu du pavillon, et faciliterait, par son action incessante, le passage du petit œuf dans l'oviducte. Si cette mobilité des angles du pavillon n'existait pas, la contraction des muscles circulaires de l'oviducte tendrait sans cesse à fermer son ouverture. Ainsi l'occlusion permanente du pavillon constitue l'état passif de l'organe, et sa dilatation le seul mouvement actif. D'après cela, la trompe utérine a perdu, chez le triton, la faculté de se porter à droite ou à gauche, et de se diriger sur l'ovaire pour s'y adapter au moment de la déhiscence de l'œuf. Ce n'est donc plus cet organe qui va à la rencontre de l'ovule, mais bien celui-ci, qui va au-devant de lui. Or ce fait semble ne pouvoir s'expliquer qu'en admettant, de la part des oviductes, une action toute spéciale non encore bien déterminée, qui consisterait à exercer sur l'ovule une sorte d'aspiration. L'action des poumons pendant l'acte respiratoire pourrait bien avoir une certaine influence sur ce phénomène, en établissant un flux et un reflux des organes abdominaux, et surtout de l'oviducte, qui a des rapports si intimes avec l'appareil respiratoire. Quoi qu'il en soit de ces suppositions, il est certain que le pavillon de la trompe a perdu sa faculté locomotrice, si l'on peut parler ainsi ; il n'a plus qu'une action contractile qui est propre à faire cheminer l'ovule vers le conduit ovarien quand celui-ci s'y est engagé. Immédiatement après l'évasement de la trompe, l'oviducte est constitué par un tube presque cylindrique dans toute son étendue, qui va un peu en diminuant de calibre jusqu'au point de son embouchure dans le rectum. On voit sur la paroi externe, surtout quand il y a des œufs

dans le conduit, de nombreux petits sillons, placés longitudinalement, entre chaque renflement qu'occupent les œufs. Ces sillons sont le résultat évident de la contractilité de l'oviducte, qui tend sans cesse à faire cheminer le produit ovarien vers le vestibule génito-excrémentitiel. Ces sortes d'étranglements ne s'observent que dans le quart postérieur de son parcours, là où les œufs ont déjà acquis tout leur développement. C'est aussi dans cette partie du tube ovarien que l'on rencontre le plus souvent les œufs (fig. 1, *c*), d'où l'on peut conclure que les trois quarts antérieurs de l'oviducte sont franchis assez rapidement. Lorsqu'on examine ce conduit à l'intérieur et à une époque voisine de la ponte des tritons, on voit qu'il est gorgé de mucosités épaisses, d'une transparence parfaite et d'une viscosité égale à celle du blanc d'œuf de la poule. Toute la muqueuse de l'oviducte, depuis le pavillon jusqu'au vestibule commun, est comme boursouflée et légèrement rosée; on remarque à sa surface de nombreux petits orifices, desquels on fait sortir, par pression, une substance analogue à celle qu'on rencontre dans le tube, et qui provient des glandules de la muqueuse. C'est au milieu de ce produit que se trouvent les œufs à des degrés divers de développement. Ceux qu'on rencontre quelquefois dans le voisinage de la trompe sont constitués de la même manière qu'au moment de leur déhiscence de l'ovaire; ceux, au contraire, qui ont déjà parcouru une étendue plus grande de l'oviducte, sont entourés d'une espèce de coque très-transparente, sphérique et assez résistante. Enfin, les œufs qui ont atteint le quart inférieur du tube ovarien sont constitués par la sphère vitelline, par une membrane propre qui renferme le vitellus et la vésicule germinative, et par une coque qui est devenue ovoïde, plus résistante, très-élastique et d'une transparence toujours parfaite. Cet œuf, à l'état parfait, est encore entouré d'une couche albumineuse, liquide et très-gluante. La coque transparente de l'œuf du triton se forme dans l'oviducte à mesure que le produit ovarien chemine vers le vestibule commun; elle est d'abord très-intimement appliquée sur le vitellus, et quand elle s'est condensée suffisamment, on la

voit s'en détacher petit à petit par l'effet de l'endomose. Le liquide contenu entre cette coque et la sphère vitelline, muni de sa membrane propre, est albumineux, ainsi qu'on peut s'en assurer en le mettant en contact avec la baryte. C'est dans ces conditions que l'œuf est pondu, et qu'il reçoit l'imprégnation du mâle. Quand on en dépose un certain nombre dans l'eau avec des spermatozoïdes, on obtient souvent une fécondation artificielle; quand, au contraire, on les plonge dans ce même liquide sans spermatozoïdes, on ne voit jamais arriver l'évolution fœtale, ce qui aurait pourtant quelquefois lieu si la fécondation était intérieure. Enfin, lorsqu'on enlève la coque sur des œufs fécondés naturellement, on abrége de quelques jours l'évolution embryonnaire. Toutes ces expériences, répétées un grand nombre de fois et exécutées sur plusieurs centaines d'œufs, ont une valeur réelle qu'on ne saurait contester, à moins de preuves contraires.

J'arrive maintenant au mode de jonction de l'oviducte avec le rectum. Lorsque ce tube conducteur et sécréteur en même temps est parvenu au point le plus reculé de la cavité abdominale, il se place entre le rachis et la paroi supérieure du rectum : là il se coude assez brusquement, et s'implante, à angle presque droit (fig. 1,*f*), dans le gros intestin, de manière à former une véritable croix. Chaque oviducte s'ouvre dans le rectum, au sommet d'une sorte de papille sexuelle qui, à vrai dire, est plutôt la continuation de ce tube lui-même. Ces petits conduits, de deux millimètres environ de longueur, convergent l'un vers l'autre, en sorte que les orifices se trouvent en regard (fig. 1, 2); une cloison médiane, qui s'étend depuis l'origine de ces conduits dans le rectum jusqu'à l'angle postérieur du vestibule génito-excrémentitiel, les sépare l'un de l'autre. Cette espèce de crête médiane est assez saillante pour pouvoir donner aux œufs qui sortent des oviductes une direction déterminée. En arrière de ces tubes se voit le bourrelet cloacal, qui sépare et limite très-nettement le vestibule génito-excrémentitiel du rectum ; son bord libre est frangé, et les nombreux plis qui y aboutissent témoignent de son action constrictive.

Entre ce sphincter et la base des conduits ovariens, on voit de chaque côté de la crête deux petits orifices (*b*, fig. 2); ce sont ceux des uretères (*f*, *f*). En arrière du sphincter, enfin, et dans le vestibule génito-excrémentitiel, s'ouvre sur la paroi inférieure le col vésical (*c*, fig. 2). La cavité vestibulaire, assez lisse, est tapissée par une membrane muqueuse présentant plusieurs orifices glandulaires qui lui sont propres. D'après toutes les dispositions et les rapports qui précèdent, les oviductes doivent émettre leurs produits directement dans le vestibule commun, et les uretères doivent verser l'urine dans la vessie (*c*, fig. 3), qui est placée au-dessous de ces conduits. Ce réservoir, à son tour, peut émettre l'urine à volonté, en lui faisant traverser simplement le vestibule; de cette manière, celui-ci ne sert que de passage aux produits génito-urinaires et aux fécés. Comme on le voit, l'arrangement du vestibule est ici absolument le même que celui du triton mâle, à l'exception près des conduits et glandes prostatiques, qui manquent. Cette région, du reste, est bien plutôt une continuation du rectum qu'une dépendance des organes génitaux et urinaires, comme on l'a dit.

En résumé :

La distinction des appareils sexuels du triton ne se traduit pas au dehors par des signes certains.

Au dedans, la similitude n'existe plus, et l'aspect des organes formateur et conducteur du sperme est tout à fait différent de la glande ovigène et des oviductes.

Les glandes spermagènes sont situées très-avant dans la cavité abdominale. Elles se composent de plusieurs lobes de chaque côté, et sont constituées par des tubes séminifères presque droits, renflés à leur extrémité libre, et aboutissant tous dans un réservoir commun ou corps d'Hygmore.

De ce réservoir commun se détachent plusieurs troncs qui vont, les uns constituer l'épididyme, et les autres directement dans le déférent.

Au point de jonction de ces deux parties du même conduit,

l'épididyme et le déférent, existe un prolongement ligamenteux qui fait partie de l'appareil reproducteur.

On trouve dans les conduits séminifères du testicule des capsules contenant des spermatozoïdes à divers degrés de développement, et dans tout le spermiducte ces mêmes corpuscules mieux caractérisés.

Chaque déférent débouche dans le vestibule génito-excrémentitiel à l'aide d'une papille sexuelle implantée sur la dernière limite du sphincter supérieur.

Le produit spermatique qu'ils transmettent va directement dans une gouttière du vestibule commun; celle-ci constitue, avec un autre sillon du même genre aboutissant à la vessie, un canal urétro-sexuel.

Ce canal est divisé dans toute son étendue par une sorte de crête urétrale.

Les uretères débouchent à la base des papilles sexuelles de chaque côté de la crête urétrale, en avant du sillon vestibulaire, qui leur sert également de moyen de communication avec le réservoir urinaire.

A l'époque du rut, le sperme et l'urine peuvent arriver dans la vessie, ou bien passer dans le dernier compartiment du vestibule génito-excrémentitiel, où ils rencontrent le fluide prostatique.

Les glandes prostates, constituées par six lobes distincts, versent leur produit dans le dernier compartiment du vestibule commun.

Le mélange du fluide prostatique avec le sperme n'a lieu, par conséquent, qu'après que l'urine a déjà servi de véhicule dissolvant au produit fécondateur.

Chaque œuf du triton est fécondé au moment même de la ponte.

Il n'y a pas de verge copulatrice; c'est tout au plus un gland imperforé qui ne dépasse jamais l'ouverture du vestibule génito-excrémentitiel.

Le conduit urétro-sexuel aboutit à la partie supérieure du gland, et constitue ainsi un véritable *épispadias*.

La muqueuse du vestibule et les fibres musculaires du sphincter externe concourent à la formation d'un méat urinaire contractile.

Les deux glandes ovigènes se composent chacune de trois lobes distincts, à cavité commune, dans laquelle les ovules font saillie.

Il n'y a aucune issue naturelle pour le passage des œufs, et c'est toujours par une déchirure spéciale que s'opère la déhiscence.

Le stroma de l'ovaire est constitué par une trame fibreuse des plus minces, qui fournit à l'ovule un véritable calice.

Chaque produit ovarien est constitué, au moment où il se sépare de la glande, d'une sphère vitelline et d'une sphère germinative, toutes deux pourvues d'une membrane spéciale.

Ces productions de l'ovaire tombent dans la cavité abdominale et vont à la rencontre du pavillon de la trompe, qui est fixé à son sommet.

Après que l'ovule s'est engagé dans la trompe, et qu'il a traversé l'oviducte, il s'est enveloppé d'une coque molle, élastique, qui prend la forme ovoïde.

C'est dans ces conditions qu'il est soumis à l'action du fluide fécondant.

L'oviducte, d'après cela, est en même temps un organe de sécrétion, dont le produit s'ajoute à l'ovule pour le compléter.

Les oviductes traversent la paroi supérieure du rectum, et vont s'ouvrir dans le vestibule génito-excrémentitiel, au sommet d'une sorte de papille sexuelle.

Les uretères débouchent également dans le vestibule où aboutit la vessie, de chaque côté d'un raffé médian.

Les rapports des conduits sexuel, urinaire et rectal sont ici entièrement conformes à ceux qui existent chez le triton mâle; il n'y a de différence entre les deux vestibules que l'absence du clitoris

et des orifices prostatiques, qui manquent complétement chez le triton femelle.

§ VIII.

CARPE.

Nous voici arrivés à la cinquième et dernière classe des vertébrés, pour laquelle j'ai encore choisi les espèces qu'indique le programme de l'Académie; à savoir : la carpe pour les poissons osseux, le squale émissole, les lamproies et les myxines pour les poissons cartilagineux. Dans cette grande classe, les glandes spermagènes et ovigènes présentent de telles différences, quand on les compare avec les divers groupes qui la composent, qu'on a pu établir trois types distincts se rapportant, le premier, aux espèces dont les glandes et les spermiductes ont la même organisation que celles des animaux supérieurs; le second, aux espèces qui ont une glande spermagène et ovigène en forme de sac, et dont le canal excréteur est une continuation de sa cavité; le troisième, enfin, aux espèces qui n'ont plus de canal excréteur pour émettre les produits des glandes spermagènes et ovigènes. A ces divisions déjà admises dans la science correspondent, d'une manière plus ou moins complète, les descriptions qui me sont propres, et qui toutes ont été faites d'après des études nouvelles accompagnées de dessins originaux.

Relativement à la carpe, on trouve peu de travaux spéciaux concernant l'anatomie et la physiologie de ces animaux. C'est surtout en ostéologie et en myologie que les recherches ont été faites. Toutefois celles de Müller, de Stannius, de Hallmann, de Cavolini, de Duvernoy, etc., ont trait plus particulièrement aux fonctions des appareils reproducteurs mâle et femelle des poissons osseux, en général, et à la nature de leurs produits glandulaires. Mais aucun de ces auteurs n'a envisagé la question au point de vue de l'analogie des organes, considérée dans les deux sexes, et de leur dégradation dans la série des animaux vertébrés. Les

appareils mâle et femelle de la carpe permettent de reconnaître aisément les sexes quand on les compare dans leur ensemble; mais au dehors, il y a similitude parfaite. En effet, on trouve sur la région ventrale, tant chez le mâle que chez la femelle, trois orifices très-rapprochés les uns des autres et cachés dans les plis muqueux de la marge de l'anus. Ils correspondent, chez les premiers, au rectum, aux déférents et au canal de l'urètre; chez les seconds, au rectum également, à l'oviducte et aussi au canal de l'urètre. L'ordre dans lequel se présentent ces orifices est celui que je viens d'indiquer en les énumérant; c'est-à-dire, que l'anus est en avant et que le conduit sexuel est au milieu, entre celui-ci et le méat urinaire. Or cette disposition constitue une inversion complète à ce qui existe généralement chez les vertébrés supérieurs. Le réservoir urinaire, qui est toujours situé sous les parois abdominales dans ces animaux, se trouve ici à la place du rectum, sur le rachis. L'oviducte et le spermiducte seulement conservent leurs rapports ordinaires en se plaçant entre la vessie et le rectum. A cette étrange disposition des organes abdominaux, se joint la similitude très-grande du mode de transmission des produits sexuels mâle et femelle. Similitude, du reste, qui fait croire au premier abord qu'il n'y a ni spermiducte, ni oviducte spécial. Ces conduits existent pourtant; mais ils ont perdu toute leur indépendance par rapport aux glandes spermagènes et ovigènes. Les spermiductes, en effet, et les oviductes, ne font plus qu'un avec les testicules d'une part et les ovaires de l'autre, et c'est dans ce sens que l'on peut dire qu'il y a une cavité centrale pour les glandes spermagènes et ovigènes dont les parois servent à conduire les produits. C'est surtout à l'égard de l'oviducte qu'il est possible de s'exprimer ainsi, car il est évident que ce sont bien les parois des sacs ovariens qui en font les fonctions d'une manière absolue. Quant au testicule, c'est plutôt l'absence de l'épididyme que la présence d'une cavité centrale, qui a fait penser que c'est le déférent, très-court chez la carpe, qui sort immédiatement du testicule, et qui aboutit, de chaque côté, dans une cavité com-

mune. Quoi qu'il en soit de cette manière de voir, toujours est-il que les spermiductes et les oviductes se joignent entre eux avant de communiquer au dehors. Cette fusion des appareils reproducteurs s'effectuant sur la ligne médiane n'est pas la seule qu'on remarque chez la carpe, il y a aussi celle des deux reins, confondus en une seule masse, quoique échancrée en avant, et celle non moins remarquable des deux uretères aboutissant à un renflement urinaire considérable. Il n'est pas jusqu'au mode de terminaison des uretères qui ne présente chez la carpe une particularité non encore observée. Ces organes, en effet, que l'on voit aboutir le plus souvent vers le col vésical, débouchent ici au sommet de la vessie urinaire, qui est, dans ce cas particulier, une dépendance bien évidente des uretères, tandis que, chez d'autres vertébrés, elle ne semble plus être qu'un appendice tout au plus de ces mêmes conduits, quoique en fait elle appartienne toujours à cet appareil organique. Ainsi la classe des poissons nous montre déjà, pour ce qui est relatif à la carpe en particulier, que les organes de la reproduction mâle et femelle ont subi des modifications importantes, modifications qu'il faut examiner avec soin, en même temps que l'appareil urinaire, qui est si étroitement uni, chez les deux sexes, avec celui de la génération.

A. Chez la carpe mâle, les deux testicules ou laites sont constitués, à l'époque du rut, par deux masses énormes qui remplissent à elles seules la presque totalité de la cavité abdominale; ces organes, d'inégal volume, le gauche toujours plus gros que le droit, ont une forme oblongue très-irrégulière et s'étendent d'un bout à l'autre de la cavité ventrale. Ils sont en rapport, par leur face supérieure, avec le rein et le paquet intestinal; par la face inférieure avec le gros intestin, qui passe au-devant d'eux, et les parois abdominales. Chaque testicule a une grosse extrémité en avant, et se termine en arrière en s'amincissant beaucoup; ils sont tous deux maintenus en place, plutôt par des prolongements vasculaires nombreux, que par des ligaments péritonéaux particuliers, qui pourtant existent aux deux bouts de chaque glande

surtout; leur aspect est d'un blanc de lait au moment du frai. Les artères et les veines qui se distribuent aux glandes spermagènes constituent à leur surface un admirable réseau sous-péritonéal, qu'on ne peut bien distinguer qu'après avoir injecté les systèmes artériel et veineux. Il est nécessaire aussi de remplir les tubes spermagènes de matière colorante, afin de bien voir leur terminaison à la surface libre du testicule. C'est d'après une préparation de ce genre, déposée au musée Orfila, que j'ai fait le dessin qui accompagne cette description.

Lorsqu'on examine à la loupe la face inférieure des glandes spermagènes (*b, b,* fig. 1, pl. 12), on voit qu'un réseau vasculaire des plus fins circonscrit de petites élevures (*e, e,* fig. B); ce sont elles qui correspondent aux culs-de-sac des tubes séminifères. On les aperçoit également sur la face supérieure des testicules, mais moins bien, à cause de l'inégalité de surface de ces derniers, qui est due, en grande partie, à ce que l'organe reproducteur, étant d'une consistance molle, se moule sur les intestins et les autres viscères abdominaux. Cette région des glandes, du reste, est tellement tourmentée par des saillies, des échancrures et de profonds sillons, qu'on ne saurait, en la voyant isolément, à quoi la comparer. Vers leur partie médiane et dans une rainure particulière plus ou moins flexueuse, se trouve de chaque côté le conduit du sperme; celui-ci s'étend depuis l'extrémité renflée du testicule jusqu'à son extrémité la plus reculée et la plus mince. Là, et au niveau même de leur terminaison, ils se joignent l'un à l'autre de manière à constituer un réservoir commun (*c, c,* fig. 2), qui aboutit au dehors à l'aide d'un seul canal (*b,* fig. *A*). Pour bien connaître ensuite la structure des testicules, il faut, après les avoir dépouillés de la membrane péritonéale et du réseau vasculaire qui les recouvre, faire tomber un filet d'eau sur le point de la laite que l'on veut étudier. C'est par ce seul moyen de dissection qu'il est possible d'isoler les branches et les ramuscules qui partent d'un même tronc (fig. *C*). Toutes ces ramifications ont, par rapport à leur disposition, une grande analogie avec les villosités du

chorion de la brebis (fig. *D*). La partie terminale de chaque tube renflé correspond aux petites ampoules (*e*, fig. *B*) qui sont à la surface du testicule, et ces tubes, ainsi disposés, s'entrelacent les uns les autres pour constituer la substance propre des glandes spermagènes. Ils convergent tous vers un même point de la glande pour aller déboucher dans un conduit commun, qui est le spermiducte. Celui-ci règne, comme je l'ai déjà dit plus haut, le long de la face supérieure des testicules, et va aboutir dans un réservoir séminal. D'après cela, les tubes rameux de chaque glande constituent les organes de formation du sperme; le conduit commun où ceux-ci débouchent est l'analogue du corps d'Hygmore, et le renflement qui résulte de la jonction des deux conduits, une vésicule séminale; c'est elle qui débouche entre l'anus et le méat urinaire, à l'aide d'un petit canal, dont il a déjà été question. De cette manière il n'y aurait point d'épididyme, ni même de conduit déférent, à moins qu'on ne veuille nommer ainsi celui qui reçoit tous les canaux séminifères et que je considère, par cela même, comme l'analogue du corps d'Hygmore. Dans tous les cas, les deux spermiductes dont il s'agit ici constituent, par leur fusion, une cavité assez spacieuse, dans laquelle s'accumule une grande quantité de spermatozoïdes très-bien développés. La face interne de ce réservoir séminal est criblée de petits orifices (fig. *A*) qui conduisent à des glandules de la muqueuse; ces mêmes lacunes membraneuses se rencontrent également, mais en moins grand nombre dans les conduits spermagènes, et donnent passage à une humeur visqueuse qui se mêle au sperme. Enfin, à la partie terminale du réservoir séminal, existe un petit sphincter qui règle la sortie de la liqueur spermatique et qui peut fermer complétement l'orifice sexuel. Un peu plus en arrière de celui-ci, se voit le méat urinaire, également garni d'un sphincter particulier, qui conduit à la vessie immédiatement, et en avant, l'ouverture anale garnie d'un sphincter externe qui lui est propre. Ces trois orifices sont, d'après cela, entièrement indépendants les uns des autres et peuvent fonctionner isolément. Les espèces de lèvres anales, ensuite, qui cachent

les ouvertures sexuelle, urinaire et rectale, sont une dépendance de la muqueuse du rectum, qui s'avance à droite et à gauche de la marge de l'anus pour protéger l'entrée des conduits urétro-sexuel et stercoral. Elles constituent ainsi un vestibule génito-excrémentitiel très-rudimentaire, tant chez le mâle que chez la femelle. Avant de passer à la description des organes génitaux et urinaires de la carpe femelle, il est bon d'ajouter que les uretères sont situés l'un à droite, l'autre à gauche de la masse rénale, au côté externe par conséquent de chaque rein, tandis que, chez les vertébrés supérieurs, ils sont toujours placés au côté interne de ces organes.

B. Chez la carpe femelle, au moment de la ponte, on trouve la cavité abdominale remplie d'œufs. Les parois du ventre, devenues très-minces, sont distendues par les deux masses ovariennes, qui s'appliquent sur elles. De nombreux vaisseaux et des membranules les maintiennent dans la cavité abdominale et les assujettissent aux parois environnantes. La forme générale des deux ovaires, quand ils sont en place, est triangulaire. Leur base est dirigée en avant, et leur sommet en arrière. Chaque ovaire est libre dans les trois quarts antérieurs; ils se confondent l'un avec l'autre, sur la ligne médiane, dans le reste de leur étendue, ce qui n'a pas lieu pour les glandes spermagènes, qui restent entièrement séparées l'une de l'autre. Les rapports de l'ovaire sont, inférieurement, avec la paroi abdominale et le rectum dans sa partie la plus reculée; supérieurement, avec les intestins, le rein et les autres viscères de l'abdomen. La face supérieure présente, au centre de chaque masse, une dépression qui s'étend jusqu'au quart postérieur de leur étendue en se dirigeant, sous forme de gouttière, de dehors en dedans. Toute cette région (fig. 1, pl. 13), ainsi que celle de la face ventrale, est parsemée de nombreux vaisseaux ovariens qui pénètrent dans son tissu. Lorsqu'on retire les glandes ovigènes de la cavité abdominale, on juge mieux de leur disposition générale et de leur mode de jonction. Celles-ci, d'une forme conique légèrement aplatie, se réunissent sur la ligne médiane

dans leur quart postérieur en formant une espèce de cavité commune, évasée en avant et terminée en arrière par un petit canal fort court, qui débouche entre le méat urinaire et l'anus. C'est dans ce réservoir commun (*h*, *h*, fig. 1) que s'accumulent les œufs quand la déhiscence est opérée. On les voit facilement, alors, au travers même des parois et jusque dans le petit canal excréteur (*b*, fig. 1); lorsqu'on incise ce réservoir, on trouve que les œufs qu'il contient ont acquis le dernier degré de maturité, et que, par conséquent, ils sont aptes à être fécondés. Un peu plus avant, dans les sacs ovariens, on rencontre une innombrable quantité d'ovules, tous adhérents par un pédicule à la membrane proligère ou stroma. Leur arrangement, sur des surfaces que la nature a multipliées à l'infini pour assurer une ponte fertile, est, on ne peut plus régulier. Chaque cloison (*b*, *b*, fig. 3), riche en vaisseaux sanguins, contient des couches d'ovules qui sont rangés comme les pavés d'une rue; à mesure que ces ovules approchent de leur maturité, ils deviennent plus pédiculés, et c'est alors qu'on les croirait fixés par un fil. Lorsqu'au contraire ils sont à peine visibles dans le stroma, on ne remarque pas la moindre saillie à la surface des cloisons ovariennes. La disposition en ruche du tissu proligère s'effectue de telle sorte, qu'il y a, au centre de chaque glande ovigène, un large canal où aboutissent toutes les loges du stroma. Ces loges que l'on aperçoit sur la face supérieure des ovaires (*i*, *i*, fig. 1), et qui se traduisent par de nombreux sillons, sont toutes placées transversalement à l'axe de l'organe et sont elles-mêmes toutes divisées en plusieurs cases représentant de larges alvéoles (fig. 3). L'ensemble de ce vaste réservoir ovarien est clos de toutes parts, au moyen de la membrane péritonéale, qui s'applique très-exactement sur le stroma, ainsi disposé dans le but évident de multiplier les surfaces productrices des ovules. D'après cet ensemble de choses, il est évident que tous les œufs, après leur déhiscence, passent par la cavité commune des masses ovariennes, où ils séjournent fort peu de temps, et sortent par le petit orifice sexuel externe, qui est placé entre l'anus et le

méat urinaire. C'est, comme on le voit, un ovaire creux dont les parois servent d'oviducte; il n'y a plus ici ni pavillon de la trompe, ni conduit de Fallope, ni utérus proprement dit, à moins cependant qu'on ne considère comme tel la loge où aboutissent les deux cavités ovariennes et qui est bien, à la vérité, l'analogue du renflement spermatique de la carpe mâle où se trouvent les spermatozoïdes les mieux développés. Cette déduction, du reste, et cette comparaison entre les parties sexuelles, mâle et femelle, s'apprécieront plus facilement encore lorsque j'aurai indiqué le mode de déhiscence des ovules, et leur état constitutif aux diverses périodes de leur développement. Qu'il me suffise de dire pour le moment, que l'oviducte de la carpe, ou les oviductes réunis n'ont qu'un seul orifice commun : c'est celui du conduit excréteur. C'est sans doute par analogie avec cet orifice naturel, que les auteurs ont dit que pareille communication existe sur les ovaires des salamandres aquatiques et chez le triton à crête en particulier. Mais ils n'ont pas fait attention, en cherchant à admettre cette analogie, que les dispositions organiques des appareils reproducteurs ne sont plus les mêmes; qu'il y a d'une part de véritables oviductes qui fournissent à l'œuf des matériaux utiles à leur formation, et une glande ovigène qui n'est pas en rapport avec l'extérieur; tandis que, de l'autre, on ne voit pas d'oviducte indépendant de l'ovaire, la cavité de la glande aboutissant directement au dehors. Cette différence conduit, chez la carpe, aux résultats particuliers que voici : c'est que les œufs, au moment de leur déhiscence, ne rompent pas la membrane péritonéale de l'ovaire, fait qui est constant chez les autres vertébrés. Ainsi le stroma de la glande ovigène de la carpe, qui forme un calice plus ou moins pédiculé autour de l'ovule, se déchire seul, au moment de la maturité de celui-ci, pour le laisser arriver dans le réservoir ovarien, qui est situé vers la partie la plus reculée de cet organe. Il me reste maintenant à faire connaître la constitution de l'œuf, aux divers degrés de son développement. Pour avoir une idée bien précise du mode de formation des ovules, il faut rechercher les carpes qui ont déjà

produit du frai, ou bien celles dont la ponte ne doit avoir lieu que dans un temps plus ou moins éloigné. Alors on trouve toute la cavité ovarienne vide et comme affaissée sur elle-même; les cloisons qui la traversent, et dont la disposition alvéolaire est si marquée dans la saison du frai, sont à peine indiquées. Examinées une à une avec soin, et à l'aide d'une loupe, on voit de la manière la plus distincte qu'il existe dans la trame vasculaire du stroma, réduit en feuillets, une multitude de granulations, en général transparentes, au centre desquelles il y a une petite sphère, également transparente. Celle-ci est la vésicule germinative emboîtée dans la sphère vitelline. Ce petit œuf en germe se trouve déjà tout formé dans le stroma, à l'état d'élément primitif, pour ainsi dire, de l'ovaire. A cette époque même, la membrane proligère de la glande, pressée légèrement entre deux doigts, fait éprouver la sensation de corps durs offrant une certaine résistance, qui est due à la membrane vitelline, dont la consistance est remarquable. Quand on presse plus fortement, on rompt les parois des ovules, et il s'écoule un fluide transparent qui, mis en contact avec de la baryte, décèle la présence de globules très-fins de nature albumineuse. La composition toute particulière de la membrane vitelline s'oppose un peu à ce que l'on puisse la déchirer facilement, à l'aide d'aiguilles, pour en faire sortir la vésicule germinative. Toutefois, on y parvient sur des ovules déjà un peu développés, et ce résultat fournit la preuve évidente de l'emboîtement des deux sphères. Les rapports que celles-ci présentent entre elles ne sont pas les mêmes à toutes les époques du développement de l'œuf. Dans l'origine, on aperçoit la vésicule du germe au centre de la sphère vitelline, ainsi que Cavolini, le premier, l'a observé chez les poissons. Puis, plus tard, on la voit petit à petit se porter du centre à la périphérie et s'adosser enfin à la membrane vitelline sur un point déterminé. Rusconi avait fait la même remarque sur des œufs de grenouilles et de salamandres aquatiques, et tout porte à croire que ce phénomène a lieu par suite d'une différence de densité entre les parties constituant la sphère germinative et celles qui

forment la sphère vitelline[1]. Du reste, ce qui tend à le démontrer, c'est que la métamorphose des éléments organiques contenus dans la membrane vitelline paraît s'effectuer avant celle de même nature qui s'opère dans la vésicule germinative. Ainsi l'on voit, par exemple, que la matière colorante des vésicules primitives de l'œuf se dépose, en premier lieu, dans la partie déclive de la cavité vitelline, alors même qu'on aperçoit encore la vésicule germinative assez transparente. Quant, ensuite, à ce qui est relatif aux modifications du jaune ou vitellus, en général, elles ne semblent en aucune façon différer de celles qui ont lieu chez les autres vertébrés. C'est toujours dans un milieu clair et de nature albumineuse qu'apparaissent successivement les vésicules primitives, puis la substance granulée qui s'y accumule petit à petit, en même temps que la matière grasse, et enfin les granulations vitellines dépouillées de leur enveloppe. Cette substance granuleuse constitue le blastoderme et ne semble différer de ce qui reste du jaune, que par un degré de développement plus avancé. Chaque granule est ensuite, par rapport à la vésicule primitivement formée dans l'œuf, ce que la vésicule contenue dans les tubes séminifères est au spermatozoïde. Seulement, la molécule organique sécrétée par la glande ovigène constitue un corpuscule qui est privé de tout mouvement spontané, tandis que le produit de sécrétion de la glande spermagène est doué de locomotion et d'une forme véritablement animalisée. Au moment de la déhiscence, l'ovule a donc en lui tous les matériaux essentiels pour la formation du nouvel être; on peut même dire, à l'égard de celui

[1] D'après M. Duvernoy, la vésicule germinative ne serait point libre dans la cavité vitelline; elle se trouverait emprisonnée dans un double feuillet vitellin, à la manière des séreuses, et son mouvement excentrique tiendrait à cette disposition anatomique. Pourtant, si les choses étaient telles que l'indique le savant professeur, il serait très-difficile d'extraire la vésicule germinative de sa double enveloppe, quand on déchire, à l'aide d'aiguilles, la membrane vitelline; on n'en verrait sortir alors que le liquide albumineux qu'elle contient originairement, puisqu'on ne doit pénétrer que dans la cavité de cette prétendue séreuse. Or on sait combien il est aisé de dégager la vésicule germinative du centre de la sphère vitelline, quand on a ouvert ses parois membraneuses, et ce seul fait, à mon avis, infirme la manière de voir de M. Duvernoy.

de la carpe, qu'il renferme aussi les éléments nécessaires à son développement. Son passage de la cavité ovarienne dans le réservoir commun, et son séjour dans cette cavité, n'ajoutent que fort peu de chose à sa constitution. C'est tout au plus si l'ovule s'est un peu accru, et si la membrane vitelline a pris plus d'épaisseur et de consistance; mais il n'a trouvé dans son parcours ni albumine à prendre, ni éléments nouveaux pour la formation d'une enveloppe molle ou calcaire. D'après cela, l'oviducte de la carpe ne fournit pas à l'œuf des matériaux de sécrétion qu'il puisse s'approprier. Chaque calice provenant du stroma fournit à l'ovule, avant sa déhiscence, tout ce qui lui est nécessaire pour la formation et le développement du nouvel être. Après la ponte et quand le produit ovarien a été fécondé, on aperçoit bientôt le travail de segmentation. Ce travail ne s'effectue pas pour l'œuf de la carpe de la même manière que pour celui des reptiles amphibiens; il n'est pas non plus conforme à ce qui se voit chez les oiseaux; tout le vitellus, en un mot, ne se segmente pas, comme chez les premiers, ni sur un point déterminé, comme chez les seconds. Il semblerait que dans les poissons osseux les matériaux du germe soient confondus avec ceux de nutrition, ou, en d'autres termes, que la substance granulée du vitellus est disséminée dans les parties huileuses et vésiculaires de manière à ce que le blastoderme ne puisse pas se constituer sur un seul et même point. Aussi est-ce un blastoderme diffus, si l'on peut s'exprimer ainsi, qui donne lieu à la formation du nouvel être. Dans tous les cas, l'œuf qui se détache de la glande spermagène est immédiatement propre à l'imprégnation du mâle et à l'évolution embryonnaire, par suite de sa segmentation.

En résumé :

Les appareils génito-urinaires de la carpe se traduisent au dehors par une ressemblance parfaite, qui rend impossible la distinction des sexes à l'aide de ces caractères.

Il y a pour ce vertébré, tant chez le mâle que chez la femelle, trois orifices distincts où aboutissent séparément les appareils générateurs, urinaires et digestifs.

L'ordre dans lequel ces trois orifices se présentent sur la partie la plus reculée de l'abdomen établit, par rapport à ce qui existe chez les vertébrés supérieurs, une inversion complète; sorte de dégradation organique relative dont il faut tenir compte.

A l'intérieur, les glandes spermagènes et les glandes ovigènes affectent la même position dans la cavité abdominale; mais les premières restent distinctes et séparées l'une de l'autre, tandis que les secondes se réunissent dans leur quart postérieur.

Il n'existe à côté de ces glandes reproductrices ni spermiductes, ni oviductes, à l'état libre et indépendant des testicules et des ovaires.

Le tronc commun aux conduits séminifères de chaque glande ou l'analogue du réservoir d'Hygmore s'unit à son congénère pour constituer une espèce de vésicule séminale, et c'est ce réservoir qui débouche directement à la marge de l'anus.

L'épididyme et le déférent n'existent donc pas, à vrai dire; il n'y a qu'un tube droit et court provenant directement des ramifications spermagènes, qui transmet au dehors les spermatozoïdes.

Les glandes ovigènes sont creuses et leur cavité, dans laquelle les œufs se développent et tombent, communique au dehors à l'aide d'un très-petit canal.

Le point de jonction des deux cavités ovariennes constitue un réservoir commun, espèce d'utérus, dans lequel les œufs séjournent et achèvent leur développement.

La déhiscence de l'ovule s'effectue chez la carpe sans qu'il y ait déchirure du péritoine. La capsule ovarienne ou calice, constituée par le stroma de l'ovaire, est la seule partie de la glande ovigène qui se rompe.

Le calice s'applique exactement sur l'ovule qu'il renferme, et ne contient ni liquide, ni granules albuminoïdes.

Il n'y a pas de membrane muqueuse proprement dite dans la cavité des ovaires. C'est tout au plus si elle existe à l'état rudimentaire dans le réservoir à œufs et dans le petit canal excréteur.

Les reins sont en grande partie soudés l'un à l'autre sur la ligne médiane.

Les uretères situés au côté externe de la masse rénale, l'un à droite, l'autre à gauche, aboutissent au sommet de la vessie urinaire.

Ce réservoir de l'urine, de forme triangulaire, est placé entre le rachis et les organes de la génération; son col, très-court, débouche au-dessus de l'orifice sexuel.

Les ouvertures génitale, urinaire et rectale, sont garnies de sphincters propres, entièrement indépendants les uns des autres.

Les lèvres qu'on remarque à la région anale, et qui protégent en quelque sorte les trois orifices en question, constituent une espèce de vestibule commun, qui est très-rudimentaire.

§ IX.

SQUALE ÉMISSOLE.

Ce poisson cartilagineux, vivipare, du genre squale, a avec celui des raies, qui constitue, uni au précédent, la famille des sélaciens, tant d'affinités et de ressemblance, que je me suis contenté d'étudier les appareils reproducteurs mâle et femelle de la seule espèce *émissole*. Ce que l'on connaît des sélaciens, à l'égard des organes de reproduction, c'est que leurs glandes spermagènes se composent de deux parties distinctes, le testicule, et l'épididyme, qui se déroule en canal déférent; que la plus grande partie des testicules est une agglomération de tubercules de la grosseur d'un pois, pressés les uns contre les autres, présentant chacun un petit enfoncement au milieu de leur face externe et paraissant composés d'un grand nombre de petits grains ronds très-fins et pédiculés; que l'autre partie de ces testicules singuliers est formée d'une substance glanduleuse homogène, qui est beaucoup plus mince en arrière qu'en avant, et qui s'étend sous toute la face inférieure de la portion tuberculeuse; et relativement aux glandes ovigènes, que cet organe est séparé de l'oviducte comme dans les

trois classes supérieures des vertébrés; que le vitellus *y* devient considérable; que l'oviducte, dans lequel il s'engage, lui fournit une coque, et que les petits squales ne viennent au monde qu'après avoir fait rentrer depuis quelques jours leur vésicule ombilicale dans l'abdomen. Comme on le voit d'après cet exposé succinct, les appareils mâle et femelle des poissons cartilagineux s'éloignent tout à coup de la disposition que présentent ces mêmes appareils chez les poissons osseux, pour se reconstituer d'une manière générale sur le même plan que ceux des vertébrés supérieurs. Ainsi l'émissole mâle a, non-seulement un épididyme très-développé et un conduit déférent des plus complexes, mais encore un réservoir séminal spécial entièrement distinct du canal spermatique. Chez l'émissole femelle également, les oviductes reparaissent et tous ces organes, qui font défaut chez la carpe, ont de l'analogie avec les spermiductes, la vésicule séminale et les oviductes des animaux composant les trois premières classes des vertébrés.

Il y a plus encore : c'est que ces organes offrent un tel luxe de développement et de structure, que leur fonctionnalité apparaît de la manière la plus évidente jusque dans les plus petits détails. On dirait que la nature a voulu mieux préciser ici chaque chose en donnant à l'émissole des appareils reproducteurs amples, complexes et des mieux accentués. Ces caractères, du reste, ressortiront clairement de l'exposé que je vais faire des organes génito-urinaires mâle et femelle du squale émissole.

A. Chez l'émissole mâle, que l'on reconnaît facilement à la présence d'appendices articulés, situés sur les parties latérales de l'anus (*c*, *c*, pl. 14), il est impossible extérieurement de se faire une idée du développement qu'ont les organes reproducteurs. Une petite verge cachée dans la fente anale et implantée sur la paroi supérieure du rectum constitue la seule portion de l'appareil génito-urinaire qui soit accessible à la vue. A l'intérieur, on trouve deux testicules et deux reins, sur lesquels sont appliqués les épididymes, deux renflements fort remarquables du canal déférent, deux vésicules séminales et deux vessies urinaires. La disposition, les rap-

ports, la structure et les fonctions de tous ces organes méritent d'être étudiés avec soin.

Les glandes spermagènes sont constituées par deux masses d'égal volume qui, par leur forme, représentent assez exactement de petites saucisses grosses comme le doigt indicateur et longues de huit à dix centimètres environ (*d, d*, pl. 14). Leur aspect blanchâtre est comparable à celui de la laitance de la carpe, quant à ce qui est de la glande elle-même. Elles sont placées bien en avant dans la cavité abdominale, très-près l'une de l'autre et d'une manière tout à fait symétrique. En arrière, chaque testicule semble se prolonger jusqu'à la glande rectale et même au delà; mais, en examinant les choses avec attention, on ne tarde pas à se convaincre que la moitié antérieure seulement de ces masses appartient au testicule; l'autre portion, beaucoup moins dense, d'aspect grisâtre, de forme moins régulière et rubanée, présente une sorte de cavité, dans laquelle s'engage l'extrémité postérieure de la glande spermagène (pl. 14, *g*). Les parois de ce sac s'amincissent beaucoup en passant sur le testicule et forment une espèce de mésentère qui s'étend jusqu'à l'extrémité antérieure du testicule. Toute cette substance grise, d'une vascularité extrême, molle et régulièrement sillonnée par des vaisseaux sanguins volumineux, constitue un organe à part, mais intimement en rapport avec les testicules, et qui semble être à ceux-ci ce que le corps graisseux des amphibiens est aux glandes spermagène et ovigène, ou, ce qui est plus comparable encore, ce qu'est la substance grise du cerveau à la substance blanche de cet organe, une couche corticule, nutritive. Ce qui semble venir à l'appui de cette manière de voir, déjà émise par M. le professeur Duvernoy, au sujet des amphibiens, c'est que les artères et les veines qui se distribuent dans cette partie encéphaloïde, sont les mêmes qui vont au testicule. Quoi qu'il en soit, les glandes spermagènes et leurs prolongements de substance grise sont contenus dans une enveloppe péritonéale qui les fixe à la colonne vertébrale. Dans cet état de choses, les deux masses en question se trouvent en rapport, par leur face supérieure avec

les reins, et par leur face inférieure avec le paquet intestinal, antérieurement avec le sommet de la cavité abdominale, postérieurement avec la glande rectale sur laquelle elles se fixent. Les testicules sont plus particulièrement en contact avec la portion antérieure du rein, et avec l'épididyme, tandis que le sac nutritif correspond à la dernière portion du rein, au renflement du déférent, à la vésicule séminale et à la vessie, qui sont comme ramassés au-dessus de lui.

Lorsqu'on cherche à étudier la composition des glandes spermagènes, on voit que la tunique albuginée est représentée, chez le squale émissole, par le feuillet péritonéal et par une couche très-mince de substance grise, vasculaire et peu résistante, qui se continue, d'une part, sous forme de toile très-mince, dans le testicule, qu'elle cloisonne régulièrement à la manière d'une pile d'écus, et de l'autre, avec les parois du sac nutritif et appendiculaire du testicule. Au-dessous de cette enveloppe (*g*), on rencontre la substance propre de la glande spermagène. Celle-ci est molle, d'un blanc de lait, et présente à sa surface des granulations très-fines dont l'aspect est vésiculeux. En faisant tomber sur cette glande un filet d'eau, toutes les parties qui la composent se séparent; leurs granulations s'éloignent les unes des autres, ainsi que les nombreux pédicules qui les tiennent réunies en grappe et qui aboutissent à une tige commune placée le long du bord interne du testicule (*e*, *l*). Ce petit appareil se compose donc des vésicules et des tubes séminifères se rendant dans un canal commun, qui est l'analogue du corps d'Hygmore. De nombreux vaisseaux accompagnent ces ramifications du spermiducte jusqu'aux renflements vésiculeux libres qui en constituent les tubes d'origine et le lieu d'élaboration des capsules séminifères. C'est, en effet, dans ces ampoules, qu'on rencontre des vésicules remplies de spermatozoïdes, quand on les examine vers les mois d'avril ou de mai. Avant cette époque de l'année, les ampoules du testicule sont extrêmement petites et transparentes; elles sont au contraire dix fois plus grosses à l'époque du rut. Leur aspect

blanchâtre alors, et plus ou moins granuleux, est l'indice de la formation des spermatozoïdes. Lorsque l'ampoule passe d'une nuance à l'autre, on aperçoit dans son intérieur des granules opaques qui plus tard seulement, produisent les vésicules spermagènes, dans lesquelles sont renfermés des faisceaux de spermatozoïdes. Ceux-ci restent unis même après la rupture des vésicules, et c'est alors qu'ils passent dans le spermiducte, tube qui commence évidemment au pédicule de chaque ampoule du testicule. Lorsqu'ils sont arrivés dans ce canal commun ou corps d'Hygmore, situé le long du bord interne de la glande spermagène (*c'*), ils ont acquis un peu plus de volume, mais ils restent encore réunis en faisceaux. A mesure, ensuite, qu'on les examine dans un point plus éloigné du spermiducte, ils se désagrégent et se développent de plus en plus, jusqu'à ce qu'enfin, arrivés dans la vésicule séminale, ils aient acquis leur plus grande dimension. Cette métamorphose complète des spermatozoïdes a été fort bien indiquée par le savant M. Lallemand, en France, et, par le docteur Hillmann, en Allemagne. Après le conduit commun qui longe le bord interne du testicule et qui reçoit tous les pédicules glandulaires de cet organe, on voit, antérieurement, dans un prolongement de la substance grise dont il a été question, la continuation du spermiducte (*c'*). Ce conduit unique se subdivise bientôt en trois ou quatre canaux, pour constituer l'origine de l'épididyme. Cette partie du spermiducte est excessivement difficile à débrouiller, tant à cause de sa ténuité extrême et de ses nombreuses circonvolutions, qu'à cause de ses rapports intimes avec le rein. Les tubes urinifères, en effet, et l'épididyme semblent provenir d'une seule et même origine. Toutefois, on parvient à dérouler complétement le conduit du sperme et à s'assurer que ce qui semble au premier abord faire partie du rein n'est autre chose, en réalité, que la tête de l'épididyme. Le rein n'en est pas moins pour cela en rapport avec elle et avec tout le spermiducte, qui se case, pour ainsi dire, dans la substance rénale comme pour s'y mouler. Après l'inextricable enroulement de l'épididyme, ce

tube conducteur de la semence prend un calibre qui devient de plus en plus fort, à mesure qu'il s'avance vers l'orifice anal. Pendant tout ce trajet, ses contours sont bien moins marqués et surtout moins nombreux; aussi peut-on les suivre avec la plus grande facilité, bien examiner la structure de ses parois, ainsi que les spermatozoïdes qu'il renferme. De cette étude, qui fait connaître la constitution fibreuse de ce tube et le développement plus grand des spermatozoïdes qu'il renferme, on peut déduire qu'il est l'analogue du conduit déférent. Cette portion du spermiducte présente chez le squale émissole un intérêt tout particulier, et c'est pour cette raison que je cherche à bien la limiter et à bien la décrire. D'abord, elle reçoit dans les trois quarts antérieurs de son parcours plusieurs conduits de l'urine (*i*, *i*) très-courts et provenant de l'uretère. C'est là le fait le plus important. Puis, le déférent se renfle tout à coup d'une manière extraordinaire dans sa partie terminale pour constituer un immense réservoir du sperme, qui, à l'extérieur, ressemble beaucoup à une grosse sangsue, tant par sa forme générale que par la disposition cannelée de ses parois (voy. *e'*). Chaque anneau de cette région correspond à une loge qui est limitée par des diaphragmes membraneux, percés, au centre, d'une ouverture circulaire. Toutes ces loges, au nombre de cent environ, sont d'une régularité parfaite. Celles du centre sont plus grandes que celles des deux extrémités, à cause du calibre du tube, qui est fusiforme. C'est dans ce grand casier que se trouvent entassés, par milliers, des spermatozoïdes, dont le développement semble avoir acquis le plus haut degré de perfection. Là ces corpuscules vivants ne sont plus rangés en faisceaux, comme dans l'épididyme, et, cependant, ils ne sont pas non plus entièrement libres. Leur partie caudale se prête seule à l'entrelacement qui existe encore; mais, quand on les plonge dans l'eau, ils se désagrégent avec la plus grande facilité. L'urine qui passe de l'uretère dans le déférent doit nécessairement servir à rendre leur transport plus facile dans le casier dont il est question, et en séjournant dans chaque loge avec les spermatozoïdes, les

rendre plus agiles. L'intérieur de ce réservoir est tapissé d'une membrane muqueuse très-fine qui se porte sur les feuillets pour en revêtir les deux faces en se contournant sur leur bord libre. Ces diaphragmes, perforés au centre, se composent d'un tissu fibreux très-serré, qui se continue avec les parois du spermiducte. Celles-ci sont épaisses, très-résistantes et composées de fibres musculaires dont les plans se croisent à angle droit. C'est surtout vers la terminaison du tube que les parois s'épaississent et que le tissu fibreux devient serré pour constituer un véritable museau de tanche, fort analogue à celui des vertébrés supérieurs qui s'ouvre, dans le canal urétro-sexuel, par un orifice très-petit. En arrière de ce museau de tanche, implanté sur la paroi supérieure du canal de l'urètre, se trouve l'ouverture de la vésicule séminale (*h*). Ce réservoir du sperme, fusiforme comme la dernière portion du déférent, presque aussi long que lui, mais beaucoup moins grand, est placé au-dessous du spermiducte et de la vessie urinaire, dans une rainure qui résulte de l'adossement de ces deux organes (*e*, *l*, *h*); ses parois se composent de la membrane péritonéale au dehors, d'une membrane fibro-cellulaire et d'une membrane muqueuse qui tapisse sa cavité. On rencontre dans ce réservoir séminal du mucus jaunâtre, de l'urine et une innombrable quantité de spermatozoïdes qui sont à un état de développement complet, si l'on en juge par la différence de taille qu'il y a entre ceux-ci et ceux recueillis dans les dernières parties du conduit spermatique. Il est évident, d'après cela, que les spermatozoïdes quittent le casier du déférent pour passer dans la vésicule séminale, d'où ils sont expulsés au moment de la fécondation des œufs. Ainsi, pendant l'époque du rut, on trouve dans les renflements des tubes séminifères, des spermatozoïdes, à l'état d'ébauche et enveloppés d'une capsule; dans l'épididyme, ils sont à un degré de développement plus avancé, sans enveloppes et disposés en faisceaux; dans le déférent, jusqu'au casier, en faisceaux encore, mais bien plus volumineux; dans les loges ou cases du spermiducte, entrelacés simplement par la queue, et,

enfin, dans la vésicule séminale, d'innombrables spermatozoïdes à l'état libre et parfait.

Indépendamment du déférent, qui débouche dans le canal de l'urètre, à côté du goulot de la vésicule séminale, il y a à côté du museau de tanche du spermiducte un autre petit bourrelet en forme de croissant, au centre duquel se trouve encore un orifice; c'est celui qui conduit dans la vessie urinaire. Ce réservoir membraneux est le pendant, quant à sa forme générale et à son volume, de la partie renflée du déférent. Les deux vessies urinaires sont placées en dedans de la dernière portion du spermiducte et au-dessus de la vésicule séminale; elles se terminent l'une et l'autre en avant, et, après avoir décrit un coude dans le sens opposé à celui du déférent, par une espèce de boyau borgne, analogue à l'appendice cœcal des mammifères. C'est dans ces régions vésicales qu'aboutissent des conduits urinifères, provenant des deux tiers antérieurs de la substance rénale. L'un d'eux, celui de gauche, est la continuation même de la vessie; il laboure, pour ainsi dire, le rein dans une étendue assez considérable, et reçoit de petits canaux urinifères, ainsi que le montrent les injections que l'on y fait pénétrer. Du reste, la preuve la plus convaincante de cette communication, est la présence de l'urine dans la vessie. Quant au tiers postérieur du rein, les conduits excréteurs de cette glande vont déboucher, à l'aide d'un tube (*k*) qui se divise en trois branches, dans l'urètre, un peu en arrière de l'orifice vésical. On peut se demander, d'après cela, si l'urine qui est versée dans le canal de l'urètre par les conduits en question, doit s'écouler au dehors ou bien pénétrer dans le réservoir urinaire, à la manière du sperme, qui passe du déférent dans la vésicule séminale. Sans doute que si l'orifice vésical se trouvait placé sur un point déclive, comme cela a lieu pour la vésicule séminale, la chose serait possible; mais, comme les orifices urinaire et vésical se trouvent situés sur la même paroi supérieure du canal de l'urètre, il n'est pas possible d'admettre cette sorte de transfusion. Dès lors, l'urine qui provient du tiers postérieur

du rein doit nécessairement lubrifier, sans cesse, le canal de l'urètre, ou bien passer dans les vésicules séminales, à cause de la situation de leurs orifices sur la paroi inférieure du canal urétro-sexuel. Dans l'un comme dans l'autre cas, l'urine sert à diluer les spermatozoïdes et à faciliter leur passage dans le canal urétro-sexuel, ce qui tient lieu des humeurs prostatique et de Cowper. On ne saurait, il me semble, réfuter ce point important de physiologie, et, d'ailleurs, si tel n'avait pas été le but de la nature, pourquoi les conduits de l'urine ne se seraient-ils pas tous rendus dans la vessie? Pourquoi, au contraire, se subdiviseraient-ils à la manière des conduits prostatiques en entrant dans l'urètre? et pourquoi le déférent lui-même en recevrait-il en assez grand nombre dans son parcours? Il demeure donc bien établi, ce me semble, que la présence de l'urine dans le spermiducte est une condition favorable au passage plus facile du sperme et peut-être aussi au développement des spermatozoïdes.

Il me reste actuellement à décrire le canal urétro-sexuel depuis son origine jusqu'à sa terminaison dans l'organe copulateur, qui, comme je l'ai déjà dit plus haut, est caché entre les lèvres de l'orifice anal. A en juger par son ensemble et ses rapports, ce canal paraît être plutôt la continuation des organes de la reproduction, qu'une dépendance des organes urinaires. Sa partie la plus reculée, en effet, est bien évidemment constituée par les vésicules séminales, puis, par des prolongements musculaires venant du déférent. La longueur totale de ce conduit commun est d'environ trois centimètres. Dans tout ce trajet, le canal urétro-sexuel est en rapport supérieurement avec le rachis, inférieurement avec le rectum. Cette inversion est donc la même ici que chez les poissons osseux, car c'est l'intestin qui s'est mis à la place des organes urinaires et génitaux, et elle semble établir un plan tout autre que celui des vertébrés supérieurs. Les parois du canal urétro-sexuel sont épaisses, très-vasculaires et à tissu fibreux et érectile. Elles sont recouvertes par le péritoine et tapissées en dedans par une membrane muqueuse lisse. Lorsque

ce conduit commun au sperme et à l'urine traverse la paroi supérieure du rectum, son calibre interne diminue sensiblement par suite de l'épaississement progressif de ses parois, devenues de plus en plus érectiles. Au delà, en suite de la cavité intestinale, le canal urétro-sexuel constitue une petite verge mamelonnée et perforée au sommet. Le méat urinaire, fort petit, donne passage au sperme et à l'urine, et il est dirigé en arrière sur l'animal mort. Mais, comme la verge rudimentaire en question est composée de tissu érectile, elle doit pendant l'érection pouvoir diriger son orifice en avant; ce qui lui permet de lancer le sperme dans les oviductes.

B. Chez l'émissole femelle, l'organe essentiel de la reproduction n'est plus symétrique comme chez le mâle; il n'y a qu'un seul ovaire situé sur la ligne médiane. Sa forme, sa disposition et son volume, diffèrent beaucoup suivant l'époque de l'année à laquelle on l'observe. Il est fixé à la colonne vertébrale par un mésovaire assez large qui s'étend depuis la partie antérieure de la cavité abdominale jusqu'au rectum. La masse totale de l'ovaire constitue un ovoïde assez régulier qui est en rapport : à droite et à gauche, avec les oviductes; en avant, avec le pavillon des trompes réunies; en arrière, avec le gros intestin et la glande rectale; au-dessus, avec le rachis; au-dessous, avec le foie et les intestins. Des œufs de toutes les dimensions apparaissent sur un fond grisâtre, très-mou et d'une grande vascularité. Il y en a qui ont le volume de celui de la poule, au moment où il se détache de l'ovaire, et même de plus gros. D'autres, moins volumineux, sont en bien plus grand nombre, et leur grosseur varie depuis celle d'une noisette jusqu'à celle d'un grain de millet. Tous ces œufs, à l'exception des plus petits, sont d'un jaune doré et entièrement sphériques. Le tissu vasculaire sous-péritonéal qui les recouvre constitue une membrane mince, qui est en rapport immédiat avec les ovules. Ce premier plan membraneux est superposé à une autre couche vasculaire de même nature, et c'est entre ces feuillets du stroma que se trouvent les ovules de tout calibre. Aussi, lorsqu'un d'eux s'est énormément accru, une foule d'autres qui

l'avoisinent, et qui sont restés à l'état rudimentaire, semblent être adhérents et provenir du même calice, bien qu'en réalité ils se trouvent aussi dans un double feuillet spécial du stroma. Tous ces ovules, à leur tour, se développent successivement, après la déhiscence des plus gros, tant que dure la saison du rut. Lorsque la ponte est terminée, l'ovaire n'est plus constitué que par une substance molle, granulée et très-vasculaire. A cette époque, on ne trouve que de simples vésicules transparentes enchâssées dans cette substance. De nombreux vaisseaux sanguins établissent entre ce corps mou et le véritable stroma, des connexions intimes qui ont de l'analogie avec celles qui existent entre les ovaires des amphibiens et le corps gras qui les avoisine, et surtout entre les testicules du squale émissole et la substance molle qui les enveloppe. Aussi est-il présumable que les glandes spermagènes et ovigènes retirent, de ces organes qui les accompagnent, de cette matière encéphaloïde qu'on rencontre chez les squales, les matériaux nécessaires à l'accroissement rapide des produits qu'elles émettent.

Quant à la constitution de l'ovule dans le stroma, elle est la même que chez les autres vertébrés. Il y a une sphère germinative emboîtée dans une sphère vitelline. La première occupe le centre sur de très-petits œufs; mais, à mesure que ceux-ci grossissent, elle se rapproche de plus en plus de la membrane vitelline jusqu'au contact. A partir de ce moment, il n'est plus possible de l'apercevoir, par suite de l'accumulation successive du vitellus et de la métamorphose des vésicules primitives, formées au milieu du fluide albumineux des deux sphères, qui donnent de l'opacité. Au moment de la déhiscence, le vitellus est, comme je l'ai déjà dit, très-volumineux, sphérique et d'un jaune clair, tout à fait comparable à celui de la poule. Le calice qui le contient se déchire, ainsi que le péritoine, du côté où il fait saillie sur le stroma, vers le point le plus éloigné de son pédicule. Le passage de l'œuf, au travers des parois qui le contiennent, ne s'effectue pas de la même manière que chez les oiseaux, c'est-à-dire à l'aide du stygma; il n'y a pas plus ici de ligne de démarcation que chez les amphibiens. Après la déhis-

cence on ne rencontre pas, sur les parois internes du calice, les houppes vasculaires qui existent chez la poule; il ne reste que le stroma, plus ou moins plissé, avec sa trame à figure pentagonale très-régulière. Enfin, ce calice est, comme celui des oiseaux, intimement accolé à l'ovule pendant tout le temps que celui-ci met à se développer, et ne lui fournit aucun débris de ses parois qui puisse lui rester adhérent quand il s'en sépare. La membrane vitelline est lisse partout; il n'y a sur elle aucune parcelle d'épithélium provenant de l'ovaire, ainsi que cela a souvent lieu chez les mammifères après la déhiscence. Ce n'est que par erreur que quelques anatomistes, peu expérimentés, ont cru pouvoir admettre une telle analogie, qui n'existe pas plus pour les amphibiens que pour les sélaciens en général. Du reste, cette analogie que l'on invoque en faveur du principe qui admet que ces sortes de débris servent à nourrir l'ovule, après qu'il s'est séparé de l'ovaire, ne repose sur aucun fondement bien établi. Il en est de même à l'égard d'une troisième membrane protectrice qui, dit-on, existerait sur les produits de l'ovaire au moment de la déhiscence. Rien de semblable n'a lieu quand on les examine avant qu'ils aient pénétré dans l'oviducte; la membrane vitelline est alors la seule membrane qui contienne le jaune.

Les ovules de la carpe, lorsqu'ils sortent du calice, sont, ainsi que je l'ai déjà dit, entièrement constitués. Quant à ceux de la blennie, des cécilies et des autres poissons vivipares, qui se développent dans l'ovaire même, je ne saurais rien affirmer à cet égard. Tout ce qu'il y a de bien certain, c'est que la membrane vitelline offre plus ou moins d'épaisseur, suivant les diverses espèces de vertébrés qu'on examine.

Bien que j'aie ouvert l'abdomen d'un très-grand nombre de squales émissoles femelles, je n'ai jamais rencontré des œufs libres dans la cavité abdominale, comme cela s'observe souvent chez les amphibiens et les oiseaux. Cette particularité semble indiquer que les œufs doivent passer immédiatement dans l'oviducte après leur déhiscence. Il est certain, à en juger d'après la dispo-

sition du pavillon de la trompe et de ses rapports avec l'ovaire, que tout est admirablement disposé pour les recevoir aussitôt qu'ils deviennent libres. Aussi les trouve-t-on souvent engagés à l'embouchure des deux oviductes réunis. C'est en les examinant alors qu'on voit, à n'en pas douter, qu'il n'y a point de troisième membrane à l'œuf; membrane, du reste, qui va bientôt se former autour de la sphère vitelline. Mais, avant de poursuivre les métamorphoses ultérieures de l'œuf, je dois décrire ici les oviductes qui lui fournissent de nouveaux matériaux, et qui en les retenant favorisent l'évolution fœtale.

J'ai déjà dit que les oviductes sont en rapport, à droite et à gauche, avec l'ovaire et que ces deux conduits, qui s'étendent depuis le cloaque jusqu'au sommet de la cavité abdominale, se réunissent antérieurement pour ne plus constituer qu'un seul pavillon. C'est qu'en effet ces oviductes, d'un gros calibre, presque droits, offrant un renflement considérable vers leur extrémité antérieure, se portent de dehors en dedans, et quand ils sont arrivés sur la ligne médiane où ils se rencontrent, les deux pavillons se soudent ensemble, de manière à ce que la moitié environ du bord libre et supérieur de chacun d'eux reste affrontée. Il résulte de là une large ouverture en entonnoir, qui est dirigée en avant et en bas, et qui communique avec les deux oviductes. Ce vaste pavillon commun est fixé à la partie la plus antérieure de la cavité abdominale par un mésovaire qui s'attache sur le rachis. D'après cela il ne peut pas aller à la rencontre de l'œuf en se portant sur l'ovaire, et, sous ce rapport, les choses se passent ici comme chez les amphibiens. Chez ces derniers, toutefois, les oviductes, bien que fixés au sommet de la cavité abdominale, comme ceux des squales émissoles, restent pourtant séparés l'un de l'autre, et, en cela, ils ont encore un degré d'isolement que n'ont pas les premiers. Malgré cette indépendance plus grande des oviductes des amphibiens, il est bien évident que l'œuf doit avoir plus de peine à rencontrer le pavillon que celui des squales. La preuve en est dans la présence fréquente de l'œuf des amphi-

biens à l'état libre dans la cavité abdominale et dans la rareté de ce même fait chez les sélaciens. Quoi qu'il en soit, le pavillon de l'émissole est circonscrit par un bourrelet régulier non frangé et presque circulaire. La muqueuse qui le tapisse forme de nombreux plis dont la concavité est dirigée vers la ligne médiane du corps, et la convexité du côté des oviductes. De nombreux petits cils vibratiles existent sur cette muqueuse, surtout à l'entrée du pavillon. Du reste, cette partie tout entière est sillonnée par une multitude de vaisseaux, d'un calibre assez fort, qui proviennent du mésovaire et qui se confondent avec ceux des oviductes. En arrière du pavillon, on voit de chaque côté une partie rétrécie du tube, très-courte, en forme de collet : c'est l'analogue de la trompe utérine. A cette partie succède un renflement considérable ayant la forme d'un œuf de poule un peu allongé. C'est là que se trouve la portion glandulaire de l'oviducte qui sécrète la coque molle et cornée de l'œuf. On dirait à voir ce renflement, qui est dur au toucher, qu'un corps étranger s'est arrêté dans le conduit; mais, en examinant les choses de plus près, on voit qu'il est constitué par un développement excessif des parois du tube. L'espèce d'hypertrophie de l'oviducte en ce point tient à la présence de petits cœcums adossés les uns aux autres, qui tous vont s'ouvrir à la surface de la muqueuse. La substance qu'ils contiennent, et que l'on fait facilement suinter à la surface en comprimant ses parois, est visqueuse, d'un jaune clair et très-abondante. C'est évidemment cette substance qui fournit à l'œuf une troisième membrane résistante, d'un aspect corné et d'un jaune doré. Cette membrane est, dans le principe, adossée d'une manière intime à la membrane vitelline, puis, à mesure que l'œuf chemine dans l'oviducte, elle se détache petit à petit de la sphère vitelline, par l'effet de l'endosmose; aussi trouve-t-on dans sa cavité une notable quantité de liquide albumineux, lorsque le fœtus est sur le point de naître. Il résulte de là que ce liquide remplit les fonctions de l'amnios des vertébrés supérieurs; le produit de la conception y étant, à l'état libre, plongé pendant toute la durée de

l'évolution fœtale. C'est surtout quand l'œuf a franchi la région glandulaire de l'oviducte, que le liquide amniotique commence à pénétrer dans la cavité de la coque. A partir de ce moment, il s'établit un échange continuel de parties fluides, l'une provenant des parois de l'oviducte, l'autre de la cavité de la coque, et c'est au moyen de cette endosmose, plus ou moins active, que le fœtus reçoit les matériaux de nutrition qui lui sont nécessaires. Aucune communication directe, aucun vaisseau, aucune membrane, autre que celle de la coque, n'existent entre le fœtus et la mère. Il n'y a qu'elle qui soit extérieurement en contact immédiat avec la muqueuse de l'oviducte, et sa face interne n'est point doublée d'une membrane vasculaire, d'un organe respiratoire particulier, d'une allantoïde enfin. Cette fonction semble entièrement dévolue aux vaisseaux vitellins, qui sont en grand nombre et répartis sur une large surface chez l'émissole. Dans tout le trajet de l'oviducte, où l'on rencontre les petits fœtus, la muqueuse est plissée longitudinalement pour loger la coque molle de l'œuf, froncée elle-même, ce qui établit entre ces parties une sorte d'engrenage. Après chaque œuf, l'oviducte se resserre sur lui-même et produit ainsi un étranglement qui les isole momentanément les uns des autres. La position respective des fœtus se trouve dès lors limitée dans un tube éducateur, qui, pris dans son ensemble, est l'analogue de la matrice. Enfin le tube ovarien se termine en un bourrelet, sorte de museau de tanche, dont l'orifice étroit conduit dans le rectum. C'est de chaque côté du gros intestin que les oviductes se joignent à lui, à l'aide de fibres musculaires nombreuses et fortes. De la fusion de ces fibres naît le vestibule commun, qui est très-vaste chez le squale émissole. Au fond de ce vestibule, en l'examinant de dehors en dedans, on voit l'orifice du rectum garni d'un sphincter propre qui sert à le fermer. A droite et à gauche se trouvent les embouchures des oviductes, également garnies de sphincters propres destinés à en fermer le passage. Enfin, sur la paroi supérieure du vestibule et à une profondeur d'un centimètre et demi environ de l'orifice externe, on aperçoit une papille sail-

lante, représentant en petit la verge du mâle. Cette papille perforée constitue le canal de l'urètre, où aboutissent les uretères renflés. Une cloison verticalement placée divise, à l'intérieur, la loge commune aux deux uretères, c'est-à-dire que cette cloison résulte de l'adossement et de la fusion des parois des tubes urinaires. Quant à ce qui est des conduits de l'urine considérés dans leur ensemble, y compris la fonction, tout démontre jusqu'à l'évidence que la vessie n'est autre chose qu'un prolongement ou un appendice des uretères. En effet, cette démonstration déjà précise pour les appareils urinaires du squale mâle et pour celui de la carpe, le devient bien plus encore chez l'émissole femelle. Ici, l'exagération de la chose rend le fait plus patent; ainsi, le réservoir urinaire, qui chez le mâle se termine brusquement vers le tiers postérieur du rein, parvient chez l'émissole femelle jusqu'au sommet du rein. A la vérité, son calibre n'est pas le même dans toute son étendue; l'uretère, qui prend naissance à la partie antérieure du rein, a un calibre très-petit d'abord, et ce n'est qu'en s'éloignant de son point de départ et après avoir reçu plusieurs conduits urinifères qu'il devient de plus en plus gros, jusqu'à donner lieu, enfin, à une énorme dilatation, qui constitue le réservoir urinaire. Cette sorte de vessie est beaucoup plus étendue que celle du squale mâle et doit avoir une contenance du double au moins. La dernière partie du conduit de l'urine, tant chez le mâle que chez la femelle du squale, présente une grande analogie avec celle des mêmes organes chez les vertébrés supérieurs des deux sexes, puisque, d'une part, elle reçoit les produits de la génération et constitue un canal urétro-sexuel, et que, de l'autre, elle ne transmet que l'urine, ce qui donne lieu à un canal de l'urètre simplement. Enfin, il existe à la base de la papille sexuelle de l'émissole femelle, et de chaque côté, un prolongement de la membrane muqueuse qui contourne l'orifice externe du vestibule commun. Ces replis, qui constituent des espèces de nymphes, font l'office de valvules et s'opposent d'une manière absolue à l'entrée de l'eau dans la cavité vestibulaire.

En comparant ensuite les deux appareils urinaires mâle et femelle, on voit tout d'abord que l'urine, chez le mâle, n'est pas versée en totalité dans la vessie, qu'il y en a au moins la moitié qui passe dans le canal déférent et que celle-ci provient des trois quarts antérieurs de chaque rein. On voit, en outre de cela, que la vessie urinaire de l'émissole mâle s'arrête brusquement au niveau du tiers postérieur du rein, qui lui envoie seul de l'urine, et que les deux tiers antérieurs du même organe, dépourvus d'uretères, conduisent ce fluide dans le déférent. C'est donc par une sorte d'interruption du canal de l'uretère, par une véritable déviation intercoupée de celui-ci, que l'urine, dans ce cas, est entièrement détournée de son parcours ordinaire pour se porter dans une direction déterminée. Ce détour, fort remarquable, qui établit une sorte de solidarité entre les fonctions génératrices et urinaires, a bien pour but fonctionnel, évident, de diluer les spermatozoïdes et de remplacer ainsi les humeurs prostatique et de Cowper, qui manquent complétement chez l'émissole mâle.

En résumé :

L'appareil reproducteur du squale émissole, qui a la plus grande analogie avec celui des raies, ne saurait, à l'extérieur, caractériser le sexe.

La verge, chez le mâle, et le clitoris perforé, chez la femelle, ne diffèrent l'un de l'autre que par le volume, et sont, du reste, cachés dans le fond de l'ouverture anale.

Les glandes spermagènes, situées profondément dans la cavité abdominale, se composent de tubes séminifères rameux, qui vont tous aboutir dans un tronc commun, qui est l'analogue du corps d'Hygmore.

De ce réservoir naissent un épididyme très-développé et le conduit déférent, dont la dernière portion, renflée et cloisonnée, constitue un premier réservoir spermatique.

Dans tout son trajet, le spermiducte reçoit des tubes urinaires provenant directement du rein.

Le déférent débouche au fond du canal urétro-sexuel, vis-à-vis de l'orifice de la vésicule séminale.

Les deux vésicules spermatiques sont des appendices aux spermiductes ; elles s'ouvrent directement dans le canal urétro-sexuel.

Les vessies urinaires, ou pour mieux dire les uretères dilatés, débouchent également dans le canal urétro-sexuel, un peu plus en avant que les déférents.

Indépendamment de ces conduits de l'urine, il y en a six autres très-petits, provenant du rein, qui s'ouvrent plus en avant encore dans le canal urétro-sexuel.

Ce conduit commun au sperme et à l'urine a une structure fibro-érectile très-prononcée, qui se prolonge jusqu'à la racine de la verge.

Cette dernière partie de l'appareil reproducteur est constituée par un tissu érectile, et elle est susceptible de prendre des dimensions assez grandes.

Les spermatozoïdes, qui doivent franchir tout le trajet des spermiductes, sont d'autant plus développés qu'ils s'éloignent davantage de la glande spermagène où ils apparaissent.

Le passage de l'urine, de l'uretère dans le spermiducte, facilite leur parcours en les diluant sans cesse.

Ce mélange de sperme et d'urine sort du déférent et s'accumule dans les vésicules séminales, à l'époque du rut surtout.

Indépendamment de cela, l'urine qui coule sans interruption dans le canal urétro-sexuel, par les six petits orifices urinaires, lubrifie ce conduit et tient ainsi lieu de produits prostatique et de Cowper.

Quant aux vessies urinaires, elles émettent leur produit à volonté, et l'urine passe alors dans le canal urétro-sexuel et de là dans la verge.

Les uretères sont placés sur la face inférieure du rein, au-dessus du conduit déférent.

Enfin, le canal urétro-sexuel est situé à la place du rectum, comme chez la carpe.

Chez le squale émissole femelle, il n'y a qu'un seul ovaire.

Le stroma qui le compose est diffus, mince et très-vasculaire.

Les œufs que cette glande fournit acquièrent un volume considérable, et sont formés en grappe, comme chez les oiseaux.

Chaque œuf a son calice propre qui lui est intimement accolé à toutes les périodes de son développement.

L'ovule dans l'ovaire se compose, comme celui des autres vertébrés, des deux sphères germinative et vitelline, emboîtées l'une dans l'autre.

La substance vitelline semble contenir une proportion plus grande de matière huileuse que celle de la poule.

La déhiscence de l'œuf ne s'effectue pas comme chez les oiseaux à l'aide du stygma; les parois du calice se déchirent pourtant dans un point qui lui correspond.

Chaque œuf, en parcourant l'oviducte, acquiert une nouvelle membrane, sorte de chorion qui fait les fonctions de l'amnios quand le fœtus est développé.

Les oviductes, réunis antérieurement seulement par la fusion des deux pavillons, se composent, comme ceux des animaux supérieurs, d'un organe de préhension, d'un organe de formation secondaire ou de sécrétion et d'un organe éducateur.

La seule différence consiste dans la fixité du pavillon, qui, chez le squale, reçoit l'œuf au lieu d'aller le chercher.

Les oviductes traversent les parois latérales du rectum et vont constituer le vestibule commun, dans lequel se trouve une papille érectile perforée, dernier terme des conduits urinaires.

Les uretères dilatés et constituant par leur renflement les deux vessies urinaires, comme chez le squale mâle, ont cela de particulier qu'ils se prolongent d'une manière non interrompue jusqu'au sommet du rein.

Enfin, le méat urinaire et le canal urétro-sexuel sont également situés chez la femelle à la place du rectum.

§ X.

LAMPROIES.

A une époque encore peu éloignée de nous, les poissons cartilagineux de ce groupe étaient en partie rangés parmi les vers marins, sans distinction aucune pour les sexes. Aussi les lamproies et les anguilles en général étaient-elles considérées comme des femelles qui toutes émettaient leurs œufs à l'aide d'une fente abdominale accidentelle.

A ces idées erronées ont succédé les remarquables travaux de Cuvier, de Muller, de Duméril et surtout ceux de M. Duvernoy, qui ont jeté un nouveau jour sur cette importante question. Les études microscopiques, si heureusement appliquées depuis quelques années aux recherches anatomiques, ont servi, dans ces circonstances, à la détermination rigoureuse des sexes chez ces animaux, en démontrant la présence des spermatozoïdes d'une part et celle des ovules de l'autre. C'est surtout à l'époque du rut, vers le mois de février, quand les lamproies remontent les rivières pour frayer, qu'il est facile de constater les sexes; car alors les organes reproducteurs sont au maximum de leur développement et au summum de leur fonctionnalité. Une fois l'époque du rut passée, il devient souvent très-difficile de déterminer la nature des sexes, d'après les caractères anatomiques que présente l'appareil reproducteur. Déjà cette difficulté s'est présentée une fois dans le cours de ce travail, à l'occasion des monotrèmes, quoiqu'en définitive il soit toujours possible, chez ces mammifères singuliers, de reconnaître la femelle au pavillon de la trompe. Mais ici, l'appareil reproducteur, réduit à sa plus simple expression, manque complétement d'oviducte et de spermiducte, organes complexes qui à eux seuls peuvent servir à la détermination des sexes. Il n'est pas nécessaire d'ajouter que les parties sexuelles externes ne sont d'aucun secours; le mâle ayant comme la femelle une papille perforée implantée dans la fente anale, qui ne diffère

en aucune manière chez l'un ni chez l'autre. A cette conformité si grande des appareils générateurs et à cette simplicité des organes qui les composent, se joint la similitude d'émettre les produits mâle et femelle à l'aide d'une déchirure des capsules spermagènes et ovigènes. Ce fait singulier, que je signale pour la première fois dans le cours de ce travail, à savoir, que le sperme s'échappe de sa glande en suivant le même mode que l'ovule, est d'autant plus important à constater, qu'il montre jusqu'à l'évidence que l'uniformité de plan organique est toujours en raison directe de l'élévation moins grande des êtres dans l'échelle animale.

A. Chez les lamproies mâles, le testicule s'étend d'un bout à l'autre de la cavité abdominale. La disposition de cet organe ne ressemble pas aux glandes spermagènes des autres vertébrés. C'est une masse irrégulière, blanchâtre, à bords frangés, située sur la ligne médiane, entre les reins et le canal alimentaire, qui est fixée à la colonne vertébrale à l'aide d'un mésentère dans lequel rampent ses vaisseaux nourriciers. Dans sa partie antérieure, la glande spermagène se compose de lobes assez distincts (*b*, fig. 1, pl. 15), placés transversalement à l'axe du corps, d'une manière irrégulière et formant par leur ensemble une espèce de tête allongée. Un peu plus en arrière, environ trois centimètres plus loin, la glande est comme divisée sur la ligne médiane par une large échancrure qui va en mourant et qui s'efface entièrement quatre ou cinq centimètres après son origine. Dans toute cette étendue, les lobes du testicule sont symétriques et semblent constituer deux glandes spermagènes. Un peu plus en arrière cependant, ces lobes présentent la même disposition qu'en avant, c'est-à-dire qu'ils ne sont plus divisés par une échancrure médiane. Enfin, dans sa portion la plus reculée, le testicule se divise de nouveau en deux parties latérales; mais cette division est tout à fait superficielle. A mesure que la glande spermagène s'avance vers la partie la plus reculée de la cavité abdominale elle se rétrécit de plus en plus, et, quand elle est arrivée sur la limite du rectum, ce n'est plus

qu'une languette très-effilée. La surface de chaque lobe est à peine granulée, même à l'époque du rut. Les nombreux vaisseaux sanguins qui s'y épanouissent circonscrivent les divers lobes dont est composée la glande, et en font connaître la disposition. Examinée à la loupe, toute la masse testiculaire présente d'innombrables capsules très-petites, peu saillantes et régulièrement placées. On voit aussi de distance en distance, et principalement sur les lobes antérieurs de la glande, de petits points d'un brun foncé. Ces points résultent de la cicatrisation des capsules qui ont déjà émis des spermatozoïdes. Ils ressemblent assez exactement à ceux plus ou moins noirâtres qui se voient sur les ovaires des grenouilles après la déhiscence des ovules. Plus on avance ensuite dans la saison où le travail de la reproduction s'effectue chez les lamproies, et plus ces points en question sont nombreux. Leur disparition complète n'a lieu que deux ou trois mois après le rut; alors l'atrophie du testicule est si grande, qu'on ne distingue pas même les capsules primitives. On dirait que l'organe a subi une sorte d'hépatisation qui rend son tissu homogène. C'est ensuite, vers le mois de janvier, qu'on retrouve le testicule des lamproies très-développé; alors, chaque vésicule contient un nombre considérable de granules organiques, qui, observées au microscope, présentent une partie enveloppante ou vésicule libre, dans laquelle sont renfermés des spermatozoïdes à des degrés divers de développement. Pour étudier la structure de la glande spermagène, il faut préalablement injecter le système sanguin, artères et veines. Lorsque cette opération est faite, les cellules de la glande s'isolent mieux, étant entourées d'une couche d'injection qui s'épanche tout autour d'elles. En retirant cette substance on voit que ces cellules tiennent à la glande par un pédicule très-court, qui n'est pas creux, et sur lequel passent des artérioles très-fines qui vont se perdre sur toute la surface des cellules. Celles-ci sont rangées par paires à côté les unes des autres (fig. B′, *d*, *d*), à la manière de petites graines sur leur tige. A la base de leurs pédoncules on voit de larges sinus veineux (*b*, fig. B′) qui

baignent toutes ces parties et qui ramènent le sang dans la veine cave. Dans chaque cellule (*e*) on trouve des vésicules (*f*) dans lesquelles se développent les spermatozoïdes. Il ne m'est jamais arrivé d'en renconter à l'état libre dans la cavité abdominale, où ne s'accumulent que des spermatozoïdes bien formés. Peut-être qu'en examinant un grand nombre de lamproies on finirait par apercevoir des vésicules originaires non déchirées. Dans tous les cas, si cela a lieu, il est fort possible qu'elles émettent très-promptement leurs produits. Quoi qu'il en soit, la glande spermagène se comporte, à l'égard des spermatozoïdes, de la même manière que l'ovaire en général par rapport à l'ovule. Son produit générateur et fécondant s'échappe de ses cellules, qu'il déchire, et tombe dans la cavité abdominale, d'où il sort à l'aide des canaux péritonéaux, au moment de la ponte. Ces conduits du sperme ont, dans la partie la plus reculée de l'abdomen, leurs embouchures, qui sont situées entre les uretères et le rectum, l'une à droite, l'autre à gauche de l'axe du corps. Après un trajet fort court, chaque spermiducte arrive dans la cavité de la papille sexuelle (*e, e*, fig. 3), entre le petit orifice de l'uretère (*c, c*) et celui de la papille sexuelle (*f*). Un raffé médian (*g*) les sépare et sert à diriger les produits de la génération et ceux des reins vers le méat urinaire. Il est à remarquer qu'ici, comme chez beaucoup d'autres vertébrés, l'orifice séminal est placé après l'orifice urinaire, et que, par conséquent, l'urine, en passant sans cesse dans la petite loge commune de la papille, doit servir à diluer les spermatozoïdes au moment du rut, ou tout au moins à lubrifier le canal et à tenir ainsi lieu de fluide prostatique ou de Cowper. C'est sur la paroi supérieure ou vertébrale du rectum que s'implante la papille sexuelle, et c'est à sa base que débouchent les conduits génito-urinaires; aussi, résulte-t-il de là que les lamproies ont un canal urétro-sexuel comme celui des vertébrés supérieurs, sauf l'étendue et la disposition. Quant à la structure de ce conduit, elle est analogue à celle des mammifères; c'est un tissu spongieux et érectile, susceptible de donner à la papille une élongation et un volume

qu'on ne saurait apprécier bien rigoureusement. Tout cet appareil est placé au-dessus du rectum, c'est-à-dire à l'endroit où celui-ci devrait être. C'est encore une transposition organique qui est conforme à celle qu'on remarque chez les poissons en général, puisque le rectum prend la place des organes génito-urinaires. Enfin, autour du gland qui termine la papille sexuelle, la muqueuse du rectum lui envoie deux petits prolongements qui le recouvrent en partie et qui ont de l'analogie avec le prépuce des mammifères.

B. Chez les lamproies femelles, l'ovaire est unique. Il affecte, au volume près, la même disposition que le testicule. Étendu sur l'axe médian, depuis le sommet de la cavité abdominale jusqu'à la partie la plus reculée, il présente des lobes distincts, séparés les uns des autres par de profonds sillons, qui sont dirigés en tous sens. La portion antérieure de l'ovaire est, de même que la portion correspondante du testicule, plus volumineuse que tout le reste de l'organe. Un long mésentère fixe l'ovaire au rachis et sert à conduire les vaisseaux ovariens. Les granules qu'on remarque à la surface de chaque lobe de la glande ovigène sont plus marqués que ceux qui existent sur le testicule; mais cette différence, qui est bien tranchée à l'époque du rut, ne l'est plus dans d'autres moments, et c'est dans ce cas qu'il est difficile de se prononcer sur la nature des sexes. Toutefois, en examinant les produits ovariens à l'aide d'une loupe, on aperçoit distinctement l'ovule placé dans son petit calice. Ceux qui sont encore transparents ont au centre de la sphère vitelline une petite sphère germinative, qui sert à les caractériser d'une manière absolue. C'est surtout quand l'injection des vaisseaux sanguins a bien réussi qu'il est facile d'isoler chaque cellule ovarienne et d'en examiner le produit. Les parois des calices sont très-vasculaires et le sang veineux ne semble pas s'épancher à leur surface, comme cela s'observe pour les cellules spermagènes. Lorsque l'ovule est arrivé à maturité, son enveloppe formatrice, le stroma, se rompt sur un point et laisse sortir l'œuf, qui tombe dans la cavité abdominale. En ce moment, le produit ovarien est formé d'une membrane vitelline très-résis-

tante et opaque, et d'une substance vitelline qui contient des granules, des vésicules et des gouttelettes huileuses. On ne distingue plus alors la vésicule germinative et l'on ne reconnaît pas de tache ou de cicatricule à sa surface. Tous les œufs qu'on rencontre dans la cavité abdominale des lamproies s'y sont accumulés très-probablement dans un court espace de temps, si l'on en juge par leur volume et leur composition, qui ne diffèrent nullement entre eux. Il est certain que si ces œufs, un peu plus gros que ceux qui sont encore renfermés dans les calices, éprouvent des modifications en séjournant dans la cavité abdominale, on peut dire qu'elles sont insaisissables. C'est tout au plus, je le répète, si la membrane vitelline s'épaissit un peu après la déhiscence de l'œuf. En tous cas, on ne saurait y reconnaître une adjonction de parties essentielles telles qu'albumen, ou autres parties accessoires que l'ovule prend ordinairement en passant par un oviducte spécial; la cavité abdominale, qui en fait ici l'office, ne lui transmet rien et se borne, pour toute fonction, à lui servir de conduit. Lorsque la ponte doit s'effectuer, les œufs s'accumulent dans la partie la plus reculée de la cavité abdominale, d'où ils sortent par les canaux péritonéaux, sans doute plusieurs à la fois, attendu leur petitesse. Quand une première ponte a déjà eu lieu, on trouve sur l'ovaire de petites rugosités qui ont un aspect noirâtre. Ces points examinés à la loupe ne sont autre chose que des calices en voie de cicatrisation; ce sont leurs parois déprimées et ridées qui les constituent. A côté de ces calices atrophiés, il y en a d'autres très-développés qui sont sur le point d'émettre de nouveaux ovules. Aussi trouve-t-on constamment des œufs dans la cavité abdominale des lamproies pendant tout le temps que dure le rut. A la vérité, leur nombre est plus considérable vers le mois de février, époque à laquelle l'ovaire des lamproies est en pleine fonction. Plus tard, vers les mois de mars ou avril, la glande ovigène s'atrophie, les granulations noires augmentent et les ovules deviennent très-rares, à sa surface surtout. C'est alors que les lobes de cette glande diminuent considérablement et qu'ils ont la

plus grande analogie avec ceux des testicules. L'émission des œufs se fait, ai-je dit, par les canaux péritonéaux, sans doute par une sorte de jet double, tant les œufs sont petits et abondants dans la cavité abdominale au moment de la ponte. Ces canaux s'ouvrent dans la cavité de la papille urétro-sexuelle, en arrière des uretères et de chaque côté d'un raffé médian, absolument de la même manière que chez la lamproie mâle. Les uretères aboutissent au sommet d'un petit mamelon érectile, qui doit pouvoir retenir l'urine dans ses conduits. Malgré cela, ce liquide, en traversant la papille urétro-sexuelle, doit entraîner devant lui les œufs qui s'y trouvent à l'époque du rut, et cette circonstance établit une analogie de plus entre les fonctions des organes reproducteurs mâle et femelle des lamproies.

Quant à la disposition des reins et des uretères, il n'y a pas la moindre différence de l'un à l'autre sexe : les masses rénales ont la même étendue chez le mâle et chez la femelle. Ce sont deux longs rubans épais qui doublent les organes reproducteurs sur toute leur face vertébrale. Chaque rein a à son côté externe un long conduit, l'uretère, dont le calibre, fort petit d'abord, va ensuite progressivement en augmentant jusqu'à son arrivée dans la papille urétro-sexuelle. De petits tubes urinifères en grand nombre débouchent à angle droit dans ces conduits. Leur disposition par rapport à l'uretère rappelle les degrés de l'échelle barométrique ou celle d'un tube gradué à l'usage d'un pèse-liqueur (*d, d,* fig. 1). Toutes ces particularités relatives à la forme des reins, à la position de l'uretère et à la disposition des conduits urinifères qui y aboutissent, comme aussi le mode de jonction des conduits de l'urine avec les organes sexuels, établissent une grande analogie de fonctions et d'appareil entre les reins primitifs ou corps de Volff des mammifères, des oiseaux, etc. et ceux des lamproies. Cette analogie, pour être ici des plus frappantes, n'en existe pas moins chez d'autres espèces de vertébrés dont j'ai déjà parlé. C'est principalement sur les rapports des uretères avec les reins et sur la disposition générale de ces derniers que j'ai voulu fixer ici l'at-

tention. Dans la deuxième partie de ce travail, où je traiterai de l'analogie et de la dégradation des organes, je reviendrai sur ces points importants, à l'effet de résoudre, s'il est possible, la question de savoir si les corps de Volff, considérés généralement comme des organes transitoires, sont persistants dans certaines espèces de vertébrés.

En résumé :

La distinction des sexes chez les lamproies est impossible au dehors, si l'on ne tient compte que des organes reproducteurs.

Il n'est pas plus facile de distinguer le mâle de la femelle à la simple inspection des testicules et des ovaires, ces organes ayant entre eux la plus grande analogie, surtout quand on les compare à une époque qui est éloignée de celle du rut.

L'absence, chez les lamproies, de spermiducte et d'oviducte spécial ajoute à cette difficulté, puisqu'elle offre moins de termes de comparaison entre ces organes.

C'est à la présence des spermatozoïdes dans les capsules de la glande spermagène ou dans la cavité abdominale, qui sert de spermiducte, qu'est due la possibilité de distinguer les sexes l'un de l'autre.

Le testicule se compose de capsules qui sont très-rapprochées les unes des autres, et qui se trouvent maintenues en rapport par un tissu fibro-celluleux.

Chaque capsule pédiculée sécrète les vésicules spermagènes primitives dans lesquelles se développent les spermatozoïdes.

Toutes les capsules de la glande spermagène se déchirent pour émettre leurs produits.

On ne trouve dans la cavité abdominale que des spermatozoïdes à l'état libre.

C'est par les canaux péritonéaux qu'ils arrivent dans la papille urétro-sexuelle, où aboutissent également les uretères.

A l'époque du rut, on trouve dans la cavité de la papille urétro-sexuelle des spermatozoïdes mêlés à de l'urine, qui leur sert de véhicule dissolvant.

La glande ovigène se compose du stroma, très-vasculaire, dans lequel existent des ovules entourés d'un calice.

Celui-ci ne contient que l'ovule et se rompt à l'époque de la ponte pour émettre des ovules.

C'est dans la cavité abdominale que tombent tous les œufs, et cette cavité tient lieu d'oviducte.

Les canaux péritonéaux servent à transmettre les œufs au dehors. Ils aboutissent dans la papille urétro-sexuelle conjointement avec les uretères, qui y versent l'urine.

A l'époque du rut, les produits génito-urinaires se rencontrent dans la papille, d'où ils sortent simultanément.

L'appareil urinaire des lamproies a la plus grande analogie avec celui des corps de Volff chez les mammifères et les oiseaux.

§ XI.

MYXINES.

Nous voici arrivés à la dernière espèce de vertébrés que le programme de l'Institut signale comme indispensable pour résoudre la question proposée. Ces animaux, d'une rareté extrême, font partie du dernier groupe des poissons cartilagineux. On les trouve plus particulièrement dans l'Océan, vers le cap de Bonne-Espérance, sous de la fange, qu'ils recherchent pour s'y cacher. Cette circonstance, jointe au peu de connaissances exactes que les auteurs avaient de ces êtres singuliers, ont fait dire qu'ils sont engendrés par du limon. Du reste, à part les travaux de Müller sur les myxines, on a publié fort peu de chose relativement aux mœurs et à l'organisation de ces animaux. Aussi, leur étude, au point de vue anatomique surtout, offre-t-elle le plus grand intérêt, en montrant tout d'abord la dernière dégradation à laquelle puisse atteindre l'organisme d'un vertébré, et ensuite, en ce qu'elle fait connaître également les affinités qui existent entre les myxines et les lamproies, les rapports qui les lient entre elles à l'égard des appareils génito-urinaires, et l'analogie toujours croissante qu'il

y a entre les corps de Volff et les reins des vertébrés qui sont placés au bas de l'échelle. Tant de considérations expliquent l'exigence du programme de l'Académie, qu'il m'a été donné de pouvoir remplir avec exactitude La seule omission qu'il y ait à signaler à cet égard porte sur l'appareil de la génération mâle, qui n'a pas été reproduit à l'aide de figures exactes, faute d'avoir eu à ma disposition des individus bien conservés et propres aux dissections. Mais, à défaut de cette reproduction, l'étude que j'ai pu faire sur nature, des organes mâles de la génération m'a suffisamment montré qu'il y a une grande analogie à cet égard entre ces organes et ceux des lamproies, analogie qui comble toutes les lacunes et facilite la solution des questions posées.

Quant à ce qui est relatif à la détermination des sexes à l'aide des organes génitaux externes, la chose est aussi difficile ici que chez les lamproies. L'ovaire et le testicule peuvent seuls servir à établir cette distinction, si l'on a égard surtout à la présence des œufs d'une part et des spermatozoïdes de l'autre, que le microscope fait connaître. Cette preuve ressortira clairement de la description anatomique qui va suivre.

A. Chez le mâle, l'organe sexuel externe se trouve confondu avec les organes excréteurs du canal digestif et ceux de l'appareil urinaire. A l'intérieur, il y a un testicule unique, constitué par une longue bande médiane qui est fixée au rachis à l'aide d'un mésentère et qui ressemble à l'ovaire. En examinant sa texture, on le trouve formé d'un tissu fibro-celluleux très-serré et d'une enveloppe péritonéale. Dans ce tissu s'aperçoivent des capsules oblongues, pédiculées, qui sont destinées à sécréter le sperme. Ces capsules doivent nécessairement se déchirer comme celles des lamproies mâles pour émettre leur produit, qui doit évidemment tomber dans la cavité abdominale, avant de pouvoir sortir par les canaux péritonéaux. Ceux-ci, situés l'un à droite, l'autre à gauche de l'intestin, dans la partie la plus reculée de l'abdomen, convergent vers un même point et se réunissent en un seul canal très-court (*a*, pl. 16), qui s'ouvre un peu en arrière

de l'anus (*b*) au fond du bourrelet anal. Un peu plus loin encore, et dans l'angle postérieur du repli rectal, on aperçoit sous la muqueuse les deux orifices des uretères (*c*), qui sont d'une petitesse extrême. Lorsque je dis que ces orifices appartiennent aux uretères, la preuve matérielle du fait manque, puisque les reins n'existent pas chez les myxines mâles et femelles et que les uretères n'en proviennent point. Mais, à défaut de preuves de cette nature, on peut invoquer l'analogie pour établir, à l'aide de la disposition des organes en question, de leur structure, de leurs rapports, de leurs connexions et même de leur point d'origine, à quelle partie de l'organisme ils appartiennent. C'est en procédant ainsi que j'ai cherché à déterminer d'une manière rigoureuse les uretères chez les myxines. En premier lieu, et pour bien connaître la disposition de ces conduits, je les ai injectés de matière colorante, qui a parcouru tout le tube avec une grande facilité et s'est fait jour par les petites ouvertures situées dans l'angle postérieur de la fente anale. En avant de ce point, le calibre du conduit est excessivement petit, mais il devient bientôt plus fort, à mesure qu'il s'avance dans la cavité abdominale (*i*, pl. 16). Lorsqu'il a atteint le sommet de cette cavité, il s'effile de nouveau et se perd de chaque côté, d'une manière insensible, sur les parois de la veine cave inférieure. Dans tout leur trajet, ces tubes suivent le côté externe des deux veines caves abdominales, qui sont souvent anastomosées entre elles au-dessous de l'aorte. Entre ces vaisseaux veineux et le rachis, on aperçoit, de distance en distance, de petits prolongements (fig. 2) qui dérivent des uretères; ces prolongements, examinés à la loupe, présentent des radicules qui sont renflées au bout. Ces parties tubulaires ne contiennent pas toutes de la matière à injection; mais il suffit d'en rencontrer d'injectées sur plusieurs points pour être bien convaincu que les radicules en question constituent un véritable appareil glandulaire rudimentaire. D'après cela, et en tenant compte aussi de la disposition des tubes communs situés en dehors de ces prolongements glanduliformes, de la régularité des conduits qui y aboutissent

et de leur mode d'origine, on voit déjà que toutes ces particularités, qu'on retrouve dans l'appareil urinaire des lamproies, offrent des termes de comparaison exacte entre cet appareil et celui des espèces voisines des vertébrés. Que si l'on recherche ensuite dans les phases embryonnaires quelques points de comparaison encore avec ce que l'on observe chez les myxines, on ne tarde pas à reconnaître que l'appareil des corps de Volff est celui qui s'y rapporte le plus. Il y a même à ce sujet cette particularité fort remarquable, c'est que les reins primitifs des animaux supérieurs, en disparaissant pour faire place aux reins définitifs, conservent, comme chez les myxines, le canal excréteur ou conduit de Gärtner après l'atrophie et même la disparition complète des corps de Volff. A ce point de vue donc, l'appareil urinaire des myxines représente, d'une manière permanente, un état transitoire de l'organisation embryonnaire chez les vertébrés supérieurs.

B. Chez la myxine femelle, les organes de la génération, qui sont placés au dehors et qui se confondent avec ceux des conduits excrémentitiels, ont, comme je l'ai déjà dit, la plus grande analogie avec ceux du mâle et sont, par conséquent, insuffisants pour faire reconnaître le sexe. A l'intérieur du corps, on trouve l'ovaire, qui, à l'époque du rut, est très-reconnaissable. Cet organe, réduit à sa plus grande simplicité, se compose d'une espèce de mésentère qui est accolé le long du canal intestinal dans presque toute son étendue (*j*, pl. 16, fig. 1). Son bord libre est frangé d'un bout à l'autre et parsemé de nombreux ovules, pour la plupart arrondis. Il y en a pourtant qui sont d'une forme allongée, assez semblable à un grain d'avoine, disposition toute particulière des ovules mûrs, qui les distingue, au premier abord, de tous ceux que produisent les autres vertébrés. Lorsque le système vasculaire a été convenablement injecté, on voit que l'ovaire est constitué par une trame de petits vaisseaux logés dans un repli du péritoine. C'est au milieu de ce tissu vasculaire que se trouvent et se développent les ovules; ceux qui sont sur le point de se séparer de l'ovaire sont seuls oblongs et en saillie sur la glande ovigène. Il y

en a parmi eux dont le pédicule qui les soutient est assez long pour permettre à l'ovule de changer de direction. Ceux, au contraire, dont le développement est moins avancé ont une forme sphérique et ne font aucune saillie à la surface de l'ovaire. Les uns et les autres sont placés dans un calice spécial, qui leur est intimement accolé. Au moment de la déhiscence, ce calice doit s'ouvrir à son point culminant, et c'est par cette déchirure que passe l'ovule pour tomber ensuite dans la cavité abdominale. J'en ai rencontré huit chez la myxine qui est représentée (fig. 1, pl. 16), et ce nombre suffit pour établir que l'individu que j'ai eu à ma disposition était à l'époque du rut. Les œufs, par conséquent, qui s'étaient détachés de l'ovaire, avaient acquis tout leur développement et pouvaient facilement servir de terme de comparaison. Leur volume dépasse à peine celui des plus gros œufs encore adhérents à l'ovaire et ont du reste la même forme oblongue que ces derniers. Les petites taches brunes qu'on remarque à la surface de l'organe reproducteur indiquent les divers points par où les ovules sont sortis; elles présentent au centre une dépression qui correspond à la déchirure des cellules, d'où l'injection des vaisseaux sanguins s'échappe. Les artères qui se distribuent à l'ovaire sont en grand nombre et proviennent directement de l'aorte. Les veines vont déboucher dans la veine cave. Sur les ovules à peine développés, il m'a été facile de découvrir la sphère germinative, qui est située au centre de la sphère vitelline; mais sur ceux dont la forme commence à devenir oblongue, il n'est plus possible de l'apercevoir. Elle doit, suivant toutes les probabilités, se diriger vers la périphérie de la sphère vitelline, qui prend petit à petit la forme d'un grain d'avoine. Sur beaucoup d'œufs qui ont déjà atteint cette forme, les granules amassés en grand nombre dans la cavité vitelline lui donnent cette couleur jaune plus ou moins foncée que l'on rencontre sur tous les œufs en général. C'est dans ces conditions que les produits ovariens de la myxine se trouvent au moment de la ponte. Pour que cet acte s'accomplisse, il faut que les œufs passent de la cavité abdominale, où ils tombent, dans les conduits péritonéaux,

seuls vestiges des oviductes spéciaux destinés à les transmettre au dehors. Ces canaux péritonéaux ou oviductes rudimentaires, situés l'un à droite, l'autre à gauche de la portion rectale de l'intestin, se réunissent bientôt en un seul conduit qui s'ouvre au dehors, entre l'anus et les orifices urinaires, dans la fente anale. Leur calibre individuel est très-petit, et c'est à peine si un œuf mûr peut y passer, même quand il s'y est engagé convenablement, c'est-à-dire dans le sens longitudinal. D'après cela, et d'après le petit nombre d'ovules arrivés à maturité dans l'ovaire, on peut admettre que la ponte des myxines n'est pas à beaucoup près aussi considérable que celle des lamproies et des anguilles en général. Le volume des œufs, bien plus considérable du reste chez les premiers de ces vertébrés que chez les seconds, est également une preuve de plus en faveur de cette opinion. Quant au mode de fécondation des œufs, il est bien évident qu'il doit s'effectuer par le mâle au moment même de la ponte, ainsi que cela a lieu pour les autres poissons qui ne s'accouplent point.

Enfin, l'appareil urinaire présente ici les mêmes particularités que chez la myxine mâle. Les tubes urinifères des glandes rénales rudimentaires (fig. 2) débouchent dans un conduit commun, l'uretère, qui seul persiste, et qui lui-même aboutit séparément de chaque côté dans l'angle postérieur de la fente anale.

La distinction et l'isolement des conduits génitaux et urinaires tient simplement à ce qu'il n'y a point au-devant d'eux un canal commun, urétro-sexuel, qui serve à les tenir sous la même dépendance. D'après cela, l'absence de ce canal chez les myxines femelles est encore un degré d'infériorité de plus par rapport aux autres vertébrés qui en sont pourvus.

En résumé :

La distinction des sexes est impossible par l'appréciation des organes génitaux externes.

Elle est facile, au contraire, quand on compare entre eux le testicule et l'ovaire.

La glande spermagène se compose d'une lame membraneuse à

tissu fibreux, contenue dans un double repli du péritoine, qui renferme des capsules spermagènes sans conduits afférents.

Toutes ces capsules spermagènes se déchirent à l'époque du rut pour émettre les spermatozoïdes qui tombent dans la cavité abdominale.

Les spermiductes manquent complétement, et ce sont les parois abdominales et les canaux péritonéaux qui en tiennent lieu.

Ceux-ci se réunissent en un seul conduit avant de déboucher isolément entre l'anus et les orifices des uretères.

L'ovaire, unique comme l'est le testicule, se compose également d'une bandelette médiane dont le stroma, étendu en nappe, contient des ovules de formes sphériques et d'autres qui sont semblables à des grains d'avoine.

Les oviductes spéciaux manquent entièrement et sont remplacés par la cavité abdominale et par les canaux péritonéaux.

Ceux-ci se confondent ensemble avant d'arriver au dehors, et s'ouvrent par un seul orifice entre l'anus et les uretères.

L'appareil urinaire, rudimentaire comme chez la myxine mâle, se réduit aux deux uretères, sur lesquels s'implantent quelques vestiges glanduliformes des reins primitifs ou corps de Volff.

DEUXIÈME PARTIE.

ANALOGIE DES PARTIES QUI CONSTITUENT LES ORGANES GÉNITAUX DES DEUX SEXES CHEZ LES ANIMAUX VERTÉBRÉS; PARALLÈLE ENTRE LES APPAREILS REPRODUCTEURS MÂLE ET FEMELLE, ET MARCHE DE LEUR DÉGRADATION.

Après avoir donné, dans la première partie de ce travail, la description détaillée de tous les organes qui entrent dans la composition des appareils génito-urinaires, et après en avoir fait con-

naître les fonctions dans toutes les espèces de vertébrés que j'ai étudiées, il me reste actuellement à comparer ici entre elles les diverses parties qui constituent ces organes dans les deux sexes, afin d'établir dans chaque série leur analogie respective. De cette première étude découlent ensuite tout naturellement le parallèle à établir entre les appareils mâle et femelle et la marche de leur dégradation.

Pour plus de clarté dans l'exposé de ces faits, je considère tout l'appareil reproducteur de chaque sexe comme étant composé de deux parties bien distinctes, l'une affectée à l'élaboration du produit générateur, l'autre chargée de conduire ce même produit jusqu'à sa destination. A la première, se rapportent les glandes spermagènes et ovigènes; à la seconde, les conduits spermiductes et oviductes. L'ensemble de chaque appareil mâle et femelle ainsi constitué se trouve très-exactement reproduit sur le tableau synoptique que j'ai tracé entre trois zones distinctes et superposées. La première est plus spécialement affectée aux organes formateurs des produits génitaux; les deux autres aux organes conducteurs de ces produits. Ces divisions, entièrement arbitraires, correspondent à celles établies par Burdach sous les dénominations de sphère productrice, de sphère conductrice et de sphère copulatrice; dénominations que je n'adopte pas, parce qu'elles font trop pressentir qu'il y a un mode d'action spécial et indépendant entre les organes conducteurs et les organes copulateurs, quand, en réalité, ils sont les uns et les autres destinés avant tout à transmettre les produits de la génération. Toutefois, comme les oviductes et les spermiductes présentent à leur terminaison des particularités fort remarquables, leur portion copulatrice se trouve comprise dans la troisième et dernière zone.

Ainsi, une première distinction à établir, dans le but de bien étudier l'appareil reproducteur de chaque sexe, consiste à séparer l'organe qui crée le produit générateur de celui qui le transmet, en le complétant plus ou moins.

Après cela, il faut distinguer avec soin cette partie du conduit

qui précisément ajoute quelque chose aux produits mâle et femelle des organes reproducteurs, de celle qui ne lui est d'aucune utilité et qui n'est destinée qu'à lui livrer passage simplement. Cette distinction, toujours facile à établir quand on a suivi l'évolution des produits spermagènes et ovigènes jusqu'à la fin, montre que c'est toujours la portion du spermiducte ou celle de l'oviducte uniquement affectée au passage des spermatozoïdes ou des ovules qui est véritablement essentielle à ces produits; l'autre leur est accessoire. Il suit de là que le spermiducte et l'oviducte se subdivisent naturellement en spermiducte ou oviducte *spécial* et en spermiducte ou oviducte *accessoire*. Aux premiers correspondent d'une part le conduit séminal, depuis la glande spermagène, jusques et y compris le réservoir séminal, quand il existe, de l'autre, le conduit ovulaire, depuis la glande ovigène jusqu'au vagin, quand il y en a un. Aux seconds se rapportent les conduits qui donnent le plus souvent passage en même temps à l'urine, aux produits prostatiques et autres, et c'est pour cette raison que je préfère les appeler spermiductes *mixtes* et oviductes *mixtes*. Enfin, cette dernière partie du spermiducte ou de l'oviducte ne suffit pas toujours pour conduire au dehors les produits des glandes spermagènes, ovigènes et rénales, car elle débouche assez souvent dans le rectum. Alors l'intestin est chargé d'émettre ces produits et fait ainsi partie du spermiducte ou de l'oviducte mixte. Toutes ces distinctions, importantes relativement au spermiducte et à l'oviducte *essentiel*, et au spermiducte et à l'oviducte *mixte*, se trouvent indiquées sur le tableau synoptique en couleurs diverses, afin de montrer au premier coup d'œil chaque partie de l'appareil génito-urinaire. Les organes qui fournissent ou qui contiennent les spermatozoïdes, d'une part, et ceux qui fournissent ou contiennent les œufs, de l'autre, sont indiqués en bleu. Ceux qui ne contiennent uniquement que de l'urine, le sont en rouge. Les conduits qui transmettent ce liquide en même temps que les produits générateurs et celui des glandes prostates, etc. sont indiqués en violet. La couleur verte se rapporte aux prostates et aux

glandes de Cowper. Le jaune désigne l'ovule dans l'ovaire, et enfin le brun foncé, la région cloacale. Toutes les descriptions qui sont relatives à cette seconde partie se trouvent comprises dans trois paragraphes distincts, que je vais successivement détailler.

§ I.

ANALOGIE DES PARTIES QUI CONSTITUENT LES ORGANES REPRODUCTEURS MÂLES DES VERTÉBRÉS.

Lorsqu'on jette un regard sur l'ensemble d'un des appareils de la reproduction des vertébrés, on voit tout de suite qu'il se compose de deux parties essentielles, l'une destinée à la formation du principe fécondant, l'autre au transport de ce produit. La première est constituée par la glande spermagène, la seconde, par le spermiducte, qui lui-même comprend deux parties bien distinctes. C'est du testicule que je vais d'abord m'occuper, au point de vue de l'analogie des parties qui le composent.

A. *De la glande spermagène des vertébrés.* Cette glande, examinée de dehors en dedans, se compose de parois membraneuses et d'une partie glandulaire. La première enveloppe est celle du péritoine, vient ensuite la tunique albuginée ; celle-ci existe également toujours, mais à des degrés de développement si divers, que parfois elle semble manquer. Cependant, on la retrouve à l'état plus ou moins rudimentaire sur toutes les glandes spermagènes appartenant aux diverses espèces de vertébrés. Une troisième tunique, la plus essentielle de toutes, c'est la membrane vasculaire; elle tapisse la face interne de la membrane fibreuse, à laquelle elle adhère intimement. Cette tunique vasculaire envoie des prolongements dans toute la glande spermagène et fournit des radicules artérielles et veineuses qui vont se distribuer sur les cellules et sur les tubes séminifères. Elle est à ceux-ci ce qu'est la substance grise du cerveau par rapport à la substance blanche de cet organe, c'est-à-dire la partie nutritive et vitale de la glande. Les trois tuniques dont il est ici question entrent essentiellement dans la

constitution de la glande spermagène des vertébrés, et elles sont, tant par leur nature séreuse, fibreuse et vasculaire, que par leurs fonctions, identiquement les mêmes pour tous ces animaux; elles protégent constamment la substance glandulaire et lui fournissent des moyens de nutrition. Dans quelques cas exceptionnels, elles se rompent sur un point d'élection pour livrer passage aux produits générateurs. On voit, d'après ce que je viens de dire, que les organes d'enveloppe des glandes spermagènes sont composés en général de parties similaires ou de tissus qui ont entre eux la plus grande analogie. Pour ce qui est ensuite de la substance propre du testicule, on trouve des variétés très-grandes dans la configuration et dans la disposition des parties qui le composent, et cela, suivant les divers groupes d'animaux qu'on étudie. Mais, à part ces caractères différentiels, sur lesquels je reviendrai bientôt, les parties essentielles et fondamentales de la glande spermagène ont la plus grande analogie entre elles, quand on les compare d'une espèce à une autre. En effet, les cellules et les tubes séminifères sont formés par une membrane fine, transparente et d'une texture vasculaire des plus délicates, qui est tapissée en dedans d'une couche épithéliale. Cette couche, formée de vésicules plus ou moins arrondies, toutes disposées à la manière des pavés d'une rue, ressemble à celle qui tapisse tout le conduit déférent des vers lombriques. Elle fait partie, dans les deux cas, de la membrane hyaline, dont se composent les cellules des tubes séminifères, et concourt puissamment à la formation des vésicules spermagènes qu'on rencontre dans leur cavité. Je reviens actuellement à ce qui est relatif à la configuration et à l'arrangement des tubes séminifères, parce que, d'après leur disposition générale et leur indépendance plus ou moins complète, il est possible d'assigner aux diverses classes de vertébrés la place qu'ils doivent occuper dans l'échelle zoologique.

Ainsi, si l'on prend l'homme pour point de départ, on trouve que les tubes séminifères sont anastomosés entre eux, enroulés sur eux-mêmes et, en même temps, tout à fait libres les uns des autres.

Cet arrangement est le même chez le lapin, chez le kanguroo, chez l'ornithorhynque, chez le lézard et chez la couleuvre à collier : ce sont toujours des tubes spermagènes enroulés, libres et anastomosés. Ces mêmes tubes, toujours indépendants les uns des autres chez la carpe, n'offrent plus que quelques ramifications à extrémités libres et renflées. Puis, chez le pigeon, les tubes, presque droits et non rameux, ont perdu leur indépendance réciproque ; ils sont tous soudés les uns aux autres. Ces tubes, quoique redevenus libres chez le triton, n'ont plus leur forme ni leur calibre cylindrique ; ils sont constitués par de petits tubes renflés au bout. Cette même disposition s'observe d'une manière plus prononcée encore chez le squale émissole, et, quoiqu'il y ait des ramifications pour chaque tube, ceux-ci sont réduits à une ténuité telle, qu'il n'en reste plus, à vrai dire, que la portion vésiculeuse. Enfin, chez les lamproies et chez les myxines, le tube disparaît entièrement ou bien il ne subsiste qu'une simple vésicule sans conduits excréteurs. C'est elle qui se déchire pour émettre ses produits et qui est l'élément primitif des tubes spermagènes, ainsi que le prouve, du reste, l'anatomie embryonnaire. D'après ce qui précède, les glandes spermagènes sont constituées par des vésicules ou des tubes diversement combinés, dont l'arrangement spécial les fait aisément distinguer, bien que les parties qui entrent dans la composition de ces organes aient la plus grande analogie entre elles.

B. *Du spermiducte spécial.* Relativement à cette partie du tube excréteur, voici quelles sont les particularités qu'elles présentent, eu égard à l'analogie des parties qui les composent, dans la série des vertébrés : en prenant toujours l'homme pour point de départ, on voit que ce conduit membraneux se rapporte à deux sections bien distinctes ; l'une, qui est exclusivement affectée au transport des zoospermes ; l'autre, qui conduit, en même temps que ce produit, les produits de l'urine, des glandes prostates et de Cowper. La première correspond au spermiducte *spécial*, la seconde, au spermiducte *mixte*. Le spermiducte spécial commence au corps d'Hygmore et se termine à la vésicule séminale, ce qui

comprend l'épididyme, le canal déférent, jusqu'à ce réservoir des zoospermes. A son origine, le conduit spermatique offre bien les mêmes caractères anatomiques que celui des tubes séminifères, bien que ses parois, plus épaisses, le fassent entièrement différer d'aspect. Il semble que les tubes hyalins des séminifères, en sortant des enveloppes du testicule, sont composés d'une trame plus forte, plus serrée, et renfermant plus de tissu cellulaire. La tunique interne de tout le spermiducte spécial se modifie insensiblement. L'épithélium ne présente bientôt plus le même aspect; les cellules distinctes et arrondies qui le constituent d'abord se déforment ensuite peu à peu et s'aplatissent jusqu'au point de s'effacer presque entièrement. En même temps que ces changements s'opèrent, la membrane muqueuse sous-jacente devient petit à petit plus évidente, plus épaisse et mieux caractérisée; aussi la reconnaît-on facilement dans la cavité de la vésicule séminale. Le spermiducte spécial, d'après ce qui précède, ne présente pas la même structure anatomique partout; c'est un organe toujours essentiel aux zoospermes, comme l'est le canal intestinal dans son ensemble par rapport à la fonction de la digestion, dont chaque région du tube est affectée à une mission particulière. Aussi les zoospermes, que l'on rencontre encore fort peu développés dans le réservoir d'Hygmore, trouvent-ils, en franchissant l'épididyme et le déférent, des produits qu'ils s'assimilent et qui servent à leur accroissement. Puis, quand ils stationnent dans le réservoir séminal, ils rencontrent encore là un mucus qui leur est très-utile, si l'on en juge par la force et l'agilité plus grande qu'ils y acquièrent. Tout le spermiducte spécial, d'après cela, constitue un organe à fonctions complexes, puisqu'il sert en même temps à sécréter des produits utiles aux zoospermes et de canal conducteur. En passant ensuite aux autres vertébrés, on trouve, après l'homme, que le lapin a un spermiducte spécial tout à fait composé de parties analogues; seulement les dernières portions de chaque tube se rapprochent sur la ligne médiane et se soudent ensemble. Chez les kanguroos, et plus particulièrement chez le didelphe crabier, le

spermiducte, après son enroulement épididymiforme, se termine par un tube droit, ayant le même calibre d'un bout à l'autre, au sommet d'une papille érectile. L'ornithorhynque présente une autre variété : le spermiducte ne se pelotonne plus sur lui-même pour constituer l'épididyme; mais, en revanche, il décrit de nombreuses sinuosités dans tout son parcours, ce qui semble compenser un peu sa longueur totale et donner ainsi aux spermatozoïdes le moyen de bien se développer. Ici encore, il n'y a point de vésicule séminale et le spermiducte s'effile considérablement avant de se terminer au sommet d'une petite papille de chaque côté. L'échidné présente absolument les mêmes dispositions; c'est évidemment un même type d'organisation. Les lézards et les couleuvres ont un spermiducte spécial, qui ne diffère pas d'une manière sensible de celui des monotrèmes. Chez la carpe, les choses changent tout à coup; le spermiducte spécial ne forme plus d'épididyme et le déférent, fort court, débouche dans un réservoir séminal commun. Le pigeon présente de nouveau une portion épididymique; le reste du canal, presque droit dans tout son parcours, devient sinueux vers la fin et se termine par une ampoule ou réservoir séminal très-petit. On retrouve un épididyme et un déférent disposés en zigzag chez le triton; mais ce spermiducte spécial s'effile considérablement avant de se terminer au sommet d'une petite papille érectile. Chez le squale émissole, le spermiducte spécial est profondément modifié. Il constitue d'abord un épididyme considérable, puis un déférent dont la structure, qui semble très-exagérée, montre que cette partie, en retenant plus ou moins longtemps les spermatozoïdes, leur donne la facilité de se développer convenablement. Ce déférent débouche ensuite dans une portion du canal de l'urètre qui avoisine les vésicules séminales, et cette particularité semble au premier abord indiquer que ces réservoirs des spermatozoïdes ne sont plus une dépendance du spermiducte. Pourtant les connexions existent toujours, car il y a incontestablement continuité de tissus entre ces organes et transvasement des produits du testicule dans les réservoirs sper-

matiques. Mais là n'est pas la bizarrerie la plus grande; un autre fait plus important est celui du passage de l'urine dans le déférent, à l'aide de conduits anastomotiques. Cette particularité a sa signification fonctionnelle et prouve du reste l'intimité de rapports qu'il y a entre les organes urinaires et générateurs. Enfin, les lamproies et les myxines manquent entièrement de spermiducte spécial. Les cellules spermagènes, fermées de toutes parts, n'ont plus de conduit excréteur. Toutefois, il existe encore une partie très-rudimentaire de ce conduit; c'est le canal péritonéal qui s'unit de chaque côté à l'uretère avant de déboucher au sommet d'une papille érectile commune au sperme et à l'urine.

Ici se terminent les particularités que présentent les spermiductes essentiels. Comme on le voit, sauf les quelques modifications de forme, de disposition et de rapports, les parties qui constituent ces organes sont entièrement analogues dans toute la série des animaux vertébrés, et l'analogie comprend aussi bien la contexture que la fonction.

C. *Du spermiducte mixte.* Ce conduit commence au point de jonction du spermiducte spécial avec les organes urinaires. Il se trouve correspondre chez l'homme à la crête urétrale. A partir de là, jusqu'à l'extrémité de la verge, c'est le spermiducte mixte ou le canal urétro-sexuel. Le col vésical, composé d'un tissu fibreux très-serré, provenant du réservoir de l'urine, a également des connexions intimes avec les uretères. Aussi faut-il regarder la vessie urinaire comme une dépendance appendiculaire et terminale de ces derniers. La vessie est donc aux uretères ce que la vésicule séminale est au spermiducte spécial. L'urine et le sperme ont ainsi pour conduit excréteur le canal de l'urètre, puisque c'est dans celui-ci que débouche le spermiducte. On y voit aboutir également les nombreux conduits de la prostate et ceux des glandes de Cowper. Les orifices nombreux des premiers entourent, pour ainsi dire, le point où arrivent les spermiductes spéciaux, afin que la liqueur qu'ils émettent puisse se mêler aux sperma-

tozoïdes, et leur servir ainsi de liquide diluant. C'est dans le même but que fonctionnent plus loin les glandes de Cowper. Enfin, les parois du spermiducte mixte se composent de tissu fibreux, de tissu érectile, de tissu caverneux, de tissu cellulaire et d'une enveloppe cutanée. La muqueuse vésicale tapisse ensuite tout l'intérieur du canal et se continue au dehors avec la peau du membre viril.

Chez le lapin, le spermiducte mixte commence également à la crête urétrale et finit au gland. Dans tout ce parcours, constitué de parties analogues à celles du canal urétro-sexuel de l'homme, débouchent aussi les nombreux conduits des glandes prostates et de Cowper; et cela dans un même ordre : ceux des premières, autour de l'orifice séminal devenu unique chez le lapin; ceux des secondes, un peu plus avant dans le même canal. La vessie urinaire est encore ici plutôt une continuation des uretères qu'une partie appendiculaire de ces organes. Il y a même à remarquer que le trigone vésical est placé plus au centre de la vessie que chez l'homme.

Chez le didelphe crabier le spermiducte mixte n'a plus pour point d'origine la crête urétrale; mais, à son défaut, ce sont les papilles terminales des spermiductes spéciaux qui en tracent les limites. Ces papilles, bien distinctes l'une de l'autre, sont implantées sur le col vésical, un peu plus profondément que ne l'est la crête urétrale et très-près de deux autres papilles, où aboutissent les uretères. Il n'y a plus de vésicules séminales, plus d'orifices prostatiques placés autour du point où débouchent les spermiductes spéciaux; mais, en revanche, les glandes de Cowper y affluent par plusieurs ouvertures. La dernière partie du spermiducte mixte se divise ensuite en deux portions égales pour s'adapter plus convenablement aux organes sexuels de la femelle. Enfin ici la vessie s'isole complétement des uretères, dont elle n'est plus qu'une dépendance appendiculiforme.

Chez l'ornithorhynque, le confluent des organes urinaire et spermatique est toujours au col vésical; mais la vessie s'isole

encore plus des uretères que chez les didelphes. Relativement ensuite au mode de terminaison des spermiductes spéciaux, il est le même que celui du crabier : c'est une papille érectile qui débouche de chaque côté dans le canal de l'urètre. Quant à la dernière portion du spermiducte mixte, elle est chez l'ornithorhynque, non-seulement divisée en deux voies comme chez les didelphes, mais elle présente, en outre, cette singularité, que l'une d'elles va s'ouvrir dans le rectum et l'autre au sommet du gland. Or cette bifurcation constitue un hypospade des plus singuliers, puisque, au point de vue fonctionnel, il peut conduire les sécrétions spermatique et urinaire dans des directions bien différentes l'une de l'autre; celle des glandes spermagènes passe seule par le gland, et celle des glandes rénales par l'orifice urétro-rectal. Enfin, la verge de l'ornithorhynque, placée dans un fourreau prépucial, se compose de parties analogues à celles des vertébrés déjà indiqués, et constitue l'une des terminaisons du spermiducte mixte. L'autre serait représentée par la dernière portion du rectum, s'il était démontré que le sperme mêlé à l'urine y passe également.

Chez le lézard, le spermiducte mixte a beaucoup perdu de son étendue et s'est un peu modifié en apparence. Il est constitué en partie par la papille vestibulaire, qui, de chaque côté de l'axe médian, reçoit l'uretère et le spermiducte simple. Cette papille érectile provient autant des organes spéciaux à l'urine que de ceux qui dérivent de la reproduction. Son conduit commun, que la disjonction des uretères de la vessie urinaire a facilité, aboutit dans une partie du vestibule génito-excrémentitiel qui tient véritablement lieu de canal de l'urètre, et, comme l'urine et le sperme la traversent également, c'est elle qui constitue, à vrai dire, le conduit spermagène mixte. Ce qui milite en faveur de cette opinion, c'est que le rectum débouche véritablement dans la région du col vésical, et que c'est dans cette même région qu'aboutissent ordinairement les conduits urinaires et spermatiques.

La couleuvre à collier est à peu de chose près dans les mêmes

conditions que les lézards; seulement, tandis que ceux-ci ont encore des papilles distinctes et séparées l'une de l'autre, en même temps qu'elles sont communes au sperme et à l'urine, celle-là n'a plus qu'une seule papille située sur la ligne médiane où aboutissent les uretères et les spermiductes spéciaux. C'est en avant de cette papille que se trouve dans le vestibule génito-excrémentitiel une de ses régions uniquement affectée au passage de l'urine et du sperme, et, par conséquent, la partie analogue au canal urétro-sexuel ou au spermiducte mixte. La partie du vestibule commun ensuite, qui est comprise entre les deux sphincters du rectum et qui reçoit l'urine directement, représente, au point de vue anatomique, physiologique et je dirai même morphologique, la vessie urinaire.

Chez la carpe, le spermiducte mixte manque totalement, et c'est tout au plus si l'on y retrouve un vestibule génito-excrémentitiel rudimentaire. On dirait qu'une section transversale pratiquée sur les organes génito-urinaire et rectal a empêché les conduits urinaires de se joindre aux conduits spermatiques et de déboucher ensuite dans le vestibule commun. Aussi, toutes les voies génitale, urinaire et rectale, aboutissent-elles chacune de leur côté. C'est, qu'en réalité, cette section existe par le fait tout naturellement, puisque les conduits urinaires et ceux des spermiductes spéciaux ne se sont pas rejoints pour constituer le spermiducte mixte. Or cette simplicité d'appareil, qui exprime un véritable arrêt de développement, semble, au contraire, réaliser le plan d'un organisme supérieur, quand par le fait cela n'est pas.

Chez le pigeon, le spermiducte mixte reparaît, mais sous un aspect encore bien différent; le spermiducte spécial de chaque côté reste distinct des uretères, et la papille sexuelle analogue à celle de l'ornithorhynque, du didelphe, etc. ne s'unit pas anatomiquement aux voies urinaires pour constituer l'origine du spermiducte mixte. Pourtant celui-ci existe, fonctionnellement parlant, de même que la vessie urinaire.

Le compartiment ou loge médiane du vestibule génito-excré-

mentitiel constitue le réservoir urinaire, et la loge copulatrice, véritable col vésical entouré de la glande prostate ou de Fabricius, la dernière portion du canal urétro-sexuel, en même temps qu'il est le conduit rectal. A ce compte, le principe des connexions, quand il est envisagé à un point de vue philosophique, trouve toujours sa véritable signification.

Chez le triton, les choses se passent presque de la même manière que chez le pigeon. Les conduits urinaires et les spermiductes spéciaux aboutissent dans le vestibule génito-excrémentitiel, mais dans une région de ce vestibule qui est plus particulièrement encore affectée au passage de l'urine et du sperme. En effet, ses rapports avec une vessie urinaire, avec une crête urétrale, avec un gland imperforé et avec les conduits prostatiques, lui donnent tous les caractères distinctifs d'un spermiducte mixte dans lequel vient déboucher également le rectum.

Chez le squale émissole, le spermiducte mixte reprend ses allures ordinaires et a même une étendue assez considérable. Les vessies urinaires, véritables renflements des uretères, et les vésicules séminales y débouchent séparément; de plus, les spermiductes spéciaux y aboutissent à l'aide de saillies papillaires analogues à celles des mammifères, et puis la partie terminale de ce conduit, spermiducte mixte, constitue une petite verge érectile assez complète.

Enfin, les lamproies et les myxines ont un vestige de spermiducte spécial qui s'ouvre dans la papille de chaque uretère; aussi en avant d'eux se trouvent un spermiducte mixte très-rudimentaire et un petit vestibule commun.

§ II.

ANALOGIE DES PARTIES QUI CONSTITUENT LES ORGANES REPRODUCTEURS FEMELLES DES VERTÉBRÉS.

En examinant l'ensemble d'un appareil reproducteur femelle quelconque, on voit qu'il y a à considérer, comme chez le mâle,

les organes formateur et conducteur qui sont : la glande ovigène, l'oviducte spécial et l'oviducte mixte. Il y a longtemps déjà que les auteurs ont établi des divisions à ce sujet dans le but de mieux étudier la question. C'est surtout l'oviducte qui a le plus fixé l'attention des savants et mis en jeu toute leur sagacité quand il s'est agi de le considérer au point de vue philosophique. C'est au célèbre Geoffroy-Saint-Hilaire que la science est redevable des plus grands efforts tentés à ce sujet, ainsi que l'a très-bien exprimé M. Isidore Dumas dans son remarquable mémoire sur la sphère génitale moyenne des vertébrés. Ce tube, en effet, organe de jonction entre l'ovaire et l'extérieur du corps, leur a apparu constitué d'une manière tantôt homogène ou sans distinctions essentielles, et tantôt hétérogène ou divisé en parties distinctes les unes des autres. On lui a reconnu chez les vertébrés, où il est au maximum de sa composition, jusqu'à quatre segments différents et bien distincts. Tout cela s'est fait à l'aide des données anatomiques et physiologiques et du principe des connexions; aussi est-on arrivé de cette manière à préciser les diverses régions d'un organe très-simple en apparence. Mais combien est grande la difficulté dans ces sortes de déterminations, quand on songe que l'arrangement, la disposition, la forme et la contexture même des parties ne constituent pas toujours un caractère essentiel de la fonctionnalité? Que de fois n'attribue-t-on pas plusieurs fonctions à un même organe? Cependant, il faut se hâter de le dire, la difficulté est plutôt ici apparente que réelle, et l'on peut avec quelque attention éviter souvent l'erreur. En rapportant donc à trois divisions principales l'étude des organes reproducteurs femelles, j'espère embrasser dans leur ensemble tous les caractères distinctifs de chaque appareil. J'aurai ainsi à examiner successivement les parties qui constituent les ovaires, celles qui composent l'oviducte spécial, et enfin celles qui forment l'oviducte mixte.

A. *De la glande ovigène des vertébrés.* — Cette glande, étudiée chez la femme, la lapine, les didelphes, l'ornithorhynque et l'échidné, présente à considérer la partie corticale et la partie

centrale. La première comprend la tunique séreuse que lui fournit le péritoine, la tunique fibreuse qui lui est propre et la tunique interne ou vasculaire. Ces trois couches membraneuses ne sont pas simplement superposées l'une à l'autre, la tunique fibreuse et la tunique vasculaire se fractionnent et se subdivisent en une multitude de radicules et de cloisons qui vont constituer un nombre plus ou moins grand de compartiments ou de cellules, correspondant aux vésicules de Graaf, lesquelles se composent toutes d'un réseau membraneux très-vasculaire entouré de tissu cellulaire très-dense, et d'une membrane granulée qui est une dépendance de la première. C'est au milieu de ces granulations que se trouve l'ovule, même sur des ovaires de jeunes fœtus. Il y a de plus dans ces capsules de Graaf, à l'époque du rut, une quantité de liquide albumineux assez considérable. Aucun conduit, aucune issue naturelle n'existent sur les parois de ces petites cellules, aussi l'ovule ne peut en sortir que lorsque la distention des enveloppes est devenue assez grande par l'accumulation successive du liquide, pour en produire la déchirure. Cette particularité de la rupture des enveloppes ovariennes et des parois de la vésicule de Graaf s'observe également chez le lézard, la couleuvre, la carpe, le pigeon, le triton, le squale, les lamproies et les myxines; mais avec cette différence toute caractéristique, que ce n'est plus par suite de l'accumulation toujours croissante d'un liquide albumineux ou autre que s'effectue la déchirure, mais bien par l'effet de l'accroissement successif de l'ovule lui-même. De son contact immédiat avec sa cellule, qui prend ici le nom de calice, provient donc le mode de déhiscence, qui souvent a lieu sur un point spécial tracé à l'avance. Malgré ces différences apparentes, la vésicule de Graaf et les calices sont des organes dont les parties constituantes ont entre elles la plus grande analogie. Il y a, en effet, de part et d'autre une membrane séreuse, une membrane fibreuse, une membrane celluleuse très-vasculaire et une membrane interne granulée ou villeuse : ces deux dernières dépendent de la couche vasculaire, qui leur fournit les moyens de constituer l'ovule en le faisant passer

de l'état le plus rudimentaire à celui d'ovule fécondable. Ce sont là les particularités que présentent les ovaires des vertébrés, et qui sont, comme on le voit, en moins grand nombre que celles qu'on observe pour les testicules. Examinons actuellement ce que l'oviducte en général offre de remarquable.

B. *De l'oviducte spécial.* — Cette partie de l'appareil reproducteur comprend, comme chez le mâle, tout le conduit qui est particulièrement destiné à transmettre et à compléter le produit ovarien. Elle s'étend chez la femme depuis le pavillon de la trompe jusqu'à l'orifice vaginal, qui se trouve dans l'angle postérieur du vestibule génito-urinaire rudimentaire. Examinés chez le lapin, les oviductes spéciaux restent plus longtemps que chez la femme dans une indépendance complète; mais bientôt ils se réunissent l'un à l'autre de manière à constituer un tube unique, un vagin commun qui se confond avec le canal de l'urètre, à une distance assez grande de l'orifice génito-urinaire externe.

Chez le didelphe crabier, les deux oviductes spéciaux, d'abord distincts l'un de l'autre, se rejoignent ensuite sur la ligne médiane, communiquent largement entre eux, puis se séparent de nouveau, se coudent en forme d'anse et vont enfin déboucher dans le canal de l'urètre. Dans tout ce parcours, on remarque des renflements et des cavités distinctes qui ont des fonctions spéciales.

Chez l'ornithorhynque, les deux oviductes spéciaux s'étendent depuis le pavillon de la trompe de Fallope jusqu'au col vésical dans lequel ils débouchent. Ces tubes cylindriques semblent avoir la même structure d'un bout à l'autre.

Chez le lézard et la couleuvre chaque oviducte spécial, bien développé, aboutit au vestibule génito-excrémentitiel. On y distingue un pavillon, un collet ou trompe, un utérus et un col utérin.

Chez la carpe, les oviductes spéciaux sont constitués tout autrement. Il n'y a plus de pavillons distincts, plus de trompe de Fallope apparente; c'est un véritable sac de chaque côté de la ligne médiane qui, après avoir enveloppé l'ovaire correspondant, dans son entier, va se joindre à son congénère, et constitue ainsi une loge

commune, une sorte d'utérus qui aboutit au dehors à l'aide d'un petit canal excréteur.

Le pigeon à l'état adulte n'a plus qu'un seul oviducte spécial, le gauche, à pavillon libre, qui débouche dans le vestibule génito-excrémentitiel. Il est constitué de parties distinctes qui, comme chez la poule et les mammifères, ont des fonctions toutes particulières.

Chez le triton, on retrouve un oviducte spécial de chaque côté ayant un pavillon, mais cette partie du tube est fixée au sommet de la cavité abdominale. Quant à leur terminaison, les oviductes atteignent la région vestibulaire et y débouchent à droite et à gauche.

Chez le squale émissole, l'oviducte spécial se compose d'un conduit de chaque côté dont les pavillons sont soudés ensemble. Ils aboutissent l'un et l'autre au vestibule commun.

Enfin, les lamproies et les myxines n'ont plus d'oviducte spécial, si ce n'est le petit canal péritonéal qui aboutit à la papille urinaire. C'est cette partie rudimentaire qui le représente chez ces animaux.

Tous ces oviductes spéciaux des divers vertébrés que je viens d'indiquer se composent de parties qui ont la plus grande analogie entre elles. Ils ont tous une enveloppe externe séreuse, une tunique moyenne, qui est plus ou moins évidemment fibreuse, et une tunique interne ou muqueuse. Une seule espèce, la carpe, semble faire exception à cette règle, et pourtant, en examinant les choses de près, on retrouve la tunique fibreuse, très-diffuse à la vérité, et des traces de la membrane muqueuse. Toutes ces parties, constituant l'oviducte spécial, se groupent entre elles, se massent plus ou moins sous diverses formes, et se modifient à l'infini pour être aptes aux fonctions variées qu'elles doivent remplir. Le tout est de les reconnaître même sous l'apparence d'organes atrophiés, et de leur assigner leurs véritables fonctions; c'est à quoi je m'attacherai dans le troisième paragraphe.

C. De l'oviducte mixte. — De même que le spermiducte mixte, cette seconde portion de l'appareil reproducteur est celle qui offre

le plus de difficultés quand il s'agit de bien fixer ses limites; c'est à elle surtout que se rapporte la région ou sphère copulatrice des auteurs, région qui, quelquefois, correspond à des organes complexes pouvant exercer des fonctions entièrement distinctes, bien qu'en apparence affectés à une seule. On dirait que la nature, chez certaines espèces, a concentré tous ses moyens d'action sur un seul et même point, dans le but de les rendre solidaires les uns des autres. En général, le spermiducte et l'oviducte mixtes ne fournissent plus rien d'essentiel aux produits de la génération, et leur rôle se borne simplement à transmettre ces produits et à leur faciliter les moyens d'expulsion à l'aide de sécrétions muqueuses ou autres qui s'y joignent le plus souvent. Au surplus, l'oviducte mixte commence, comme le spermiducte mixte, au point de jonction des voies urinaires avec l'oviducte spécial, et se termine au dehors ou bien dans un vestibule génito-excrémentitiel.

Chez la femme, le point de jonction de l'oviducte spécial avec le canal de l'urètre se fait très-bas vers les parties génitales externes dans la fossette naviculaire, qui, avec les petites et grandes lèvres de la vulve, constituent le vestibule génito-urinaire; il résulte de là que l'oviducte mixte est représenté par le vestibule en question, qui n'est autre que cet oviducte à l'état rudimentaire.

Chez la lapine, où la rencontre des voies urinaires s'effectue plus dans l'intérieur du corps que chez la femme, il y a un oviducte mixte très-nettement limité et d'une certaine étendue : on ne sait au juste si, chez cet animal, c'est le vagin qui se continue jusqu'à l'orifice vulvaire, ou bien si l'on a plutôt affaire au col de la vessie; ce qu'il y a de bien certain toutefois, c'est que l'oviducte mixte a des connexions intimes avec ces deux conduits en même temps. Malgré cela, et en tenant compte de la nature des parois des tubes excréteurs, de leur forme, de leur volume, de leur étendue réciproque et de leur arrangement interne, on peut dire que l'oviducte spécial pénètre dans le canal de l'urètre, et qu'alors l'oviducte mixte appartient plus à la vessie qu'au vagin.

Le didelphe crabier est encore un exemple de la très-grande

fusion des parties qui constituent les organes urinaires et de celles qui proviennent des organes reproducteurs : ici, comme dans le cas précédent, les fibres musculaires de la vessie se prolongent évidemment jusqu'à la vulve, de même que celles qui proviennent des deux boyaux sexuels ou oviductes spéciaux y aboutissent aussi. Le point de cette fusion, étant encore plus en avant dans l'abdomen, il en résulte que l'oviducte mixte est plus long chez le didelphe que chez la lapine : de plus, le canal urétro-sexuel se termine dans la région anale elle-même, et par conséquent plus près de l'anus que chez le lapin; on voit, d'après cela, que l'on marche déjà vers un autre ordre de faits, celui de la fusion entre l'oviducte mixte et le gros intestin.

Chez l'ornithorhynque et l'échidné, l'oviducte mixte prend de plus grandes proportions encore, il commence au col vésical, où se trouvent les papilles communes aux uretères et aux oviductes spéciaux, et finit dans le rectum à une profondeur assez grande de son orifice externe. A partir de ce point jusqu'au dehors, il règne, sur la région inférieure ou plancher du vestibule génito-excrémentitiel, une gouttière convenablement disposée, qui n'est autre chose qu'une portion incomplète de l'oviducte mixte.

Chez le lézard vert et chez la couleuvre à collier, le conduit spécial de l'oviducte se joint à l'uretère avant de déboucher dans la portion très-restreinte du vestibule génito-excrémentitiel qui représente l'oviducte mixte. Celui-ci est donc de nouveau réduit chez les reptiles à un canal rudimentaire qui se surajoute au rectum et qui livre aussi passage aux fécès.

Chez la carpe, l'oviducte mixte n'est qu'à l'état rudimentaire; c'est, comme chez la femme, un vestibule bien peu développé qui le représente, et encore ce vestibule n'est-il pas seulement destiné à circonscrire simplement les orifices de l'oviducte spécial et celui de l'urine, il comprend également l'anus, dans de certaines limites toutefois.

Chez le pigeon, l'oviducte mixte est constitué par les deux loges vestibulaires, la loge copulatrice de Geoffroy-Saint-Hilaire et la

loge moyenne, que j'appelle vésicale. Les voies urinaires et les voies génitales, en effet, se rencontrent dans la région moyenne du vestibule génito-excrémentitiel, et tout ce qui est en avant de ce point de jonction, jusqu'au dehors, constitue le canal urétro-sexuel. On y retrouve, ainsi que je l'ai dit dans la première partie de cet ouvrage, une membrane fibreuse, une membrane muqueuse et des cryptes glandulaires dont la fonctionnalité est la même que chez les animaux mammifères. Seulement, ces instruments divers n'affectent ni la même forme, ni la même disposition, ni les mêmes rapports; aussi, ce canal urétro-sexuel est-il également un conduit rectal. On voit, en effet, que le gros intestin, en rencontrant la vessie, y pénètre, et que c'est à l'aide des parois de celle-ci qu'il aboutit au dehors.

Chez le triton, l'oviducte mixte semble plus distinct que chez le pigeon, et cela à cause de l'admirable arrangement du vestibule commun, dont la dernière partie est un véritable canal de l'urètre, en rapport avec une vessie urinaire, avec un gland imperforé et avec des conduits prostatiques. Les oviductes spéciaux et les uretères distincts les uns des autres aboutissent au même point, et c'est de là que commence l'oviducte mixte. Mais en ce même point d'origine de ce canal débouche le rectum, et cette circonstance fait que le canal de l'urètre est aussi destiné à émettre les produits stercoraux. Ainsi, encore chez le triton, toutes les parties, constituant le vestibule génito-excrémentitiel ont des fonctions distinctes et spéciales qui ont la plus grande analogie avec celles qui composent le canal de l'urètre des mammifères.

Chez le squale émissole, l'oviducte mixte comprend la portion du col utérin et la portion vestibulaire jusqu'à l'anus : ici, les voies urinaires et génitales se terminent d'une manière distincte dans le vestibule génito-excrémentitiel, qui est formé, en partie par la terminaison des oviductes spéciaux, et en partie par le rectum. La papille urinaire se trouve entre les deux embouchures des cornes utérines, et sa base est implantée sur la paroi supérieure du cloaque.

Enfin, chez les lamproies et les myxines, l'oviducte mixte est représenté par le canal péritonéal qui s'étend, après s'être confondu avec l'uretère, jusqu'au sommet de la papille urétro-sexuelle d'une part, et de l'autre jusqu'au vestibule commun.

§ III.

PARALLÈLE ENTRE LES APPAREILS REPRODUCTEURS MÂLE ET FEMELLE DES VERTÉBRÉS, ET MARCHE DE LEUR DÉGRADATION.

Bien qu'il ne soit pas toujours facile au premier abord de pouvoir comparer entre elles toutes les parties qui composent les appareils reproducteurs mâle et femelle des animaux vertébrés, on arrive cependant, après une étude approfondie et à l'aide de divisions bien établies, à pouvoir leur assigner une fonction déterminée, et par conséquent à reconnaître leur analogie dans les deux sexes. De ce parallèle ainsi fractionné et fait pour ainsi dire un à un, on en déduit plus facilement la dégradation de chaque organe composant l'appareil reproducteur, dégradation qui s'opère d'une manière insensible, et qui souvent atteint un état rudimentaire tel, que certaines parties semblent ne plus exister. C'est là, du reste, ce qui ressortira clairement des faits nombreux qui vont suivre.

Lorsqu'on cherche, chez l'homme, les parties de l'appareil reproducteur qu'on peut comparer avec celles de l'appareil reproducteur de la femme, on trouve d'abord que la glande spermagène est analogue à la glande ovigène; l'une et l'autre sont constituées de parties similaires dont l'arrangement seul diffère, et l'une et l'autre aussi fournissent les éléments indispensables à la formation du nouvel être. La première, toutefois, secrète des produits qui ont un degré de vitalité de plus, puisqu'ils sont doués d'un mouvement spontané que n'ont pas ceux provenant des glandes ovigènes, et ce fait établit déjà une supériorité en faveur de l'appareil mâle. Ensuite, les organes de transmission des produits glandulaires, spermiductes et oviductes spéciaux, ont entre eux la

plus grande analogie de texture et de fonction; ils sont composés, tant chez le mâle que chez la femelle, d'enveloppes séreuses, de parties charnues et de membranes muqueuses riches en vaisseaux, en glandules sécrétantes, etc., et ils sont destinés, non-seulement à servir de canal excréteur aux glandes spermagènes et ovigènes, mais encore à fournir aux produits de ces glandes des matériaux nécessaires à leur entier développement. A ce double point de vue anatomique et physiologique, les spermiductes et les oviductes spéciaux sont analogues entre eux; mais ici, encore, il y a, en faveur de l'appareil reproducteur mâle, un degré de supériorité organique qu'on ne retrouve pas chez l'autre sexe, c'est que la glande spermagène a son conduit excréteur qui lui fait suite, tandis que celui de la glande ovigène en est séparé. Indépendamment de cela, les oviductes spéciaux, par suite de leur fusion sur la ligne médiane pour constituer l'utérus unique de la femme, offrent encore un degré d'infériorité par rapport aux spermiductes spéciaux, qui restent doubles et symétriques jusqu'à leur terminaison. Relativement ensuite au spermiducte et à l'oviducte mixtes, l'analogie, quoique moins frappante, n'en est pas moins réelle. En effet, la verge de l'homme, qui constitue le spermiducte mixte, est représentée chez la femme, par le clitoris, qui en est la partie érectile, et par la dernière portion du canal vésical unie au vagin à l'aide des nymphes, c'est-à-dire par la région du vestibule génito-urinaire. On peut encore ajouter que ces nymphes, qui entourent le méat urinaire et l'entrée du vagin, sont les analogues du gland de la verge, et que les deux grandes lèvres sont aux petites ce que le prépuce est au gland. Quant à la glande prostate de l'homme, qui fait partie du spermiducte mixte, elle peut être comparée chez la femme aux glandes décrites par M. Huguier, glandes qui sont placées précisément à l'origine de l'oviducte mixte. Dans tout ceci, la femme est toujours frappée d'infériorité, puisque le clitoris, qui représente les corps caverneux de la verge, se détache de l'urètre, et que cet état de choses constitue un hypospadias ou un véritable arrêt de développement. Il résulte de

là, que le canal urétro-sexuel, en tant qu'il est accompagné des corps caverneux et qu'il est placé au dehors du corps, établit un degré de supériorité incontestable.

Toutes ces particularités sont en grande partie applicables au lapin. Les glandes spermagènes et les spermiductes de ce petit mammifère constituent des organes analogues aux glandes ovigènes et aux oviductes de la lapine. Toutefois, ces appareils sont déjà en voie de dégradation organique comparativement à ceux de l'homme et de la femme. Et d'abord, pour ce qui est relatif aux spermiductes spéciaux, ceux-ci ne conservent plus leur indépendance jusqu'à leur terminaison, puisqu'il n'y a qu'un réservoir unique pour le sperme, au lieu de deux vésicules séminales comme chez l'homme. Ensuite, quant aux oviductes, leur indépendance réciproque est bien si l'on veut plus grande que chez la femme; mais cet isolement plus grand des parties similaires, loin de constituer un degré de perfectibilité organique, est par rapport à l'utérus un organe en voie de dégradation. C'est qu'en effet l'utérus, chez la femme, est une partie de l'appareil reproducteur qui s'est élevé par sa structure si complexe, et par une sorte de centralisation, si l'on peut parler ainsi, des matériaux qui le constituent, à un haut degré de composition organique. Cela est si vrai, que nulle part dans la série des vertébrés on ne rencontre un organe gestateur doué de plus de force et de puissance musculaire que celui-là. Une autre particularité du même genre se présente à l'égard de l'oviducte mixte de la lapine; c'est qu'il est bien plus étendu que celui de la femme, et en apparence, d'après cela, moins dégradé. Pourtant, si l'on considère que le canal urétro-sexuel de ce petit vertébré n'est, pas plus que celui de la femme, entouré de corps caverneux, que le clitoris est distinct de l'oviducte mixte, que ce défaut de rapports établit un hypospadias, et que les organes urinaires et génitaux se sont rencontrés plus profondément dans la cavité abdominale, on en conclura que l'appareil reproducteur de la lapine est en voie de dégradation.

Chez le didelphe crabier, les glandes spermagènes et ovigènes

ont entre elles beaucoup de similitude sous le rapport de la forme, ce qui rend leur analogie plus évidente. Il en est de même des spermiductes et des oviductes comparés les uns aux autres; leur conformité est aussi très-grande. Ces appareils dans leur ensemble diffèrent notablement de ceux déjà décrits. En premier lieu, les spermiductes spéciaux n'ont plus de réservoir particulier pour le sperme, et les uretères tendent à s'isoler du réservoir de l'urine; en second lieu, le canal urétro-sexuel ou spermiducte mixte n'est plus extérieur et n'est plus accompagné des corps caverneux. La verge bifide, ou pour mieux dire le gland fendu en deux parties égales fait seul saillie au dehors. Ce sont là des particularités anatomiques qui établissent une dégradation sensible de l'appareil reproducteur mâle. Quant à celui du crabier femelle, les deux oviductes spéciaux, d'abord distincts l'un de l'autre à leur origine vers le pavillon de la trompe, se rapprochent ensuite de la ligne médiane, se soudent entre eux en ce point, de manière à former une cavité commune, puis vont en divergeant constituer les deux anses sexuelles qui enfin se réunissent l'une à l'autre avant de déboucher dans le conduit urinaire. Le canal urétro-sexuel qui en résulte est assez long et aboutit au dehors au-dessous du clitoris. Cet organe érectile très-rudimentaire est resté double, et cette dualité primitive ou embryonnaire constitue un arrêt de développement que les appareils reproducteurs précédemment décrits n'ont pas présenté.

Chez l'ornithorhynque, les appareils de la reproduction mâle et femelle semblent calqués l'un sur l'autre, en sorte que l'analogie des parties qui les composent est des plus grandes. En même temps, la dégradation de l'appareil mâle est considérable; elle porte principalement sur les organes urinaires et sur le spermiducte mixte. Il résulte de là que l'appareil femelle n'a plus qu'une infériorité relative, non pas à l'égard de celui du mâle, mais comparativement à celui des organes femelles des mammifères déjà décrits. Pour ce qui concerne l'appareil mâle de l'ornithorhynque, on voit que les uretères ont entièrement abandonné la vessie

urinaire, que les spermiductes spéciaux n'ont plus de vésicule séminale, que la prostate manque, que les glandes de Cowper sont très-rudimentaires, que le spermiducte mixte s'ouvre en partie dans le rectum, en partie seulement dans la verge, que cet organe appendiculaire des parties sexuelles externes est invisible au dehors, et qu'enfin il ne peut se montrer pour caractériser le sexe qu'en passant par l'ouverture de l'anus. La bifurcation du canal de l'urètre constitue un hypospadias d'autant plus en voie de dégradation que l'un de ses conduits débouche dans l'intestin rectum au lieu d'arriver au dehors. A l'égard ensuite de l'appareil reproducteur femelle, on peut dire que les oviductes spéciaux sont réduits à la plus simple expression : un tube musculo-membraneux de chaque côté sans dilatation aucune, sans concentration de fibres charnues sur un point de leur parcours; enfin, sans le moindre signe apparent de trompe utérine, de matrice et de vagin. Tout cela est représenté par un tube presque droit qui en tient lieu et qui fournit au produit ovarien ce qui est nécessaire à son complément définitif. Enfin, le canal urétro-sexuel se termine dans le rectum, et, chose bien remarquable, il envoie en se bifurquant un conduit très-rudimentaire dans le clitoris, qui se perd dans le tissu érectile de cet organe. Ce fait d'un canal rudimentaire dans le clitoris a une certaine importance, puisqu'en répétant le plan organique de l'appareil copulateur du mâle il implique à l'égard du clitoris de la femme une sorte de supériorité relative. Cependant, quand on considère que cet organe chez l'ornithorhynque n'est plus extérieur, qu'il n'est pas isolé des voies stercorales, et qu'il établit à l'aide des voies urinaires un hypospadias interne, on conçoit tout ce que ces circonstances réunies lui donnent d'infériorité eu égard à ce qui se passe chez la femme et les autres mammifères précédemment étudiés. Il y a aussi à signaler un degré d'infériorité de l'appareil reproducteur femelle par rapport à l'appareil mâle, c'est que chez le premier les uretères se confondent avec les oviductes spéciaux dans une même papille, tandis que chez le second il n'y a pas de jonction.

Chez le lézard vert, l'analogie entre les organes composant les appareils reproducteurs mâle et femelle est moins évidente que chez l'ornithorhynque; toutefois, elle existe concurremment avec une dégradation de plus en plus évidente pour chaque appareil. Ainsi, la glande spermagène, toujours composée de tubes séminifères, correspond à une glande ovigène qui ne présente plus les vésicules de Graaf. C'est un ovaire à calice, c'est-à-dire ne fournissant plus une membrane granulée ni du liquide albumineux en même temps que l'ovule; celui-ci est le seul produit qu'il donne. Cette différence dans la structure et dans les fonctions de la glande ovigène établit un degré d'infériorité relatif à l'égard de la glande ovigène de la femme. Les spermiductes essentiels, à leur tour, offrent cette particularité, qu'ils s'unissent aux conduits de l'urine avant de déboucher dans le spermiducte mixte, ce qui établit aussi un degré d'infériorité par rapport aux mammifères. Outre cela, ce même fait de la jonction prématurée des voies génitales et urinaires entraîne la disjonction des uretères de la vessie, et cette séparation est encore une dégradation significative qui se répète souvent dans la série des vertébrés. Enfin, pour terminer ce qui a rapport à l'appareil mâle du lézard, il faut dire que le rectum débouche dans le col vésical, et que les deux verges imperforées se sont entièrement séparées du canal urétro-sexuel pour aller se cacher dans un fourreau membraneux situé de chaque côté dans l'épaisseur de la queue de l'animal; dégradation des plus grandes, quand on compare ce double organe copulateur à celui de l'homme, et qui a quelques rapports avec celle qui existe entre le pénis des mammifères et le clitoris. Dans l'un et l'autre cas, le spermiducte mixte n'est plus renforcé par les corps caverneux, de plus il se trouve placé à l'intérieur du corps. En parlant de l'ovaire du lézard, j'ai dit un peu plus haut que ce n'est plus une glande ovigène aussi complexe que celle des mammifères en général, et que le calice ne fournit que l'ovule seulement. Cette dégradation, en ce qui concerne l'appareil générateur femelle du lézard, n'est pas la seule; l'oviducte, quoique double et tout d'une

venue, comme celui des monotrèmes, s'unit également de chaque côté avec l'uretère avant de déboucher dans le vestibule génito-excrémentitiel, véritable oviducte mixte très-rudimentaire, qui correspond aussi au col vésical et à la vessie urinaire. A ces degrés divers de dégradation organique, il faut ajouter que le clitoris double s'isole, comme chez le mâle, de l'oviducte mixte pour se réfugier dans la base de la queue, et que le rectum se place entre la vessie et les oviductes à la place précisément que ceux-ci devraient occuper. Cette émigration progressive du rectum allant de la région sacrée vers la région pubienne est peut-être l'indice de la dégradation la plus évidente dans la série des vertébrés.

Chez la couleuvre à collier, les appareils reproducteurs mâle et femelle offrent encore les mêmes particularités, mais à un plus haut degré d'évidence. Les glandes spermagènes, toujours tubulaires, correspondent aux glandes ovigènes à calices; les spermiductes spéciaux aux oviductes spéciaux et le spermiducte mixte à l'oviducte mixte. Mais, tandis que chez le lézard les voies urinaires et génitales se réunissent de chaque côté pour constituer deux papilles urétro-sexuelles, chez la couleuvre ces deux papilles n'en forment plus qu'une seule. Cette nouvelle fusion des parties, en ôtant la libre indépendance des organes similaires, leur donne un degré d'infériorité de plus que chez le lézard. Indépendamment de cela, la vessie urinaire, qui s'était disjointe simplement des uretères chez le lézard, manque entièrement chez la couleuvre, et c'est le renflement de l'uretère qui en tient lieu; ensuite, le rectum, qui s'est encore plus porté vers la région ventrale que chez le lézard et qui a pris la place de la vessie urinaire, se trouve en rapport avec les verges imperforées, ou corps caverneux, sans canal urétro-sexuel; et cette disposition, qui les éloigne de plus en plus des voies génitales et urinaires, est encore un indice de plus grande dégradation que chez les lézards. Quant aux oviductes spéciaux, ils offrent les mêmes particularités que chez les lézards; seulement il y a chez la couleuvre une papille urinaire qui débouche bien aussi dans les oviductes, mais qui peut faire arriver

l'urine dans un cul-de-sac du rectum, où elle s'accumule. Quoi qu'il en soit, il y a, comme chez le mâle, un renflement de l'uretère qui tient lieu de vessie; les deux clitoris ensuite se trouvent, comme les deux verges, sans canal dans l'épaisseur de la queue.

Chez la carpe, les appareils reproducteurs mâle et femelle ont entre eux la plus grande analogie, mais les organes qui les composent ont subi de bien grandes modifications encore. D'abord, les glandes spermagènes et les glandes ovigènes constituent des organes reproducteurs d'une étendue considérable : ce sont de part et d'autre deux masses symétriques qui remplissent toute la cavité abdominale. Les spermiductes et les oviductes spéciaux aboutissent chacun de leur côté dans un réservoir commun, que l'on peut considérer comme les analogues de la vésicule séminale et de l'utérus; puis viennent un spermiducte et un oviducte mixtes des plus rudimentaires, qui achèvent les appareils de la reproduction. Voici ensuite en quoi consistent les dégradations de ces organes : les glandes spermagènes n'ont plus de tubes enroulés sur eux-mêmes, et le spermiducte spécial de chaque côté est plutôt un réservoir d'Hygmore qu'un canal excréteur. Toutefois, la structure et les fonctions des spermiductes spéciaux montrent qu'il y a une grande analogie entre ces conduits et ceux des déférents en général. Quoi qu'il en soit de cette analogie, toujours est-il que les spermiductes sont à l'état le plus rudimentaire possible, si on les compare à l'épididyme et au canal déférent des mammifères, et qu'ils aboutissent au dehors avant de s'être unis aux voies urinaires; aussi c'est plutôt un vestibule génito-urinaire qu'un véritable canal urétro-sexuel qui constitue le spermiducte mixte. A cette dégradation évidente se joint celle de la position du rectum en avant des conduits génitaux et de ceux-ci en avant des conduits de l'urine; or cet arrangement constitue une véritable inversion des organes, en sorte que la vessie se trouve à la place du rectum, qui est lui-même à la place du réservoir urinaire. A part cette anomalie de position des organes, on voit que les orifices rectal, génital et urinaire s'ouvrent séparément

au dehors du corps, et cette circonstance semble, au premier abord, élever l'appareil reproducteur de la carpe au même degré de composition que celui de la femme; mais en y réfléchissant, on voit que le vestibule génito-urinaire rudimentaire de l'une n'est pas comparable à celui de l'autre, puisqu'il n'y a plus en avant du méat urinaire de la carpe un corps analogue au clitoris de la femme, et que les conduits vaginal et urétral manquent presque complétement chez le premier de ces vertébrés. Il y a donc pour la carpe un arrêt de développement bien plus grand que chez la femme, où les orifices génito-urinaire et rectal restent distincts. Indépendamment de cela, l'oviducte spécial de la carpe n'est plus un organe distinct comparable au spermiducte spécial, il fait corps avec l'ovaire lui-même, et c'est pour cela que celui-ci semble être creux : quant à l'oviducte mixte et au spermiducte mixte ils ne sont pas plus développés l'un que l'autre.

Chez le pigeon, le parallèle entre les appareils mâle et femelle fait connaître immédiatement un ordre de dégradation nouveau; c'est l'unicité de l'ovaire. Cette glande ovigène reste cependant toujours l'analogue des glandes spermagènes. Il en est de même des spermiductes et des oviductes en général, mais il y a pour chacun de ces organes des ressemblances et des dissemblances importantes à enregistrer. A l'égard de la glande spermagène, il faut noter comme dégradation la soudure des tubes séminifères entre eux. Les spermiductes spéciaux reparaissent ensuite dans leur ensemble aussi développés que chez les mammifères et les reptiles; il y a un épididyme, un conduit déférent et un réservoir spermatique que l'on peut regarder comme l'analogue de la vésicule séminale. Jusque-là l'analogie est complète; mais tandis que ces conduits chez l'homme et les autres mammifères débouchent dans le spermiducte mixte, ils aboutissent, chez le pigeon, directement dans le rectum, à proximité des uretères, et cette circonstance exprime une dégradation presque aussi grande que celle des reptiles; je dis presque, parce qu'en effet il n'y a pas, chez les oiseaux, de fusion préalable des conduits spermatiques et urinaires entre eux.

Il résulterait, d'après ce que je viens de dire, que le spermiducte mixte n'existe pas, et pourtant, il faut bien le reconnaître, le compartiment médian du vestibule génito-excrémentitiel est bien l'analogue de ce conduit, fonctionnellement parlant, de même que la bourse de Fabricius est l'analogue de la prostate, tant à l'égard de sa structure et de ses rapports, que de sa fonction. L'urine et le sperme le parcourent, seulement ces produits ne sont pas les seuls à qui il livre passage; les matières fécales traversent aussi le conduit spermiducte mixte, ce qui prouve que la vessie et le rectum se sont fusionnés en un point assez reculé de la cavité abdominale. Malgré cette fusion, les urines, le sperme et les fécés peuvent être émis séparément et sans aucun mélange. L'humeur de la glande prostate, toutefois, se mêle au sperme au moment de l'éjaculation, et sert de cette manière à diluer les spermatozoïdes; quant à l'urine, elle est le plus souvent retenue dans le compartiment médian du vestibule commun, jusqu'au moment de la défécation, que ce fluide facilite beaucoup chez les oiseaux. Pour ce qui est ensuite de la glande ovigène, ce qu'il y a de plus remarquable à noter, c'est la disposition du stygma des calices, que l'on ne rencontre nulle part indiquée aussi nettement que chez les oiseaux. Du reste, la glande ovigène asymétrique chez l'adulte, pour presque tous les oiseaux, est symétrique chez l'embryon. Il en est de même de l'oviducte; cet organe présente, en outre, au moment de la ponte et quand il est au maximum de son développement, des régions distinctes qui correspondent parfaitement au pavillon, à la trompe et à l'utérus de la femme. Ces régions sont mises en évidence par la fonction qu'elles remplissent. Seulement ce tube, considéré dans son ensemble, paraît sensiblement dégradé, surtout quand on l'envisage au point de vue des produits qu'il transmet; mais la dégradation la plus grande de l'appareil reproducteur consiste dans le mode de terminaison de l'oviducte, qui s'ouvre, comme le déférent chez le mâle, directement dans le rectum, à côté de l'orifice de l'uretère gauche. La région médiane du vestibule génito-excrémentitiel est ainsi le

point où aboutissent les urines et les produits générateurs, y compris ceux de la bourse de Fabricius, glande analogue à la prostate. A ce triple point de vue, les deux derniers compartiments du vestibule commun constituent, comme chez le mâle, l'oviducte mixte.

Chez le triton, l'analogie entre les organes composant les appareils reproducteurs redevient plus sensible à cause de la duplicité permanente des glandes ovigènes; mais, en même temps que cet organisme semble s'élever au-dessus de celui des oiseaux par le fait de la symétrie des ovaires, il offre une autre dégradation, c'est celle de la fixité des pavillons des trompes. La vessie urinaire apparaît de nouveau chez le triton d'une manière distincte, mais elle est entièrement disjointe des uretères, dont elle ne semble plus faire partie. A part ces considérations générales, on voit que les glandes spermagènes, dont les tubes sécréteurs renflés au bout ont perdu leur calibre égal, sont des organes analogues aux glandes ovigènes; que celles-ci sont constituées par des sacs sans ouvertures, dont les parois contiennent les ovules dans une enveloppe spéciale qui est toujours l'analogue du calice. En examinant les organes conducteurs des produits de la génération, on trouve que les spermiductes et les oviductes n'ont pas éprouvé une dégradation équivalente. Les premiers, en effet, sont formés d'un épididyme et d'un déférent presque aussi développés que ceux de l'homme, sauf qu'à leur extrémité il n'y a pas de réservoir séminal, tandis que les seconds s'éloignent considérablement de l'organisation de l'oviducte de la femme; ce n'est plus qu'un tube cylindrique dans toute son étendue qui est fixé en avant du côté du pavillon au sommet de la cavité abdominale, et qui se termine de l'autre dans le rectum. La simplicité très-grande de l'oviducte s'explique naturellement par le seul fait de sa fonction, qui est de fournir à l'ovule une certaine quantité de substance albumineuse; de là vient que cet appareil contient des glandes muqueuses en nombre illimité. Les spermiductes et les oviductes du triton se comportent de la même manière à l'égard des voies urinaires.

Les uretères ne se réunissent pas à eux avant de déboucher dans le rectum; aussi cette similitude établit-elle une grande analogie entre les parties terminales mâle et femelle de l'appareil reproducteur. Quant au spermiducte et à l'oviducte mixtes, ces deux conduits existent et sont nettement établis à l'aide des caractères anatomiques et physiologiques; ils sont compris entre la fin du rectum, qui est limité par un sphincter externe, et l'orifice du vestibule commun ou anal. Le spermiducte mixte donne passage au sperme et à l'urine, qui, de là, arrivent dans la vessie, et l'oviducte mixte émet les œufs et l'urine; de plus, ces deux conduits donnent également passage aux fécés, quand les fonctions génitales et urinaires ne sont pas en jeu.

En passant de l'appareil reproducteur du triton à celui du squale émissole, on est de nouveau conduit à comparer des organes qui sont doubles chez le mâle et simples chez la femelle; ici encore la glande ovigène est asymétrique comme chez les oiseaux; de plus, à cette sorte de dégradation se joint la fusion des deux pavillons des trompes entre eux, sa fixité et la disparition de la vessie sur la ligne médiane. Tout cela est d'autant plus frappant, que l'appareil reproducteur mâle, au contraire, affecte un luxe considérable d'organes élevés à un haut degré de composition. C'est ainsi que les glandes spermagènes, remarquables par leur volume réciproque et composées de granules à conduits excréteurs très-fins, ont un épididyme très-développé, et un canal déférent des plus exagérés quant à la structure anatomique. Il y a également chez ce vertébré deux vésicules séminales bien distinctes, de même que deux vessies entièrement séparées l'une de l'autre et très-volumineuses. Un tel contraste entre les appareils mâle et femelle du squale émissole rend leur analogie moins distincte. A cette dégradation relative de l'appareil reproducteur femelle du squale, il faut ajouter celle non moins grande qui la sépare de celui de la femme. Ainsi, un ovaire simple à calices sur la ligne médiane, au lieu de deux ovaires symétriquement placés et à vésicules de Graaf; deux pavillons soudés ensemble et fixes,

au lieu de deux pavillons distincts, séparés et libres; deux oviductes à glandes muqueuses spéciales, mais à structure simple du reste, au lieu d'un utérus gestateur des plus complexes; enfin, deux oviductes s'ouvrant dans le rectum près des uretères, au lieu d'aboutir au dehors et séparément des voies urinaires. Puis, relativement aux organes si développés de l'appareil reproducteur mâle, on trouve, en le comparant à celui de l'homme, des dégradations évidentes; le spermiducte spécial communique avec les conduits de l'urine sur plusieurs points de son parcours; la vésicule séminale de chaque côté se sépare du conduit déférent; la vessie urinaire n'est plus distincte des uretères spéciaux, puisque ce sont ces conduits eux-mêmes dilatés qui les constituent, et enfin tout cet appareil est placé au-dessus du rectum, c'est-à-dire à la place de cet intestin, qui a gagné la région ventrale. Enfin, à l'égard du spermiducte et de l'oviducte mixtes, on remarque encore une différence notable dans leur développement. Le premier peut se comparer à celui de l'ornithorhynque, le second à celui de la couleuvre, et cette dégradation est bien plus grande pour l'appareil reproducteur femelle que pour celui du squale mâle. Indépendamment de cela, le spermiducte mixte se termine au bout d'une véritable verge érectile placée dans l'angle postérieur de l'anus, tandis que l'oviducte mixte se confond avec la dernière portion du rectum. C'est en ce même point qu'aboutissent les uretères, au sommet d'une papille érectile qui n'est nullement comparable à la verge du mâle, mais bien à la papille urétrale des autres vertébrés.

Chez les lamproies et les myxines, enfin, les appareils reproducteurs mâle et femelle se ressemblent beaucoup et ils sont tellement réduits à la plus grande simplicité, que le parallèle entre les organes qui les composent et la marche de leur dégradation est des plus faciles à établir. En effet, les glandes spermagènes et ovigènes ont entre elles une grande analogie; il en est de même des spermiductes et des oviductes spéciaux qui sont représentés par la cavité abdominale. Quant aux spermiductes et aux oviductes mixtes, ils existent à l'état rudimentaire, puisque les uretères et

les canaux péritonéaux aboutissent ensemble dans une même papille érectile, et que ces parties ont une complète ressemblance entre elles. Ainsi, pour ces animaux, le plan de l'appareil reproducteur est le même dans les deux sexes, et leur dégradation peut, par conséquent, s'établir de la même manière pour chacun d'eux, puisque les capsules génératrices mâle et femelle produisent les spermatozoïdes et les ovules, et qu'elles se rompent pour donner issue à leurs produits. Ceux-ci, n'ayant plus de conduits spéciaux, tombent dans la cavité abdominale, qui tient lieu de spermiductes et d'oviductes, et c'est à l'aide d'une papille urétro-sexuelle analogue à celle des couleuvres, que le sperme et les œufs sont portés au dehors. Comme on le voit, la dégradation porte surtout sur l'absence des conduits excréteurs spéciaux, des glandes spermagènes et ovigènes, et sur la rupture des capsules du testicule. Quant aux rapports des voies génito-urinaires, on peut dire qu'ils n'existent que d'une manière très-incomplète à cause de l'extrême atrophie de l'appareil urinaire.

TROISIÈME PARTIE.

DÉDUCTIONS ANATOMIQUES, PHYSIOLOGIQUES ET ZOOLOGIQUES QUE L'ON PEUT TIRER DE L'ÉTUDE DE L'APPAREIL REPRODUCTEUR DANS LES CINQ CLASSES D'ANIMAUX VERTÉBRÉS.

Envisagé dans son ensemble, l'appareil reproducteur comprend, ainsi que je l'ai déjà dit, les organes urinaires. On ne saurait donc étudier l'un sans s'occuper des autres; et à cet ensemble, du reste, se rattachent les questions les plus intéressantes de l'embryogénie, celles surtout qui sont relatives à la détermination rigoureuse des corps de Wolf. Dans les deux premières parties de ce travail, j'ai beaucoup insisté sur la structure, la disposition, les

rapports des reins, sur la situation de leurs conduits excréteurs, et sur le mode de jonction des organes urinaires et génitaux, précisément en vue de déductions anatomiques et physiologiques qui pourraient mettre sur la voie de distinguer les reins primitifs des reins secondaires. Il s'agit de savoir, en effet, si les corps de Wolf, organes embryonnaires, persistent quelquefois chez l'animal adulte, et s'ils ont des connexions plus ou moins intimes avec les organes reproducteurs. Hé bien! de ce qui précède, on peut déduire des faits généraux et rigoureux. Il ne sera pas sans intérêt, toutefois, de donner auparavant un aperçu rapide de l'état actuel de la science à ce sujet. Wolf, qui a signalé pour la première fois les corps qui portent son nom, ne leur connaissait pas de canal excréteur, et croyait qu'ils servaient de gangue à la structure rénale. Owen montra que ces corps sont indépendants des reins chez les mammifères. Meckel, le premier, a cru voir dans les corps de Wolf les rudiments de quelques parties des organes génitaux. Ratké admet que quelques canalicules des corps de Wolf servent à former l'épididyme, etc. Müller a également pensé qu'une portion du canal excréteur des corps de Wolf, la supérieure, entrait comme partie constituante du canal déférent ou de la trompe. A tout ceci, M. Coste répond que la masse qui doit former l'appareil génital n'a avec le corps de Wolf aucune relation directe. M. Follin, dans un travail fort remarquable et tout à fait spécial, émet la même opinion; il pense que le développement et la disposition des corps de Wolf se font en dehors des organes génitaux, et qu'on en trouve des traces manifestes chez la plupart des mammifères. A ces restes se rapportent les *diverticulum* de Rosenmüller et les conduits de Gärtner chez les femelles, et chez les mâles les *vasa aberrantia* de Haller, qui adhèrent à la tête de l'épididyme. M. Follin est porté à admettre également que chez les poissons ce sont les corps de Wolf qui constituent les organes urinaires permanents, les reins. Toutes ces opinions diverses, concernant la fusion ou l'indépendance absolue des corps de Wolf, comme aussi leur mode de formation, d'évolution et de dispari-

tion, émises par des observateurs habiles, sont une preuve évidente pour moi que l'étude des organes génito-urinaires n'a pas porté sur les mêmes classes des vertébrés. On a bien pu établir que chez les mammifères, les reptiles et les oiseaux, les corps de Wolf sont entièrement indépendants des reins définitifs et des organes génitaux, mais chez les amphibiens et les poissons, où ces corps persistent évidemment et constituent les reins définitifs, la même détermination serait impossible, puisqu'il existe chez le squale émissole, entre autres, des anastomoses entre l'épididyme et les canaux urinaires, et que chez les grenouilles, les lamproies, les myxines, etc., les conduits génitaux et ceux des reins sont en communication évidente.

Si ces faits sont exacts, comme tout ce que j'ai vu et représenté semble le prouver, on peut en conclure que les corps de Wolf, quand ils persistent à l'état de reins permanents, ont des connexions intimes avec les organes reproducteurs, sans que l'on puisse dire pour cela que les uns en proviennent plutôt que les autres. Cette fusion entre les corps de Wolf et les organes de la génération s'expliquerait par le fait même de leur développement simultané et parallèle, en quelque sorte, chez les vertébrés qui n'ont point de doubles reins, et s'exclurait, au contraire, chez ceux qui ont des reins primitifs dont l'évolution est déjà achevée ou du moins très-avancée quand apparaissent les ébauches des organes génitaux et ceux des reins secondaires; ce serait le fait de la loi de conjugaison organique qui présiderait ainsi à la fusion des parties affrontées à une époque donnée de leur développement. Quoi qu'il en soit, on peut toujours déduire, des faits consignés dans ce travail, que les reins primitifs persistent à l'état de reins définitifs chez les amphibiens et chez les poissons, et que, pour plusieurs espèces de ces classes, la fusion partielle, entre les organes génitaux et les corps de Wolf, est incontestable.

Avant de quitter ce sujet relatif à la fusion des organes urinaires et génitaux, il convient aussi de signaler ce qui se passe chez les vertébrés à l'état adulte et indépendamment des consi-

dérations qui se rattachent à la persistance des reins primitifs. La présence des organes urinaires, quoique constante dans toute la série des animaux vertébrés, n'entraîne pas avec elle une même manière d'être de ces organes. Chaque appareil, suivant les classes et même quelquefois suivant les genres, présente un degré de perfectibilité qui est très-variable et qui s'accommode toujours aux besoins de l'appareil génital. A son maximum de développement, il se compose de deux reins distincts, de deux uretères, d'une vessie urinaire et d'un canal de l'urètre. Les uretères débouchent généralement vers le col vésical, et, de cette manière, le réservoir urinaire devient le dernier terme appendiculaire des conduits excréteurs des reins (mammifères); il est quelquefois constitué par une dilatation des uretères eux-mêmes ou par la jonction de ces conduits en un seul (reptiles, ophidiens et poissons). Dans d'autres circonstances, les uretères ne semblent plus tenir à la vessie urinaire; ils en sont plus ou moins séparés, et pourtant ils y versent toujours l'urine, qui s'y accumule en assez grande quantité (reptiles, sauriens et amphibiens). Cette séparation semble tout à fait définitive chez les oiseaux; cependant, les uretères arrivent encore dans une loge médiane du vestibule génito-excrémentitiel qui tient lieu de vessie urinaire; enfin, les conduits de l'urine constituent à eux seuls tout l'appareil urinaire, sauf quelques utricules glandulaires qui y aboutissent, et vont déboucher au dehors à l'aide d'une papille urinaire et génitale en même temps (myxines). Dans toutes ces circonstances, l'urine peut quelquefois se mélanger avec le produit des glandes spermagènes, et ce mélange n'a lieu, chose remarquable, que quand ce produit ne rencontre pas les fluides prostatiques ou de Cowper. L'urine, d'après cela, tient lieu de ces fluides, et sert comme eux à diluer les spermatozoïdes; voilà donc, pour plusieurs espèces de vertébrés, une des fonctions génératrices ordinairement dévolues à des glandes urétrales spéciales entièrement en possession des voies urinaires, et c'est là un des principaux résultats de la fusion des appareils génito-urinaires entre eux. Ce fait, intéressant au point de vue physiologique, sur-

tout, prouve tout au moins que l'action prolifique de la liqueur séminale n'emprunte rien d'essentiel aux diverses sécrétions de l'appareil urétral.

Indépendamment de ces faits généraux, pour la plupart non encore admis, il en est d'autres qui, pour ne pas être non plus consignés dans la science, n'en méritent pas moins d'être signalés ; je veux parler de la continuité des spermiductes, à toutes les époques de la vie, avec les capsules ou les tubes séminifères des testicules. Tous les anatomistes, sans doute, ont dû être frappés de cette sorte d'anomalie qui fait que les glandes, sécrétant les parties les plus essentielles de l'économie, les ovules, n'ont pas de conduit excréteur continu quand celles du sperme en sont pourvues. Les données embryologiques auraient permis d'ajouter à cela et d'établir que l'indifférence des sexes, à un premier âge de la vie, cesse du moment où l'épididyme, d'abord distinct du testicule, s'abouche aux conduits séminifères de cette glande, pour ne plus former qu'un tout homogène, pendant que l'oviducte, également séparé de l'ovaire dans les premiers temps de la formation organique, en reste isolé pour se constituer plus tard en pavillon. Cette théorie, qui a servi à la détermination des sexes, et qui a voulu expliquer certaines anomalies concernant l'hermaphrodisme, n'est rien moins que démontrée pour moi. Les rapports qui existent primitivement entre les glandes spermagènes et ovigènes et leurs conduits excréteurs, les spermiductes et les oviductes, ne m'ont pas paru tels qu'on les admet dans la science; il y aurait, au contraire, tant chez le mâle que chez la femelle à l'état embryonnaire, les mêmes rapports qui existent chez l'adulte, c'est-à-dire continuité des tubes séminifères avec l'épididyme, et solution de continuité entre la glande ovigène et l'oviducte. L'état primordial, en un mot, serait, dans cette circonstance, la répétition exacte de l'état définitif, et l'infériorité du sexe femelle se trouverait ainsi établie originairement, non pas cette fois par un arrêt de développement, mais bien par une disposition virtuelle d'infériorité relative. La preuve que les glandes spermagènes communiquent avec leurs

conduits excréteurs peut s'acquérir de deux manières : d'abord, par l'observation directe sur de très-jeunes embryons et à l'aide de grossissements convenables, et ensuite par l'étude de l'anatomie comparée, qui nous fait connaître que, partout où il y a des tubes séminifères, ces tubes sont toujours continus avec les conduits excréteurs des glandes spermagènes, que ceux-ci soient ou non un épididyme enroulé ou un simple déférent.

Des généralités qui précèdent, on est tout naturellement conduit à examiner, dans leur ensemble, les glandes spermagènes et ovigènes et leurs conduits excréteurs. En voyant ce qui se passe dans toute la série des animaux vertébrés, on est frappé de ce fait, que les testicules et les ovaires sont dans un rapport de développement qui contraste singulièrement avec l'atrophie toujours croissante des spermiductes et des oviductes ; on dirait que l'importance secondaire de ceux-ci s'efface entièrement devant celle des glandes spermagènes et ovigènes, qui est d'autant plus significative, que les animaux auxquels elle se rapporte sont appelés à une grande reproduction. C'est ainsi que les testicules et les ovaires de la carpe, ceux des lamproies et des myxines, présentent, à cet égard, le plus singulier contraste ; leur volume est énorme, tandis que les conduits excréteurs spéciaux qui y correspondent sont à l'état le plus rudimentaire. A l'égard ensuite de la disposition générale des glandes reproductrices, on trouve que les testicules doubles, dans toute la série des vertébrés, excepté chez les lamproies et les myxines, sont placés tantôt au dehors du corps et tantôt dans la cavité abdominale, et que les ovaires sont en général doubles aussi, sauf chez les oiseaux, les célaciens, les lamproies et les myxines, et qu'ils sont constamment logés dans l'abdomen. D'après cela, les glandes spermagènes gardent leur indépendance réciproque d'une manière plus constante que les glandes ovigènes, et, de plus, les premières émigrent souvent de la cavité ventrale, pendant que les secondes ne l'abandonnent jamais ; or cet état de choses constitue des degrés divers de perfectibilité organique qui sont en faveur des appareils reproducteurs mâles. A côté

de ces différences, il en est une plus grande encore, c'est celle de la structure même des glandes sexuelles. En effet, pendant que leur disposition vésiculeuse et originaire reste la même pour toutes les glandes ovigènes, on ne la rencontre plus, pour la glande spermagène, que chez les lamproies et les myxines seulement. Les autres vertébrés ont des glandes constituées par des tubes rameux ou enroulés qui se continuent avec les conduits excréteurs. Il résulte de cela, en dernière analyse, que les glandes spermagènes et ovigènes, comparées entre elles dans ce qu'elles ont de plus élémentaire sous le rapport de leur organisation, sont composées de parties similaires; que ces parties restent les mêmes, à peu de chose près, pour toutes les glandes ovigènes, mais qu'elles se modifient et se perfectionnent dans les glandes spermagènes : c'est-à-dire, que, le point de départ étant le même dans les deux sexes, la perfectibilité des organes, si l'on peut s'exprimer ainsi, est plus grande chez le mâle que chez la femelle. De là ce fait remarquable de la rupture constante de la cellule ovarienne, pour laisser sortir le produit sécrété, rupture qu'on n'observe que sur des glandes spermagènes frappées d'arrêt de développement. J'ai dit tout à l'heure que la structure des ovaires est à peu près la même pour toutes ces glandes, c'est-à-dire qu'elle est vésiculaire en général; mais cet état lui-même offre des différences sensibles qui m'ont servi de base pour établir deux grandes divisions : l'une d'elles se rapporte aux vésicules de Graaf, qui sont tapissées d'une membrane granulée à l'intérieur, et qui contiennent l'ovule et du liquide albumineux; l'autre comprend les vésicules qui ne contiennent plus que l'ovule seulement, et qui ont une cavité plus ou moins villeuse. De là les ovaires à vésicules de Graaf et les ovaires à calices. Les premiers ont toujours leurs vésicules enfouies dans l'épaisseur du stroma et sont très-petites; les seconds, au contraire, les ont généralement à la surface du tissu ovarien, et présentent un volume relatif plus considérable. Pour ces derniers même, c'est souvent à la périphérie d'un ovaire creux que se trouvent les calices contenant les ovules; aussi peut-on établir deux autres divisions géné-

rales, les glandes ovigènes sans cavité et celles à cavité ou à sacs. Mais cette seconde catégorie n'est point aussi précise que la première, quoique indiquant également une dégradation relative manifeste; c'est à elle que se rapporte l'ovaire de la carpe, entre autres, dont l'oviducte, constitué par les parois mêmes du sac, est exceptionnellement ouvert : aussi en résulte-t-il que les ovules, pour sortir de leur vésicule ou calice, n'ont pas besoin de déchirer le péritoine, comme cela a lieu d'une manière générale pour tous les autres vertébrés.

Si, de ces généralités, qui sont relatives aux glandes reproductrices, on passe à celles qui concernent les organes excréteurs de ces glandes, on voit tout d'abord que la partie de ces conduits qui est affectée uniquement aux produits générateurs, celle qui est la plus essentielle, spermiducte ou oviducte spécial, est précisément celle qui offre le plus d'intérêt après les glandes spermagènes et ovigènes. C'est elle, en effet, qui sert à compléter les produits qu'émettent les testicules et les ovaires, qui fournit aux premiers des matériaux nutritifs convenables à leur entier développement, et qui sert aux autres d'appareil d'incubation, en se prêtant souvent à l'établissement d'une sorte de greffe entre ses parties et le produit ovarien. Cette première portion des tubes excréteurs, si importante et si complexe, se présente, tant pour l'un que pour l'autre sexe, sous des formes tellement variées, qu'on ne saurait toujours y faire rapporter chacune des parties qui le composent. Ce n'est donc que d'une manière générale que l'on peut dire que les spermiductes et les oviductes spéciaux servent les uns et les autres à compléter les produits de la génération. Ainsi, les spermatozoïdes, qui jusque-là avaient été renfermés dans leur vésicule formatrice, en sortent pendant qu'ils traversent le spermiducte spécial, et se complètent définitivement, soit dans ce canal même, soit dans la vésicule séminale, quand elle existe. De leur côté, les ovules, en parcourant l'oviducte spécial, s'y développent aussi, s'y vivifient souvent par le contact des spermatozoïdes que le mâle y a déposés, et, dans ce cas, ils y restent un temps plus ou

moins long, soit à l'état d'œuf complet et libre, soit à l'état d'œuf greffé sur ses parois. D'après cela, les produits ovariens subissent également diverses phases avant d'arriver à leur destination. C'est tantôt un œuf simple qui est expulsé et fécondé au dehors après la ponte; tantôt un œuf qui, après avoir été fécondé intérieurement, est soumis à l'incubation aérienne; et tantôt enfin un œuf fécondé, libre ou adhérent à l'oviducte, qui subit son incubation dans cet organe lui-même. A tous ces états divers concernant les spermatozoïdes et les œufs, se joint la diversité, non moins grande, des spermiductes et des oviductes spéciaux, sans qu'on puisse faire rapporter rigoureusement celle des uns à celle des autres. La seule chose qui soit bien établie, c'est que les spermiductes émettent constamment des produits à l'état parfait de développement, tandis que les oviductes en fournissent qui sont à des degrés divers de composition. Au reste, ce ne sont pas plus les parties composant le spermiducte spécial, l'épididyme, le déférent et la vésicule séminale, que celles qui constituent l'oviducte spécial, le pavillon, la trompe, l'utérus et le vagin, qui ont des fonctions exclusivement propres à compléter les produits de la génération. L'épididyme, le déférent, la vésicule séminale peuvent manquer tour à tour, sans que pour cela les spermatozoïdes soient moins parfaits. Il peut en être de même pour le pavillon, la trompe, l'utérus et le vagin, sans que cela nuise en rien au développement de l'œuf. On peut conclure de cela que les parties qui constituent le spermiducte ou l'oviducte spécial sont souvent solidaires les unes des autres, et que c'est en considérant ces derniers organes dans leur ensemble, qu'il est possible d'établir des analogies de structure et de fonction.

Actuellement, il me reste à parler du spermiducte et de l'oviducte mixtes, qui comprennent les organes copulateurs, et qui se rapportent au canal urétro-sexuel. Leur importance est relativement bien plus grande chez le mâle que chez la femelle. C'est bien, à la vérité, dans les deux cas, un conduit qui n'ajoute plus rien d'essentiel aux produits générateurs; mais ce conduit, dont

la disposition, les rapports et la structure diffèrent dans les deux sexes, établit en faveur du mâle un caractère de supériorité incontestable. D'ailleurs, le canal urétro-sexuel, chez le mâle des vertébrés, reçoit, le plus souvent, des glandes prostates et de Cowper, qui lui sont annexées, un fluide albuminoïde, qui s'ajoute encore aux spermatozoïdes au moment de leur passage, et qui sert à les diluer convenablement. Ensuite de cela, le canal se compose de parois érectiles, et il est le plus ordinairement situé au dehors du corps. Chez la femelle, au contraire, le canal urétro-sexuel se cache plus ou moins profondément dans la cavité ventrale, et ses parois, à peine érectiles, sont rarement accompagnées de glandes entièrement analogues à celles des prostates et de Cowper. Aussi, la présence du canal urétro-sexuel, constituant une verge suspendue au dehors du bassin, implique-t-elle un caractère de supériorité organique chez le mâle, quand le même canal, chez la femelle, exprime une dégradation de l'appareil reproducteur. Après cela, à mesure que le spermiducte mixte disparaît petit à petit du dehors, pour constituer un conduit interne, comme chez la femelle, on marche vers une dégradation relative de l'appareil mâle; de même que l'origine plus profonde de l'oviducte mixte est aussi un caractère d'infériorité relative de l'appareil reproducteur femelle. La jonction, ensuite, du conduit urétro-sexuel avec le rectum établit, chez les deux sexes, une dégradation des plus grandes, qui se manifeste au dehors par l'existence d'un orifice commun pour les voies génitale, urinaire et rectale. La seule exception à cette règle se trouve chez la carpe : là, en effet, les voies génito-excrémentitielles sont distinctes au dehors; mais cette exception apparente, loin d'infirmer la règle, en est, au contraire, une confirmation de plus; car la distinction et l'isolement des conduits génital, urinaire et rectal tient ici à un arrêt de développement plus grand encore, qui fait que toute la partie du déférent mixte manque, et que, par conséquent, les voies génitale et urinaire n'ont pas eu le temps de se rejoindre entre elles ni d'atteindre le rectum.

Enfin, la verge et le clitoris, organes dépendants du canal urétro-sexuel, disparaissent assez vite dans la série des animaux vertébrés, et ne doivent pas être confondus avec les papilles urétrales qu'on rencontre dans presque toutes les espèces. Les premiers sont des organes extérieurs appendiculaires, érectiles, analogues entre eux, tandis que les secondes, quoique de nature érectile aussi, sont enfouies dans la profondeur des voies excrémentitielles, et n'ont aucune analogie de fonction avec les premiers. Leur usage est de diriger les produits qu'ils émettent dans la direction du conduit génito-urinaire ou génito-excrémentitiel qui constitue le déférent mixte.

Si, d'après les considérations générales qui précèdent, on essaye de classer les diverses espèces de vertébrés, on trouve qu'ils peuvent l'être dans l'ordre suivant :

Mammifères, reptiles, poissons osseux, oiseaux, amphibiens et poissons cartilagineux.

Les caractères distinctifs de la première classe sont :

Pour l'homme, qui est au premier rang : testicules situés en dehors de la cavité abdominale, constitués de tubes enroulés sur eux-mêmes et libres, spermiductes spéciaux des plus développés à vésicules séminales distinctes, canal urétro-sexuel externe à parois érectiles, et accompagné des glandes prostates et de Cowper;

Et pour la femme : ovaires à vésicules de Graaf, oviductes spéciaux unis sur l'axe médian du corps et constituant un organe musculaire des plus développés, canal urétro-sexuel externe, très-rudimentaire, à parois érectiles et glandulaires.

Pour le lapin : testicules extérieurs à tubes enroulés et libres, spermiductes spéciaux très-développés, à vésicule séminale unique, canal urétro-sexuel externe, à parois érectiles, accompagné des glandes prostates et de Cowper;

Et pour la femelle : ovaires à vésicules de Graaf, oviductes spéciaux réunis postérieurement, canal urétro-sexuel à parois simples.

Pour le didelphe crabier : testicules externes à tubes enroulés

et libres, spermiductes spéciaux sans vésicules séminales, canal urétro-sexuel interne non érectile accompagné des glandes de Cowper seulement, extrémité glandulaire bifide érectile;

Et pour la femelle : ovaires à vésicules de Graaf, oviductes spéciaux aboutissant à une cavité commune et à parois musculaires très-développées, canal urétro-sexuel interne non érectile, terminé par deux petits corps caverneux.

Pour les monotrèmes : testicules internes à tubes enroulés et libres, spermiductes spéciaux sans vésicules séminales, canal urétro-sexuel interne non érectile, disposition hypospade de sa dernière portion;

Et pour la femelle : ovaires à vésicules de Graaf, oviductes spéciaux des plus simples, canal urétro-sexuel interne non érectile, et disposition hypospade de sa dernière portion comme chez le mâle.

Pour les reptiles : testicules internes à tubes enroulés et libres, spermiductes sans vésicules séminales spéciales, canal urétro-sexuel interne très-rudimentaire aboutissant dans un vestibule génito-excrémentitiel;

Pour la femelle : ovaires à calices et à sacs, oviductes spéciaux simples, canal urétro-sexuel constitué par la dernière portion du vestibule génito-excrémentitiel.

Pour les poissons osseux : testicules internes très-volumineux à tubes rameux et libres, spermiductes spéciaux des plus simples, à cavité médiane commune tenant lieu de vésicule séminale, canal urétro-sexuel des plus rudimentaires et sans vestiges de corps érectiles au dehors;

Pour la femelle : ovaires à calices et à sacs, oviductes spéciaux constitués par les parois mêmes des sacs et aboutissant dans une cavité commune, canal urétro-sexuel à peine indiqué.

Pour les oiseaux : testicules internes à tubes soudés et légèrement renflés à l'origine, spermiductes spéciaux renflés au bout, canal urétro-sexuel constitué par les deux derniers compartiments du vestibule génito-excrémentitiel;

Et pour la femelle : ovaire unique, généralement à calices et sans cavité centrale, oviducte spécial unique également pour le plus grand nombre d'espèces, canal urétro-sexuel représenté, comme celui du mâle, par les deux derniers compartiments du vestibule génito-excrémentitiel.

Pour les amphibiens : testicules internes à tubes soudés, rudimentaires et vésiculeux, spermiductes sans vésicules séminales, canal urétro-sexuel constitué par le vestibule génito-excrémentitiel;

Pour la femelle : ovaires à calices et à sacs, oviductes spéciaux distincts et flexueux, canal urétro-sexuel constitué par le vestibule génito-excrémentitiel.

Pour les poissons cartilagineux, le squale émissole : testicules internes, composés de tubes rameux rudimentaires et vésiculeux, spermiductes spéciaux très-complexes, canal urétro-sexuel interne, terminé dans le rectum par une partie érectile ;

Chez la femelle : ovaire unique à cavité centrale, à calices, oviductes spéciaux soudés à leur origine et glandulaires, canal urétro-sexuel constitué par la dernière portion du vestibule génito-excrémentitiel.

Enfin, pour les autres poissons cartilagineux, lamproies et myxines : testicule unique, interne, à vésicules sans tubes, spermiductes spéciaux représentés par la cavité abdominale, canal urétro-sexuel rudimentaire terminé dans le vestibule génito-excrémentitiel par une papille très-petite ;

Et pour les femelles de ces animaux : ovaire unique sans cavité centrale et à calices, oviductes spéciaux représentés, comme chez les mâles, par les parois de la cavité abdominale, et canal urétro-sexuel très-rudimentaire aboutissant à une papille érectile comparable à celle du mâle.

Tels sont, en résumé, les caractères distinctifs qui peuvent servir au classement général des animaux vertébrés, quand on prend pour base de classification l'état de perfectibilité plus ou moins grand de l'appareil de la reproduction dans les deux sexes. Envisagés sous ce seul point de vue, les êtres qui composent le

type dont il s'agit se trouvent dans un ordre qui contraste souvent avec l'ensemble de leur organisation, et ces contrastes si frappants prouvent une fois de plus qu'il faut, pour établir une classification méthodique, tenir compte principalement de l'état de l'organisme en général. Il est curieux néanmoins de voir qu'en prenant pour base de cette classification générale des animaux vertébrés l'état de l'appareil reproducteur, on trouve que les êtres qui sont placés au haut de l'échelle zoologique sont précisément ceux dont les organes principaux de la reproduction émigrent de la cavité abdominale pour caractériser les sexes au dehors, et que ces mêmes organes sont, au contraire, d'autant plus cachés dans cette cavité, qu'ils appartiennent à des espèces placées à des degrés inférieurs; c'est pour la même raison que le canal urétro-sexuel à parois érectiles et placé au dehors implique un caractère de supériorité, tandis, au contraire, qu'il est l'indice d'une dégradation toujours croissante, quand, par sa position interne et sa structure non érectile, ses proportions augmentent ou qu'elles diminuent en s'unissant aux voies stercorales.

Ici se terminent les considérations générales que l'on peut déduire d'une étude approfondie des organes de la reproduction dans les deux sexes. Cette nouvelle étude demandée par l'Académie des sciences de Paris devait, avant tout, être basée sur des données anatomiques exactes. Aussi ai-je donné une grande étendue à la partie descriptive de mon travail, afin de bien montrer tous les faits nouveaux, et de pouvoir discuter les points d'anatomie et de physiologie qui ne m'ont pas paru exacts. Puisse l'Académie trouver dans ces démonstrations, établies sur des recherches consciencieuses, un intérêt scientifique incontestable.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE 1.

Les trois figures de cette planche représentent les appareils reproducteurs mâle et femelle du lapin domestique, de grandeur naturelle; et les organes urinaires avec lesquels ils ont des connexions intimes.

Fig.
1. Organes génito-urinaires internes et externes du lapin mâle en rapport avec l'anus, les glandes anales et le rectum.

a. Glandes de Cowper.
b, b. Corps caverneux.
c, c. Glandes anales.
d. Rectum.
e. Orifice de l'anus.
f. Extrémité glandulaire de la verge avec son repli prépucial.
g, g. Glandes prostates accessoires.
h. Vessie urinaire.
i, i. Uretères.
j, j. Canaux déférents.

2. Organes génito-urinaires interne et externe du lapin femelle, en rapport avec l'anus, les glandes anales et le rectum.

a. Vessie urinaire coupée et se continuant avec son conduit excréteur.
b, b. Corps caverneux du clitoris.
c. Rectum.
d. Glande anale.
e. Anus entouré de poils.
f. Vulve entourée de poils.

Fig.
3. Appareil génito-urinaire femelle du lapin domestique, disposé de manière à montrer toutes les parties qui le composent.

a, a. Les ovaires.
b, b. Pavillon des trompes.
c, c. Trompes utérines.
d. Orifice valvulaire de la trompe droite.
e, e. Cornes utérines, dont la droite est ouverte à ses deux extrémités pour montrer, en avant, sa continuation avec la trompe; en arrière sa partie plissée et renflée qui constitue le col utérin.
f. Le col ouvert.
g. Le col ou museau de tanche intact.
h. Le vagin, dans lequel aboutissent les deux matrices.
i. Entrée du vagin incisée et plissée en dedans.
j. Col de la vessie urinaire.
k. Canal urétro-sexuel dans lequel aboutissent le vagin et la vessie.
l, l. Corps caverneux du clitoris.
m. Extrémité libre du clitoris.

PLANCHE 2.

Cette planche représente l'appareil reproducteur mâle du lapin domestique, de grandeur naturelle; la disposition, les rapports et la structure des organes qui le composent, ainsi que ses connexions avec l'appareil urinaire.

Fig.

1. Disposition de l'appareil génito-urinaire vu par sa face supérieure ou vertébrale.

a. Vessie urinaire, sur laquelle on voit la disposition des fibres charnues qui entrent dans sa composition.

b, b. Uretères.

c, c. Conduits déférents; celui de droite est déplissé jusqu'à l'origine de l'épididyme.

d. Testicule droit dégagé de sa tunique albuginée, pour montrer la disposition des faisceaux de tubes séminifères entre eux et le corps d'Hygmore.

e. Ligament testiculaire en rapport avec la tête de l'épididyme non déplissée.

f. Testicule avec ses enveloppes propres.

g. Queue de l'épididyme non déplissée.

h. Vésicule séminale en rapport avec la vessie, les conduits déférents et la prostate.

i, i. Lobes antérieurs de la glande prostate.

j, j. Prostates accessoires.

k. Glandes de Cowper.

l, l. Corps caverneux.

m. Prépuce.

n. Méat urinaire.

Fig.

d'. Disposition des tubes séminifères d'un des faisceaux du testicule.

2. Même appareil reproducteur du lapin mâle représenté figure 1, vu par la même face. Sur ce dessin, de grandeur naturelle, on n'a plus conservé les rapports des organes, afin de montrer le point de jonction des conduits déférents avec la vésicule séminale. Cette poche (*h*) a été renversée en arrière à cet effet. La répétition des mêmes lettres que pour la figure 1 sert à indiquer les mêmes organes.

3. Appareil génito-urinaire vu par sa face inférieure ou abdominale. La vessie et le canal de l'urètre sont fendus sur la ligne médiane pour montrer la disposition, le nombre et les rapports des orifices urinaire, séminal, prostatique et de Cowper, ainsi que la structure des corps caverneux. Ici encore la répétition des mêmes lettres montre les organes qui sont représentés fig. 1 et 2.

o, o. Les orifices des uretères dans la vessie.

Fig.

p. Celui en forme de V renversé qui conduit dans la vésicule séminale.

q. Les orifices prostatiques.

r. Ceux des glandes de Cowper.

s, s. Structure interne des corps caverneux et du bulbe de l'urètre.

4. Détail du même appareil (fig. 1 à 3) vu de côté, montrant tous les organes qui le composent séparés les uns des autres.

a. La vessie urinaire insufflée et renversée à droite.

b, b. Les uretères.

c, c. Les conduits déférents.

h. La vésicule séminale remplie d'air et placée à droite du même côté que la vessie.

j. Les trois vésicules de gauche constituent, avec celles du côté droit, les prostates accessoires.

k. Les deux lobes gauches des glandes de Cowper avec leurs deux conduits excréteurs.

l, m, n. Les trois lobes gauches de la prostate, séparés les uns des autres et des lobes droits correspondants.

r'. Le lobe antérieur droit de la prostate; les deux autres sont cachés par la vésicule séminale et la vessie.

k'. Un lobe de la glande de Cowper déplissé pour montrer sa disposition.

l'. Lobe antérieur de la glande prostate injecté et déplissé pour montrer sa disposition.

PLANCHE 3.

Cette planche, dont les deux premières figures sont de grandeur naturelle, représente l'appareil reproducteur mâle du didelphe crabier en rapport avec l'appareil urinaire et le rectum.

Fig.

1. Disposition naturelle des organes génito-urinaire et rectal, avec conservation de la portion des téguments qui avoisine l'anus et celle qui constitue le scrotum.

a. Extrémité bifide du gland au centre d'une ouverture spéciale, à bords saillants, dont la peau qui le constitue sert de prépuce.

b, b. Orifices des glandes anales, situés l'un à droite, l'autre à gauche, à la partie interne du sphincter.

c, c. Glandes anales très-developpées.

d. Fibres du sphincter de l'anus qui embrassent les conduits excréteurs des glandes anales et qui se portent en partie sur les glandes de Cowper.

Fig.

f. Scrotum contenant les testicules et placé en avant de l'anus.

g. Conduits déférents.

h. Muscles rétracteurs de la verge.

i. Vessie urinaire.

j. Rectum distendu et lié.

k, k. Les reins.

l, l. Les uretères.

2. Les mêmes organes que ceux de la figure précédente indiqués par les mêmes lettres, mais dont les rapports ne sont plus conservés. La vessie, le canal de l'urètre et le rectum sont fendus sur la ligne médiane pour en montrer les détails.

a. La verge, dégagée de son enveloppe cutanée. On voit sur la face interne de chaque gland un petit sillon qui sert à conduire le sperme.

b, b. Orifices et disposition des conduits excréteurs des glandes anales.

f. Orifices des glandes de Cowper dans le canal de l'urètre.

m. Testicule droit avec son albuginée, duquel se dégage le conduit commun des tubes séminifères.

n. Tête de l'épididyme, vue écartée du testicule.

o. Queue de l'épididyme, également séparée à dessein du testicule pour bien la montrer.

Fig.

p. Testicule gauche, sur lequel on a enlevé la tunique albuginée. Les nombreux tubes séminifères qui le composent aboutissent tous à l'épididyme, *n, o*, duquel le déférent se dégage brusquement.

q. Papilles sexuelles faisant saillie dans le canal de l'urètre, et au sommet desquelles s'ouvrent les déférents.

r. Papilles vésicales plus courtes que les précédentes, constituant la terminaison des uretères par où l'urine s'écoule dans la vessie.

3. La verge grossie et une portion du canal de l'urètre fendue pour montrer la structure érectile des parois.

a. Portion du canal où le tissu érectile commence à être évident.

b, b. Extrémité des glands, écartés l'un de l'autre pour montrer la gouttière interne qui les sillonne jusqu'à l'intérieur du canal de l'urètre.

c. Collet du gland bifide, sur lequel s'implante un petit muscle qui est destiné à faire mouvoir les deux demi-glands. Ce muscle se voit distinctement fig. 2.

PLANCHE 4.

Les trois premières figures de cette planche, de grandeur naturelle, montrent la disposition, les rapports et la structure de l'appareil reproducteur femelle du didelphe crabier, et ses connexions avec les appareils urinaire et rectal. Les deux autres sont relatives à des détails de l'ovaire grossis.

Fig.
1. Disposition des organes génito-urinaire et rectal.

a. Extrémité bifide du clitoris au centre du méat urinaire, à bords froncés, comprise dans le muscle sphincter externe de l'anus.
b, b. Orifices des glandes anales; il y en a deux à gauche.
c, c. Glandes anales bilobées. Leur conduit excréteur se trouve compris dans le sphincter externe de l'anus.
d. Rectum distendu et lié, *r'*.
e. Canal urétro-sexuel.
f. Muscles rétracteurs du clitoris.
g. Ligaments larges du péritoine qui assujettissent les oviductes, la vessie et le rectum à la colonne vertébrale.
h, h. Oviductes ou boyaux sexuels des auteurs, repliés sur eux-mêmes. Entre ces parties et la vessie urinaire se trouve de chaque côté un petit utérus avec sa trompe et le pavillon.
r, r. Les uretères.
t, t. Les reins.

Fig.
2. L'appareil reproducteur dégagé de ses enveloppes péritonéales et disposé de manière à montrer ses connexions intimes avec l'appareil urinaire et le rectum. La vessie urinaire, le canal de l'urètre et le gros intestin sont incisés sur la ligne médiane et ouverts.

a. Orifice du rectum.
b, b. Ceux des glandes anales.
d. Moitié droite du clitoris bifide; l'autre est en regard, fixée sur la paroi correspondante du canal de l'urètre.
f. Pilier musculaire du canal de l'urètre, allant jusqu'à la base du clitoris et se perdant dans le vestibule génito-excrémentitiel.
g. Col vésical, duquel partent deux gros faisceaux de fibres musculaires disposés en fourche. C'est en ce point qu'aboutissent les deux anses ou boyaux sexuels.
h, h. Les organes qui constituent une portion de l'oviducte.
l, l. Pavillons et trompes utérines.

Fig.

m, m. Utérus.
o. Orifices des uretères.
q. Vessie urinaire.
r, r. Les uretères.
r'. Rectum.
s. Point de jonction du boyau sexuel dans l'urètre.

3. Mêmes organes que dans les figures précédentes, vus par leur face supérieure ou vertébrale, et montrant l'ensemble de l'appareil reproducteur en rapport avec les voies urinaire et rectale.

a. Orifice du rectum.
b, b. Ceux des glandes anales.
c. Glande anale gauche.
d. Clitoris bifide implanté sur la paroi inférieure ou ventrale du canal de l'urètre.
e. Espèce de raffé médian, musculaire, qui part de la base du clitoris bifide.
f. Colonnes charnues provenant du col vésical.
g. Conduit sexuel gauche aboutissant, avec son congénère de droite, dans un renflement médian de l'oviducte.

Fig.

h. Boyau sexuel ouvert pour montrer sa structure interne.
i. Ovaire.
j. Espèces de museaux de tanche, froncés, faisant saillie dans la cavité commune de l'oviducte correspondant aux deux utérus et aux deux boyaux sexuels *g, h.*
m, m. Trompes utérines.
n. Repli du ligament large qui se continue avec le pavillon de la trompe. Il est déplissé à droite et dans sa position normale à gauche. L'utérus droit est fendu pour montrer sa cavité.

4. Portion de l'ovaire grossie, sur laquelle on voit des vésicules de Graaf enchâssées dans le stroma.

5. Une de ces vésicules ouvertes, de laquelle s'échappent plusieurs granules et l'œuf, composé des sphères vitelline et germinative.

PLANCHE 5.

Les figures 1 et 2, de grandeur naturelle, montrent l'appareil reproducteur mâle et femelle de l'ornithorhynque, et ses connexions intimes avec les organes urinaire et rectal. Les figures 4 à 7 représentent des détails grossis de divers organes.

Fig.

1. Rapports et disposition des organes génito-urinaire et rectal entre eux.

a. Anus.
b. Son sphincter externe.
d. Renflement cloacal du rectum.
e. Glandes de Cowper.
f. Fourreau sexuel.
g. Canal de l'urètre.

Fig.

h. Vessie urinaire.
i. Continuation du gros intestin.
j, j. Testicules.
k, k. Replis du péritoine qui assujettissent les testicules.
l, l. Ligaments péritonéaux très-larges dans lesquels rampent les conduits déférents et les vaisseaux sanguins.
m, m. Conduits déférents aboutissant au canal de l'urètre.
n. Vaisseaux allant à la vessie urinaire.
s. Faisceau replié de ces mêmes vaisseaux.
p, p. Uretères.
q, q. Reins.
r, r. Capsules surrénales.

2. Mêmes organes que ceux de la figure précédente, toujours en rapport avec le rectum et disposés de manière à montrer l'ensemble de l'appareil de la reproduction.

a. Entrée du rectum fendu.
b. Ouverture et gouttière du fourreau sexuel par où passe la verge.
d. Région cloacale du rectum, ouverte.
e. Orifice du canal de l'urètre dans le rectum.
f. Fourreau musculo-membraneux contenant la verge. Une incision de ses parois montre l'organe copulateur en place.
g. Canal de l'urètre ouvert.

Fig.

h. Vessie urinaire incisée sur sa face inférieure ou ventrale, pour montrer sa cavité et les papilles urinaires qui débouchent vers son col, *v.*
i. Gros intestin.
j, j. Testicules sur lesquels l'albuginée est enlevée, pour montrer la disposition des tubes séminifères.
k, k. Conduits déférents dégagés des enveloppes péritonéales.
p, p. Les uretères.
q, q. Les reins.
r, r. Les capsules surrénales.
s, s. Ligaments vasculaires de la vessie urinaire.

4. Portion de la verge bifide grossie et divisée sur la ligne médiane, pour montrer son tissu érectile et le canal séminal *a*, qui se distribue aux papilles épineuses *b, b.*

5. Une des extrémités glandulaires de la verge fortement grossie, pour montrer les orifices de ses quatre papilles.

6. Autre extrémité du gland sur laquelle les papilles cornées et canaliculées sont rentrées dans une petite dépression naturelle.

7 Conduits séminifères fortement grossis, entre lesquels on remarque de petites granulations et des débris de vaisseaux.

PLANCHE 6.

Cette planche, dont les trois premières figures sont de grandeur naturelle, est destinée à montrer l'appareil générateur femelle de l'ornithorhynque, et ses connexions intimes avec les organes urinaire et rectal. La figure 4 est un détail grossi qui se rapporte au clitoris.

Fig.
1. Disposition normale des appareils génito-urinaire et rectal entre eux.

- *a.* Rectum entouré de son sphincter.
- *f.* Fourreau sexuel contenant le clitoris.
- *d.* Renflement cloacal du rectum.
- *f.* Muscle rétracteur de l'anus inséré sur le fourreau clitoridien.
- *g.* Renflement fusiforme correspondant au canal de l'urètre.
- *h.* Vessie urinaire qui y aboutit.
- *i*, *i.* Conduits sexuels et urinaires qui y débouchent également.
- *j.* Ovaire du côté gauche en rapport avec le ligament large et la trompe de Fallope.
- *k.* Ouverture de la trompe de Fallope sans pavillon.
- *l*, *l.* Ligaments larges du péritoine dans lesquels sont contenus les ovaires, les trompes et les vaisseaux.
- *p*, *p.* Les uretères.
- *q*, *q.* Les reins.
- *r*, *r.* Les capsules surrénales.
- *s*, *s.* Ligaments vasculaires allant à la vessie urinaire.
- *t.* Gros intestin.

Fig.
2. Mêmes organes que la figure précédente, indiqués par les mêmes lettres. Les conduits génito-urinaires, celui du rectum et le fourreau sexuel sont incisés et ouverts pour montrer tous les détails importants.

- *a.* Disposition des plis muqueux du rectum.
- *b.* Orifice du fourreau clitoridien.
- *b'.* Portion du conduit clitoridien, comprise dans la coupe du rectum.
- *c.* Orifice du conduit urétro-sexuel dans le rectum.
- *c'.* Portion de ce conduit comprise dans la coupe du renflement cloacal.
- *f.* Extrémité bifide du clitoris.
- *m.* Orifice d'un petit conduit allant dans le clitoris, et analogue à celui qui aboutit dans la verge chez le mâle.
- *v.* Orifice vésical et papilles urétro-sexuelles perforées.

3. Mêmes organes que ceux des figures précédentes et mêmes lettres pour les désigner. Ici, la vessie urinaire est ouverte sur la ligne médiane, ainsi que le cloaque, le conduit urétro-sexuel et le fourreau clitoridien, afin de montrer

les rapports de la vessie avec les papilles sexuelles, les fentes que celles-ci présentent à leur base et qui conduisent dans les trompes, la disposition de l'orifice urétro-sexuel dans le cloaque, et celle du fourreau sexuel dans la même portion rectale.

Fig.

4. Extrémité bifide du clitoris, grossie pour montrer sa structure érectile et le canal borgne qui la traverse. Ce conduit (*a*), qui s'arrête à la base des papilles cornées, imperforées, est l'analogue du canal séminal chez le mâle.

PLANCHE 7.

Les figures 1, 2 et 3 de cette planche sont de grandeur naturelle. Elles représentent l'appareil reproducteur mâle de l'échidné, et ses connexions avec l'appareil urinaire et le rectum. Les figures 4, 5 et 6 sont des détails grossis de l'organe copulateur.

Fig.

1. Disposition et rapports des organes génito-urinaire et rectal entre eux.

   a. Anus garni de son sphincter externe.
   d. Portion cloacale du rectum.
   f. Fourreau de la verge.
   h. Vessie urinaire.
   i. Gros intestin.
   j, j. Testicules.
   k, k. Conduits déférents.
   p, p. Uretères.
   q, q. Les reins.
   r, r. Les capsules surrénales.
   s. Ligament vasculaire de la vessie urinaire.
   t, t. Muscles dilatateurs du fourreau de la verge.
   u, u. Muscles rétracteurs de la verge.

2. Mêmes organes en rapport et mêmes lettres que celles de la figure précédente pour les indiquer. La vessie, le canal de l'urètre, le fourreau de la verge et le rectum sont ouverts à l'aide de diverses coupes, afin de montrer 1° les quatre papilles du col de la vessie, correspondant : les deux internes, aux uretères, les deux externes, aux déférents; 2° la disposition de la verge; 3° la communication du fourreau avec le cloaque. Les testicules sont dépouillés de l'albuginée, pour montrer la disposition des tubes séminifères.

Fig.

3. Organes génito-urinaire et rectal ouverts, pour montrer le conduit séminal et l'orifice du fourreau sexuel dans le rectum.

   a. Bords de l'anus.
   b. Orifice du fourreau de la verge.
   d. Portion cloacale du rectum.
   f. Fourreau de la verge, ouvert pour montrer l'organe copulateur en place.

g. Conduit génito-urinaire, ouvert du côté de son embouchure dans le rectum.
h. Vessie urinaire.
i. Le gros intestin.
k. Les uretères.
m. Orifice, en entonnoir, du canal de l'urètre conduisant aux orifices du gland.
n. Fibres musculaires du sphincter supérieur qui embrassent la portion urétrale inférieure.
o. Orifices glandulaires de la muqueuse rectale.
p, p. Conduits déférents.

Fig.
4. Coupe de la verge sur la ligne médiane, pour montrer le canal séminal se distribuant aux quatre mamelons perforés, et le tissu érectile qui la constitue.

5. Surface d'un mamelon, grossie pour montrer les orifices du conduit séminal à la base de petites papilles.

6. Coupe d'un mamelon, grossie pour faire voir le mode de terminaison des conduits du sperme.

PLANCHE 8.

Toutes les figures de cette planche, de grandeur naturelle, sont relatives aux appareils reproducteurs mâle et femelle du pigeon.

Fig.
1. Rapports et connexions des organes reproducteur, urinaire et rectal entre eux.

a. L'anus.
b, b. Les testicules.
c, c. Les conduits déférents.
d. Renflement postérieur du déférent faisant les fonctions de vésicule séminale.
e, e. Les uretères.
f. Le gros intestin.
g. Le renflement cloacal du rectum.
h. La bourse de Fabricius.

2. Les mêmes organes désignés par les mêmes lettres. Le cloaque est fendu sur la ligne médiane pour montrer la terminaison des conduits déférents, celle des uretères

Fig.
et l'embouchure de la bourse de Fabricius.

i. Loge copulatrice du vestibule commun dans laquelle s'ouvre la bourse de Fabricius.
j. Papille sexuelle droite au sommet de laquelle débouche le déférent. Entre celle-ci et la papille gauche se trouvent à leur base les orifices des uretères. Les voies génito-urinaires occupent une zone distincte du vestibule commun ou loge médiane.

B. Portion du testicule fortement grossie, pour montrer la disposition

Fig.

des tubes séminifères à leur origine.

b, b. Les tubes entourés de nombreux vaisseaux.

c, c. Leur origine sous l'albuginée.

H. Bourse de Fabricius en partie ouverte, pour montrer un calcul qui s'y est formé et qui remplit exactement toute sa cavité.

I. Le calcul dégagé de la bourse de Fabricius.

3. Appareil reproducteur du pigeon femelle, ses connexions et ses rapports avec les organes urinaires et le rectum.

a. Anus.

b. L'ovaire, triangulaire et à bords frangés, fixé sur les reins.

c. Orifice de la trompe, sans pavillon, dirigé en dehors.

d. L'uretère droit placé sur la face inférieure du rein.

e. L'oviducte situé en dehors de l'uretère gauche.

f. Le gros intestin coupé en avant de ses deux appendices.

g. Portion cloacale du rectum dilatée par de l'air.

h. Bourse de Fabricius.

k. Les reins, sur la face inférieure desquels se voient

Fig.

les vaisseaux artériels et veineux accompagnant les uretères.

4. Le rectum est déjeté à gauche et sa portion cloacale fendue, pour montrer l'embouchure des orifices génito-urinaires. La bourse de Fabricius est dépouillée de son enveloppe péritonéale, afin de montrer sa structure glanduleuse.

i. Granulations glandulaires, analogues à celles de la bourse de Fabricius, qui s'étendent jusqu'au delà de la zone moyenne du cloaque, sur sa paroi supérieure.

m. Orifice de l'uretère droit.

n. Orifice de l'oviducte, situé en dehors de l'orifice gauche de l'uretère. Les autres lettres indiquent les mêmes organes que ceux de la figure précédente.

5. Répétition de la préparation fig. 4, sur laquelle la bourse de Fabricius est fendue d'un bout à l'autre sur la ligne médiane, afin de montrer les nombreux orifices de sa cavité qui conduisent aux glandules de ses parois.

j. Entrée de la bourse de Fabricius garnie de glandules muqueuses.

PLANCHE 9.

Toutes les figures de cette planche, à l'exception des figures 3 et 4, sont de grandeur naturelle. Elles représentent les appareils de la repro-

duction mâle et femelle du lézard vert, et leurs connexions avec l'appareil urinaire et le rectum.

Fig.

1. Appareil reproducteur du lézard mâle, en rapport avec les organes urinaires et le rectum.

   a, a. Les testicules.
   b, b. Ligament suspenseur des testicules, dans lesquels l'épididyme rampe.
   c, c. Canal déférent.
   d. Repli du péritoine sous forme de ligament.
   e. Bourrelet froncé du rectum faisant saillie dans le cloaque.
   f. Papilles urétro-sexuelles perforées au bout et implantées sur la paroi supérieure du cloaque.
   g, g. Verges retirées de leurs étuis musculo-membraneux.
   h. Vessie urinaire dont le col est ouvert pour montrer l'orifice du rectum froncé.
   i, i. Les reins en rapport avec le rectum.
   j. Portion d'intestin qui se continue avec le rectum.
   k. Fente anale dans laquelle aboutissent les parties excrémentitielles, le fluide séminal et les deux verges.

2. Appareil reproducteur vu dans son ensemble du côté droit. La vessie est déjetée à gauche et entraîne avec elle la région cloacale, ce qui met à découvert le point de jonction du conduit spermatique avec le conduit de l'urine et le rein droit.

Fig.

   a, a. Les testicules; le droit est dépouillé de son albuginée pour montrer la disposition des conduits séminifères.
   b, b. L'épididyme; à droite, il est dégagé de ses enveloppes péritonéales.
   c. Le point de jonction des conduits déférents et urinaires.
   d. Région cloacale dénudée de son enveloppe péritonéale, pour montrer la direction des fibres musculaires provenant de la vessie et du rectum.
   e. Orifice du rectum débouchant dans le vestibule commun. Celui-ci est ouvert jusqu'au col vésical, qui en fait partie.
   i. Le rein droit, sur la face inférieure duquel se voit le petit conduit de l'uretère, qui se joint immédiatement après son origine avec le déférent.

3. Détail grossi pour montrer la saillie du gros intestin dans le cloaque, et ses rapports intimes avec la vessie et les papilles urétro-sexuelles.

   e. La terminaison du rectum dans le vestibule commun et la disposition de ses fibres musculaires terminales.
   f. Les deux papilles urétro-sexuelles placées dans la partie la plus reculée du vestibule commun.

Fig.

4. Autre détail grossi représentant la vessie urinaire, vue par sa face vertébrale, et une portion du vestibule commun.

g. Point central de la paroi supérieure ou vertébrale du vestibule commun, sur lequel s'implante le rectum. Cet intestin a été coupé au niveau de la paroi cloacale, de manière à montrer son orifice, qui est au centre.

v. La vessie urinaire. Les fibres musculaires qui en proviennent constituent presque à elles seules la région vestibulaire, et s'écartent au centre pour recevoir l'intestin rectum.

5. Appareil reproducteur femelle du lézard vert en rapport avec les organes urinaires et le rectum.

a. Portion d'intestin qui se continue avec le rectum.

b, b. Pavillon des trompes.

b', b'. Ligaments péritonéaux qui s'étendent depuis le pavillon jusqu'à l'extrémité postérieure de l'oviducte.

c, c. Les oviductes.

d. Bourrelet anal incisé et ouvert. On voit, au-dessous, un large orifice situé de chaque côté d'une cloison médiane du vestibule; ils conduisent dans les oviductes. A l'entrée de ces orifices et sur leurs parois externes, se trouvent les deux petits pertuis qui aboutissent aux uretères.

e, e. Les ovaires.

f. La cloison vestibulaire incomplète.

g. La vessie urinaire.

k. La fente anale conduisant au vestibule commun.

l. Le rein gauche.

6. Mêmes organes que ceux de la figure précédente, vus du côté opposé, région vertébrale.

a. Origine du gros intestin.

b, b. Les oviductes et leurs ligaments larges du péritoine.

c. Portion cutanée de la région caudale.

d. Les deux reins en rapport avec les oviductes.

l, l. Muscles dilatateurs de l'anus.

7. Répétition de la figure 6, sur laquelle les reins sont déjetés à gauche, pour montrer la jonction des deux oviductes entre eux et le passage des uretères.

f. Point de jonction des oviductes.

8. Les mêmes organes, vus de profil.

d. Rein droit.

g. La vessie urinaire.

k. Fente anale.

l. Muscle abaisseur du cloaque.

PLANCHE 10.

Toutes les figures de cette planche, de grandeur naturelle, sont relatives aux appareils reproducteurs mâle et femelle de la couleuvre à collier.

Fig.

1. Appareil reproducteur de la couleuvre mâle, à l'époque du rut, et ses connexions avec l'appareil urinaire et le rectum.
   - *a*, *a*. Fente anale; la lèvre antérieure est divisée, ainsi qu'une portion du gros intestin.
   - *b'*. Le testicule droit avec son albuginée.
   - *b*. Le gauche dépouillé de cette enveloppe.
   - *c*, *c*. Les conduits déférents.
   - *e*. Papille génito-urinaire.
   - *f*, *f*. Les uretères aboutissant à cette papille.
   - *g*. Les deux verges.
   - *h*. Muscles constricteurs des deux verges.
   - *i*, *j*. Les reins, sur lesquels on voit les tubes urinifères disposés en faisceaux.
   - *k*. Intestin grêle.
   - *l*. Gros intestin.
   - *m*. Infondibulum du vestibule.
2. Partie terminale des organes génito-urinaires, vue par la face supérieure ou vertébrale, pour montrer le mode de jonction des conduits de l'urine avec ceux du sperme.
   - *d*. Portion terminale du déférent gauche, passant entre le renflement olivaire de l'uretère et le rectum.

Fig.

   - *n*. Ce renflement, ouvert pour montrer la terminaison du déférent et celle de l'uretère.
   - *i*. Muscles qui facilitent la sortie des organes copulateurs.
3. Mêmes portions d'organes que celles de la figure précédente, vues du côté opposé, pour montrer la région vestibulaire à l'intérieur.
   - *e*. Papille urétro-sexuelle. De sa base partent deux sillons (*g'*) qui se continuent jusqu'à l'extrémité de chaque verge.
   - *g''*. Muscles rétracteurs des verges.
   - *n*. Orifice supérieur de l'anus.
4. Appareil reproducteur de la couleuvre femelle, à l'époque du rut, et ses connexions avec l'appareil urinaire et le rectum.
   - *a*. Fente anale garnie de son sphincter externe.
   - *b*, *b*. Les ovaires.
   - *b'*. Tuyau de l'ovaire ouvert.
   - *b''*. Prolongement du tube ovarien.
   - *b'''*. Capuchon péritonéal de l'ovaire gauche.
   - *c*, *c*. Oviductes.
   - *c'*, *c'*. Trompe de Fallope.

c'', *c''*. Pavillons des trompes. La gauche est déplissée, l'oviducte de ce même côté contient un œuf.
d, *d*. Cols des oviductes.
e, *e*. Parties vaginales des oviductes.
e'. Papille urétrale au sommet de laquelle se trouvent les deux orifices des uretères.
f, *f*. Les uretères.
g. Les deux sacs clitoridiens.
j, *j*. Les reins, sur lesquels on voit les faisceaux urinifères se jeter dans le canal de l'uretère, qui est situé au bord externe du rein.
k. L'intestin grêle.
l. Le rectum avec son sphincter supérieur.
m. Région vestibulaire ouverte, au fond de laquelle aboutissent la papille sexuelle *e'* et les oviductes. L'infundibulum rectal qui est en arrière peut tenir lieu de vessie urinaire.

Fig.
5. Détail de la figure précédente, pour montrer la région cloacale. La lèvre antérieure de l'anus est fendue jusqu'au delà du sphincter supérieur du rectum.

d, *d*. Les oviductes.
e, *e*. Les orifices des sacs clitoridiens.
e'. La papille urétrale sous une bride du vestibule commun au-dessus de laquelle peut s'accumuler l'urine.

6. La répétition des organes représentés figure 5, vus du côté opposé (région vertébrale).

c, *c*. Les oviductes réunis sur la ligne médiane.
d. Renflements des uretères.
f. Les uretères.
h. Muscle constricteur des sacs clitoridiens.

PLANCHE 11.

Les figures 1 à 3 et les figures *a*, *b*, *c*, *d*, de grandeur naturelle, représentent les appareils reproducteurs mâle et femelle du triton, à l'époque du rut, et leurs connexions avec les appareils urinaire et rectal.

Fig.
1. Appareil reproducteur du triton femelle, en rapport avec les reins, la vessie, le rectum et les vaisseaux sanguins.
a. Bourrelet anal.
b. Ovaire droit porté à gauche.
c, *c*. Les oviductes contenant des œufs.
c', *c'*. Les pavillons.
d. Artère aorte.
e. Veine cave inférieure.
f. Rectum.
g. Vessie urinaire.

Fig.

A. L'un des ovaires composé de trois lobes.

d. Corps jaune graisseux en rapport avec l'ovaire au moyen de vaisseaux sanguins.

B. Le même ovaire, composé de trois sacs est représenté ouvert sur la ligne médiane.

C. Détail grossi pour montrer le mode de distribution des vaisseaux de l'ovaire.

D. Autre détail, également grossi, pour montrer le réseau vasculaire qui contient les ovules.

E. OEuf grossi, contenant la vésicule germinative et les vésicules primitives.

F. La vésicule germinative grossie et extraite de la sphère vitelline.

2. Appareils urinaire et rectal femelle se terminant dans le rectum.

a. Ouverture anale fendue sur la ligne médiane.

b. Orifices des uretères situés en avant ou au-dessus du sphincter anal.

c. Col vésical porté à droite.

d, d. Les oviductes débouchent à côté des uretères dans le rectum, l'un à droite, l'autre à gauche d'un raffé médian.

e. Commencement du rectum.

f. Les uretères.

g, g. Les reins.

3′. Appareil reproducteur mâle du triton en rapport avec l'intestin, la

Fig.

vessie urinaire, les lobes prostatiques et le vestibule commun.

a. Gland imperforé. Au-dessous se voit l'orifice urétro-sexuel. De chaque côté sont les lèvres anales, écartées l'une de l'autre.

b. Lobes prostatiques de la région ventrale.

c. La vessie urinaire.

d. L'intestin qui se renfle derrière la vessie.

e. Testicules enveloppés de graisse.

G. Détail de la figure précédente, grossi pour montrer la disposition et la structure des lobes prostatiques d'un côté.

3. Les mêmes organes que ceux de la figure 3′, dégagés et disposés de manière à montrer tout l'appareil reproducteur mâle en rapport avec les reins, les uretères, la vessie et le vestibule génito-excrémentitiel.

a, a. Lèvres cloacales écartées l'une de l'autre à l'aide d'une incision pratiquée sur la ligne médiane depuis la commissure antérieure de l'anus jusqu'à la portion renflée du rectum.

a′. Capuchon prépucial du vestibule commun dans lequel est logée la verge rudimentaire imperforée.

b, b. Lobes abdominaux de la prostate déjetés à droite et à gauche.

c. Vessie urinaire.

d. Intestin.

e, e. Les testicules, desquels partent des tubes séminifères allant, les uns constituer l'épididyme, les autres s'ouvrir dans le canal déférent.

f, f. Les conduits déférents.

g, g. Tube réduit à l'état de ligament et se continuant avec l'épididyme.

h, h. Les reins.

i. Papilles sexuelles à la base desquelles, de chaque côté, se trouvent les deux orifices des uretères. A partir de ce point, le vestibule commun est partagé en deux parties latérales par une crête longitudinale.

Fig.

4. Détail de l'appareil reproducteur mâle grossi.

e, e. Lobes du testicule coupés sur la ligne médiane, disposition des tubes séminifères qui les composent, et leur terminaison dans un réservoir commun.

e'. Ce réservoir est analogue au corps d'Hygmore, d'où naissent l'épididyme et les canaux qui débouchent directement dans le déférent.

PLANCHE 12.

Toutes les figures de cette planche sont relatives aux organes reproducteurs de la carpe mâle. Les figures 1 et 2 sont de grandeur naturelle, les autres sont des détails du même appareil plus ou moins grossis.

Fig.

1. Disposition des testicules vus par leur face inférieure ou abdominale, et rapports de ces organes avec le rectum.

a. Orifice urinaire situé à la marge de l'anus.

b, b. Les testicules, sur lesquels rampent de nombreux vaisseaux sanguins.

d. Rectum placé en avant des testicules.

e. Orifice génital.

f. Orifice anal.

Fig.

2. Les mêmes testicules que ceux représentés figure 1, vus du côté opposé, face supérieure ou vertébrale.

b, b. Des gouttières qui se moulent sur des portions d'intestin.

c, c. Les conduits déférents aboutissant dans un réservoir commun.

d. Le rectum.

e. La vessie urinaire.

f. Les uretères.

A. Cavité du réservoir séminal.

b. Le conduit excréteur.

Fig.
B. Portion du testicule, fortement grossie pour montrer la disposition de ses tubes excréteurs à la surface de l'organe.

e, e. Bosselures qui correspondent aux tubes séminifères.

C. Autre portion de la glande spermagène, moins grossie que la précédente, sur laquelle les tubes séminifères et le déférent sont mis en évidence.

a. Le déférent.
b. Les tubes séminifères qui y aboutissent.
e. Portion de la glande non disséquée.

D. Dernières ramifications des tubes séminifères grossies.

PLANCHE 13.

Appareils reproducteur et urinaire de la carpe femelle, de grandeur naturelle.

Fig.
1. Masses ovariennes vues par leur face supérieure ou vertébrale. On y aperçoit de nombreux sillons qui correspondent aux cloisons de l'ovaire, des ramifications vasculaires nombreuses qui se distribuent à l'enveloppe ovarienne, et des œufs accumulés vers leur petite extrémité.

a, a. Le rectum.
b. Le conduit oviducte.
c. Canal urétral.
d, d. Les ovaires.
e. La vessie urinaire.
f, f. Les uretères placés l'un à droite, l'autre à gauche du prolongement du rein.
g, g. Les reins, soudés sur la ligne médiane, et déplacés pour montrer la masse ovarienne.
h, h. Réservoir commun aux deux ovaires, dans lequel s'accumulent les œufs avant la ponte.
i, i. Sillons des ovaires correspondant aux alvéoles de l'intérieur de l'organe.

Fig.
2. Portion de l'ovaire sur une partie de son enveloppe péritonéale qui fait l'office d'oviducte.

d, d. Face interne du sac ovarien avec ses vaisseaux.
e. Granulations ovariennes qu'il contient.

3. Autre portion de l'ovaire sur laquelle on a enlevé les œufs, pour montrer la disposition alvéolaire de la glande ovigène.

a. Membrane vasculaire de l'ovaire.
b, b. Cloisons vasculaires de la glande ovigène sur lesquelles s'accumulent les œufs.

PLANCHE 14.

La figure unique de cette planche, réduite d'un tiers, et faite d'après nature, représente l'appareil reproducteur mâle du squale émissole en rapport avec les organes urinaire et rectal. Toutes les parties qui le composent sont en rapport entre elles, à gauche; elles sont, au contraire, séparées à droite.

a. Papille urétro-sexuelle située à l'entrée du rectum.

b. Orifices externes des canaux péritonéaux.

c, *c.* Appendice anal constituant des organes accessoires à l'appareil reproducteur.

d, *d.* Les testicules.

e, *e.* L'origine de l'épididyme.

e', *e'*, *e'*. Le canal déférent.

f. L'épididyme gauche enroulé sur lui-même.

g, *g.* Substance molle et vasculaire creuse qui contient l'extrémité postérieure des testicules.

h, *h.* Les vésicules séminales: celle de droite est ouverte pour montrer sa cavité.

i, *i.* Anastomoses entre les conduits déférents et les conduits urinaires.

j', *j'*, *j''*. Le rein droit.

k. La dernière portion de l'uretère droit qui débouche dans le canal de l'urètre par trois orifices distincts.

l, *l.* Le sommet des vessies urinaires dans lequel débouchent les conduits urinaires.

m. Ces conduits du côté droit.

n. Glande rectale.

o. Son orifice excréteur dans le rectum.

p. Valvule du rectum.

q. Dernière portion du rectum ouverte.

r. Canal urétro-sexuel ouvert en partie, pour montrer les orifices des conduits déférents, ceux des vessies, des vésicules et des uretères postérieurs qui ne débouchent pas dans la vessie.

PLANCHE 15.

Les figures 1 et 2 de cette planche, de grandeur naturelle, représentent les appareils reproducteurs mâle et femelle des lamproies, et leurs rapports avec les organes urinaire et rectal. Les autres figures sont des détails fortement grossis, appartenant aux appareils génito-urinaires et rectal.

Fig.

1. Appareil reproducteur mâle en rapport avec les reins et le rectum.

   a. Orifice anal au fond duquel se trouve une papille urétro-sexuelle.
   b. Tête du testicule qui se prolonge, en s'amincissant, jusqu'à la région anale.
   c, c. Les reins; ils s'étendent d'un bout à l'autre de la cavité abdominale.
   d, d. Les uretères, situés le long du bord externe de chaque rein.
   e. Le rectum.

2. Appareil reproducteur femelle en rapport avec les organes urinaires et le rectum.

   a. Papille urétro-sexuelle située à l'entrée du rectum.
   b, b, b. Ovaire.
   c, c. Les reins.
   d, d. Les uretères.
   e. Le rectum.

3. Région anale et portion du rectum fendus, sur la ligne médiane, pour montrer le mode de terminaison des conduits urinaires et des canaux péritonéaux dans la papille urétro-sexuelle.

Fig.

   a. Le rectum.
   c, c. Les orifices des conduits urinaires dans la papille.
   d, d. Les uretères qui y conduisent.
   e, e. Les canaux péritonéaux.
   f. La papille urétro-sexuelle fendue.
   g. La cloison médiane de cette papille à l'intérieur.

B. Portion du testicule grossie.

B′. Autre portion de la glande spermagène également grossie pour en montrer la structure.

   b. Lacune vasculaire.
   c. Granulations du testicule recouvertes par le péritoine.
   d, d. Coupe de la glande spermagène et disposition des capsules spermagènes pédiculées.
   e. Une de ces capsules isolée, pour montrer son pédicule.
   f. Vésicules contenues dans la capsule, et dans lesquelles se développent les spermatozoïdes.

B″. Portion de l'ovaire grossie avec toutes les ramifications vasculaires qui s'épanouissent sur les petits calices.

PLANCHE 16.

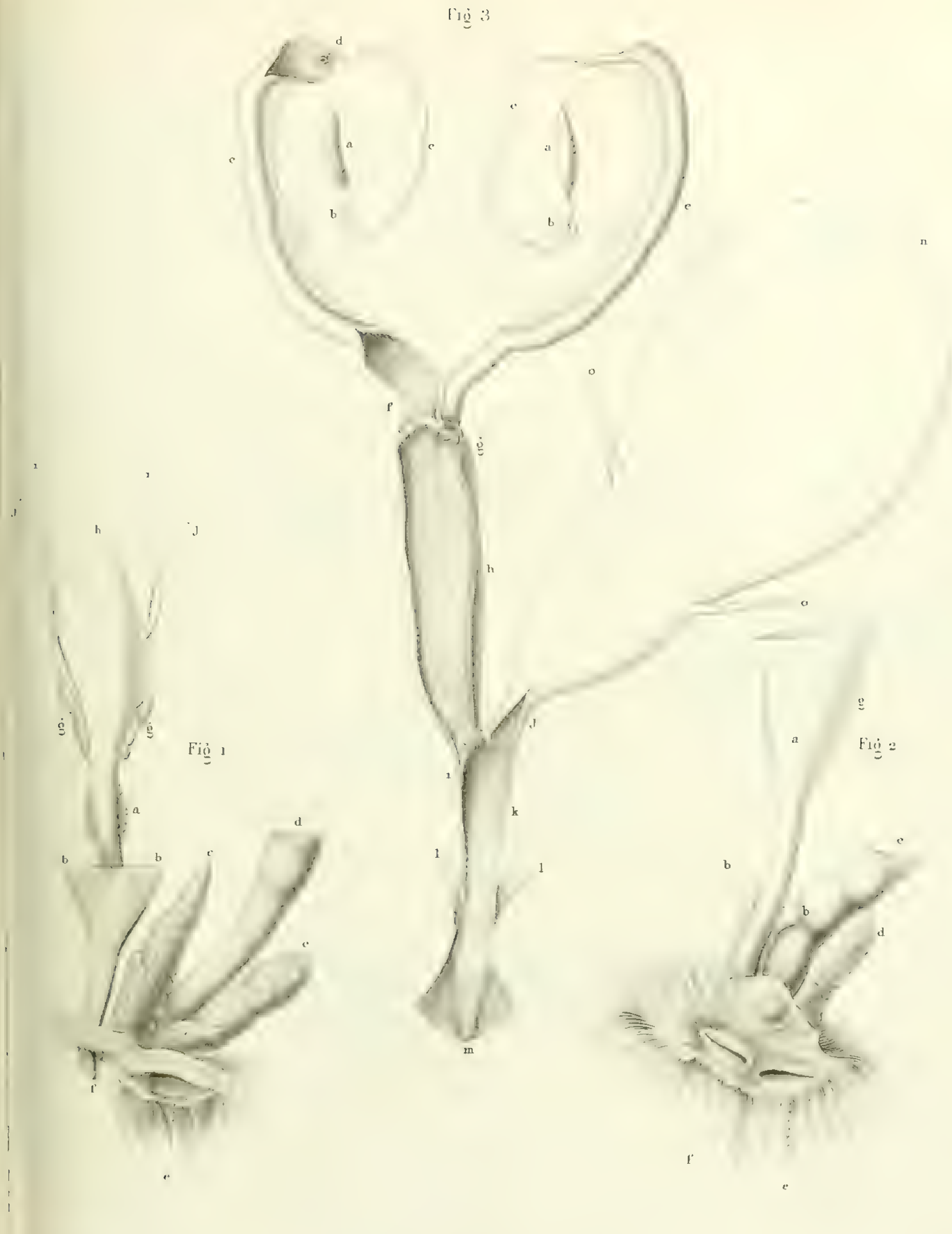
La seule figure de cette planche représente la myxine femelle, de grandeur naturelle, ouverte dans toute l'étendue de la région abdominale, pour montrer l'appareil reproducteur en rapport avec les organes urinaires et digestifs.

a. Orifice externe des conduits péritonéaux.
b. Orifice anal.
c. Orifices externes des conduits urinaires.
d. Vésicule biliaire.
e. Tube alimentaire.
f. Lobe gauche du foie.
g. Glandes cutanées mises à nu.
g',*g'*. Ces mêmes glandes recouvertes par le péritoine et les muscles.
h. Ouverture externe des branchies.
i. Conduit uretère droit, seul vestige de l'appareil urinaire.
j. Ovaire consistant en une bandelette longitudinale dans laquelle se développent les œufs, qui ont la forme d'un grain d'avoine au moment de sa maturité.

Fig. 2. Détail grossi de l'un des uretères, pour montrer des prolongements utriculaires qui y aboutissent.

PLANCHE 17.

Cette planche se compose de vingt figures théoriques placées sur deux lignes parallèles, et disposées de manière à se correspondre exactement dans chaque série. La ligne d'en haut représente les organes mâles, celle d'en bas les organes femelles. Toutes les deux sont divisées en trois zones qui correspondent, autant que possible : la première, aux organes de formation, testicules et ovaires; la seconde et la troisième, aux organes de transmission, spermiductes et oviductes. Les glandes spermagènes et les conduits ou réservoirs spéciaux du produit de ces glandes, de même que les glandes ovigènes et les conduits qui ne donnent passage qu'aux ovules, sont indiqués par la couleur bleue. La vessie et les uretères, qui ne contiennent et ne transmettent que de l'urine, sont indiqués en rouge. Les conduits où aboutissent en même temps les produits générateurs et urinaires ou les conduits mixtes sont marqués en violet. La couleur verte est réservée aux glandes prostates et de Cowper, le brun-marron au vestibule génito-excrémentitiel, et le jaune sert à indiquer l'ovule dans sa capsule formatrice, la vésicule de Graaf ou le calice.



rtin St Ange del

APPAREILS REPRODUCTEURS MÂLE ET FEMELLE DU LAPIN.

(Par Mr Martin Saint-Ange).

N. Remond imp r. des Noyers, 63, Paris

Fig. 1

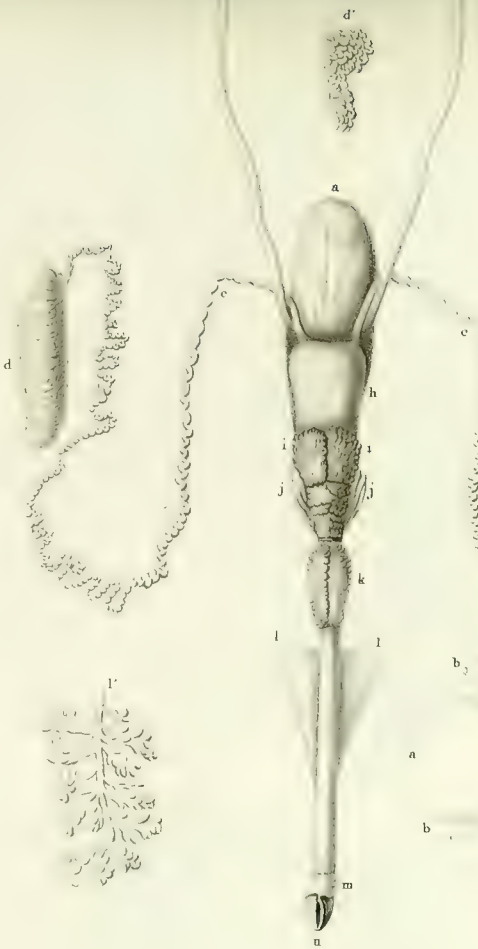


Fig. 2.

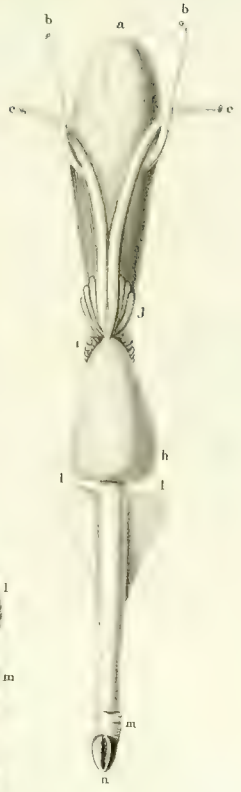


Fig. 3

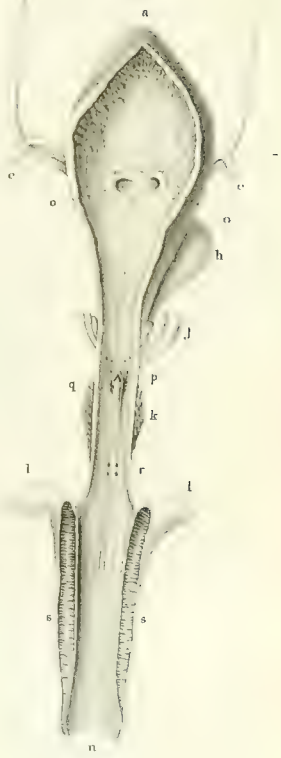


Fig. 4

Martin St Ange del.

Verdier sc.

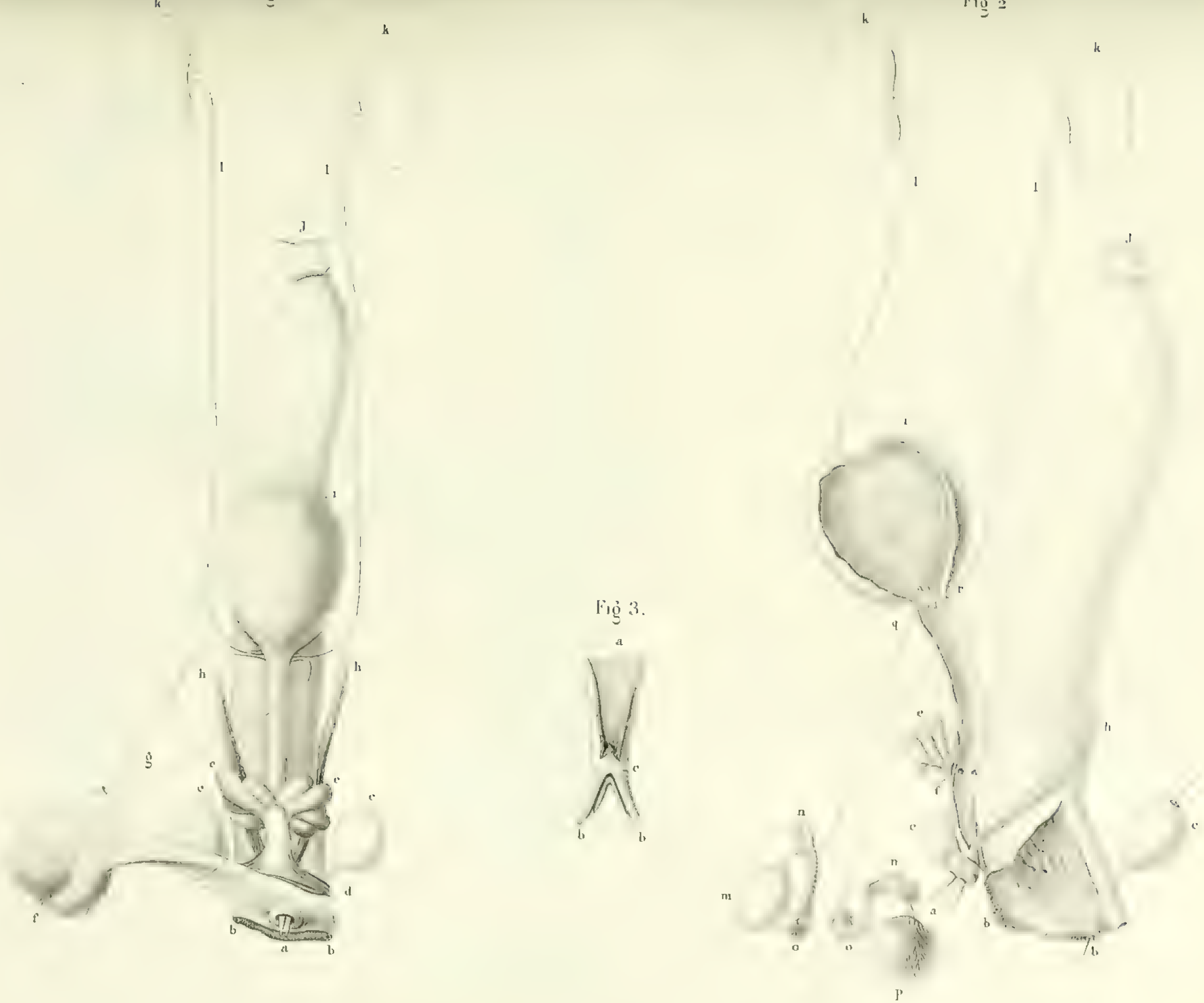
APPAREIL REPRODUCTEUR MÂLE DU LAPIN COMMUN

(Par Mr Martin Saint Ange)

Fig. 1.

Fig. 2

Fig. 3.



Martin St Ange.

Lith. a

APPAREIL REPRODUCTEUR MÂLE DU DIDELPHE CRABIER.

(Par Mr Martin Saint Ange)

Fig. 4

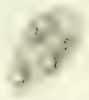


Fig. 2

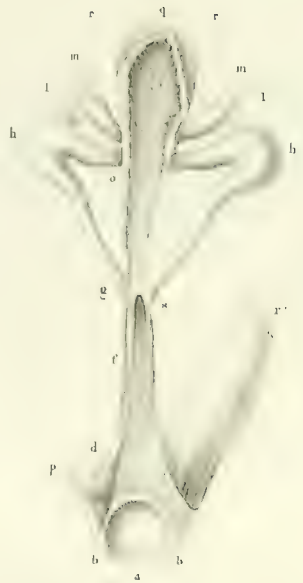


Fig. 1

Fig. 5.

Fig. 3

Martin St. Ange

Lith. de

APPAREIL REPRODUCTEUR FEMELLE DU DIDELPHE CRABIER

Imp. de Martin St. Ange

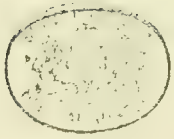


Fig 1.

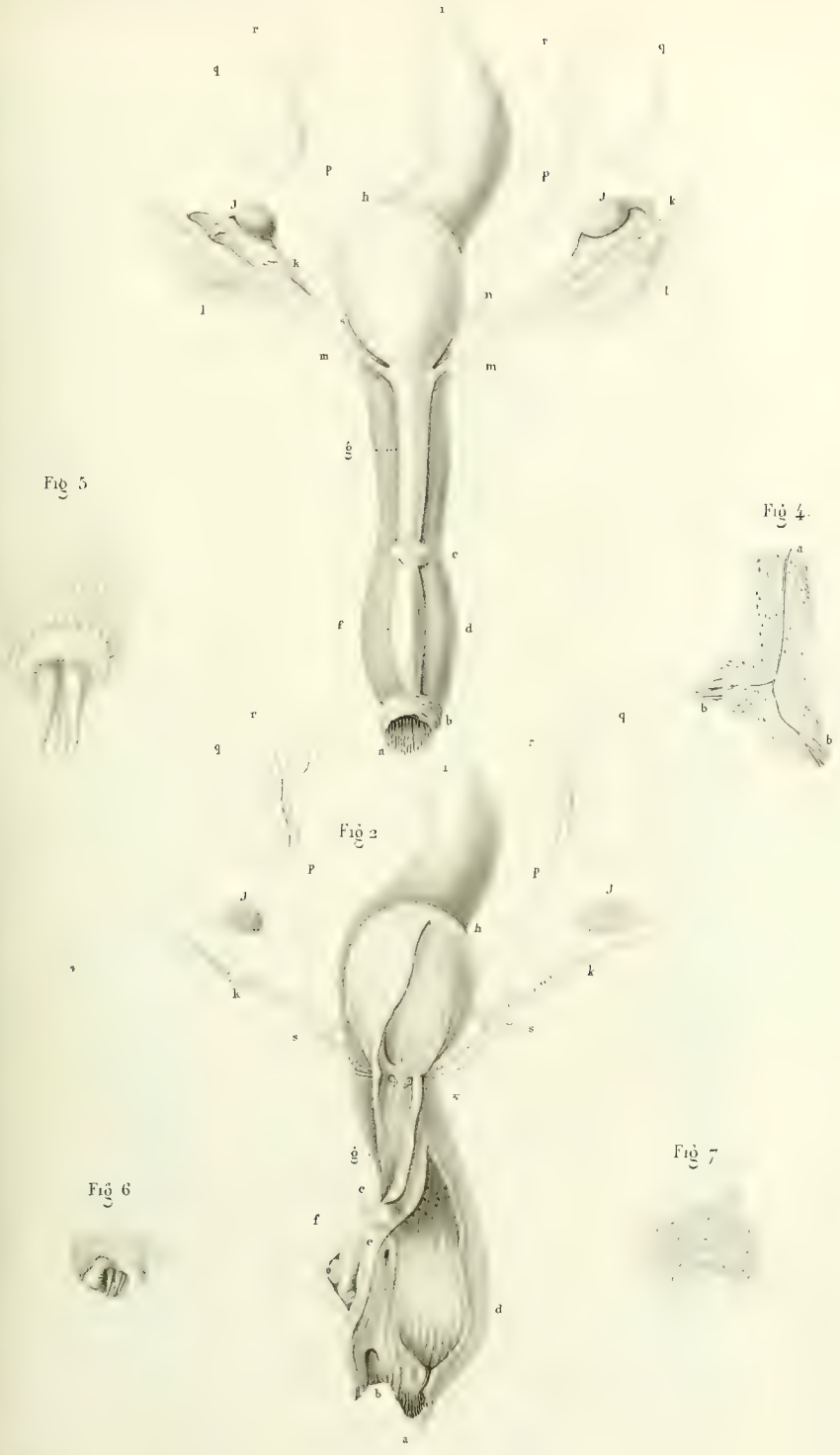


Fig 5

Fig 4.

Fig 2

Fig 6

Fig 7

APPAREIL REPRODUCTEUR MALE DE L'ORNITHORHYNQUE.

(Par Mr Martin Saint-Ange).

Fig 1

Fig 2

Fig 3

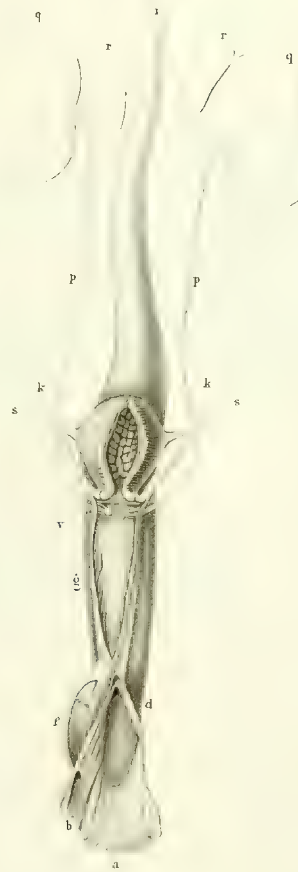


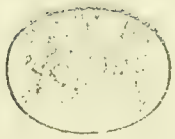
Fig 4.

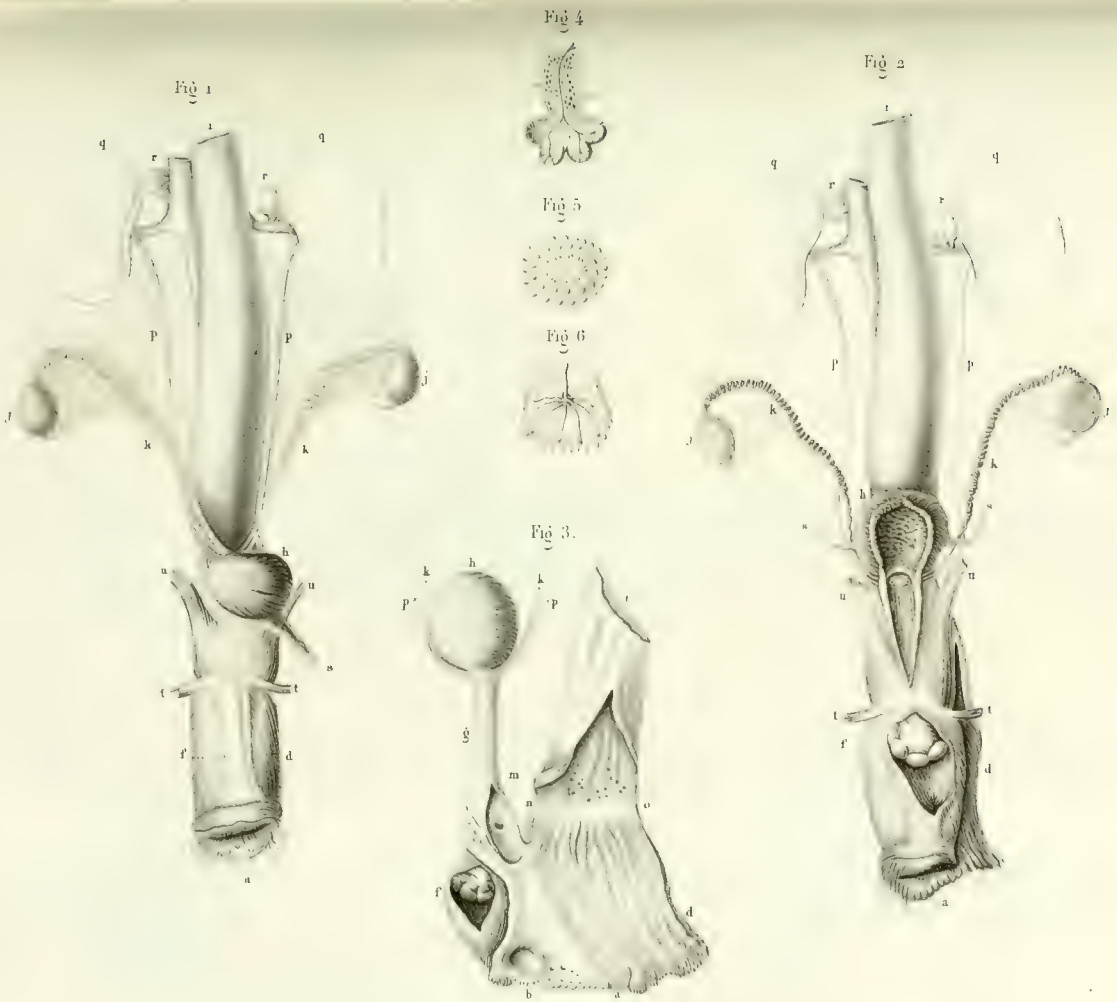
Martin S.t Ange del.

Visto sc.

APPAREIL REPRODUCTEUR FEMELLE DE L'ORNITHORHYNQUE.

(Par M.r Martin Saint-Ange).





Martin St Ange del.

Lith. de

APPAREIL REPRODUCTEUR MÂLE DE L'ECHIDNÉ.

(Par Mr Martin Saint-Ange).

Fig. 1

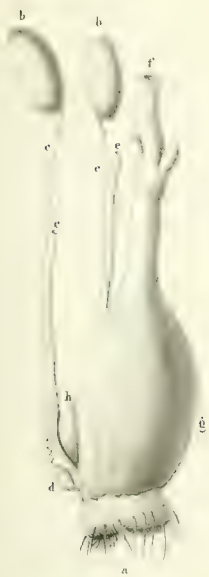


Fig. 2

Fig. 4

Fig. 3

Fig. 5

Jam St. Ange del. *Victor sc.*

APPAREILS REPRODUCTEURS MÂLE ET FEMELLE DU PIGEON.

(Par Mr Martin Saint-Ange)

Fig. 1.

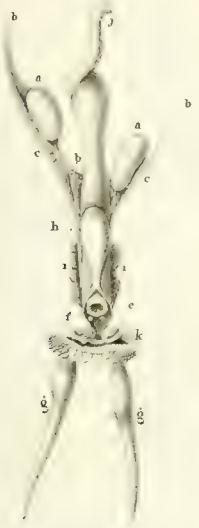


Fig. 2.

Fig. 5.

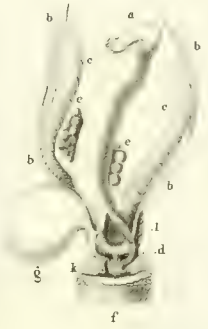


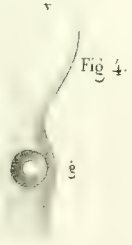
Fig. 6.

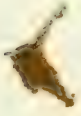
Fig. 7

Fig. 8

Fig. 3.

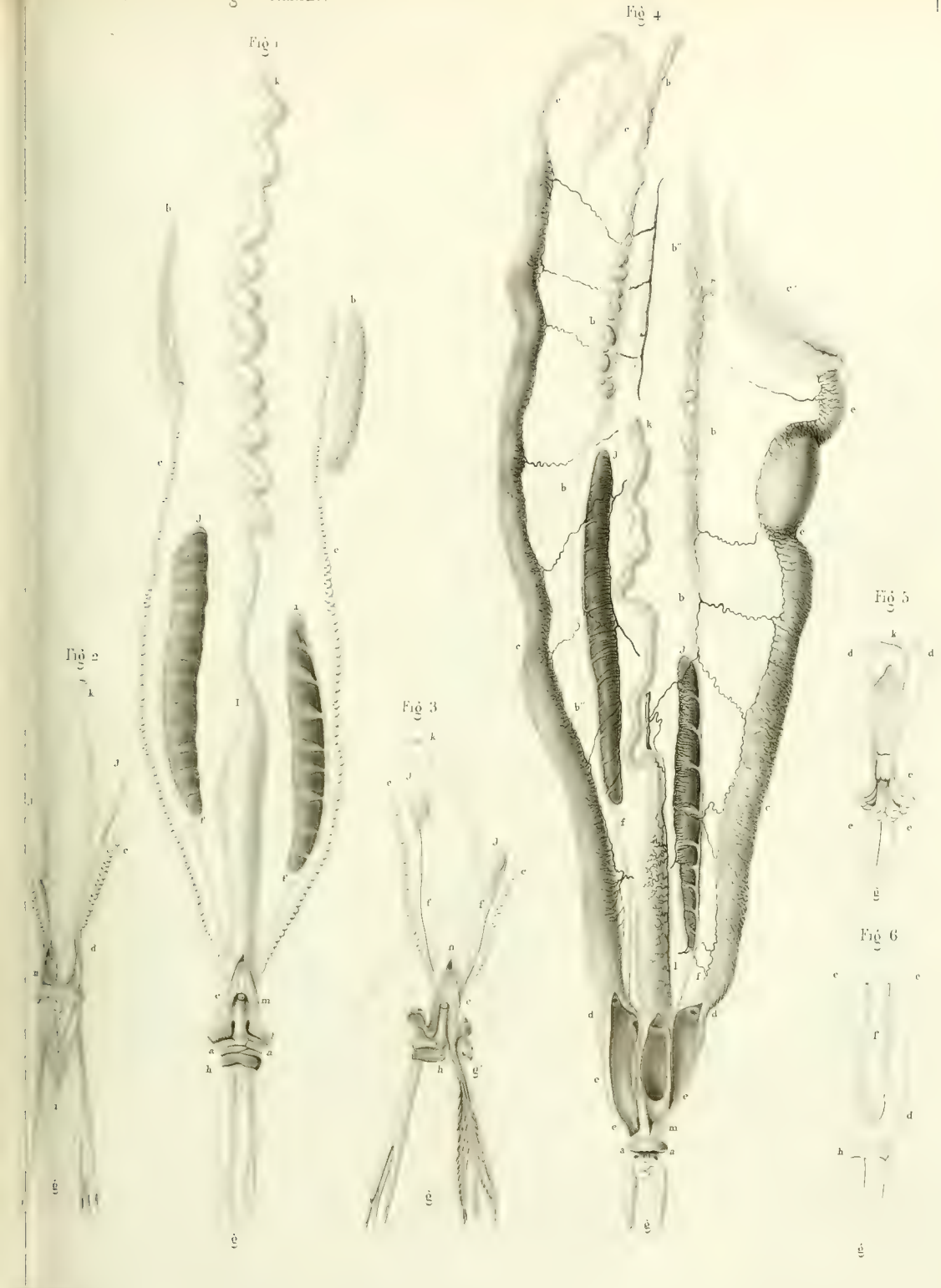
Fig. 4.





APPAREILS REPRODUCTEURS MÂLE ET FEMELLE DU LÉZARD VERT.

(Par Mr Martin Saint-Ange).



APPAREILS REPRODUCTEURS MÂLE ET FEMELLE DE LA COULEUVRE À COLLIER.

(Par Mr Martin Saint-Ange)

Martin St.t Ange del.

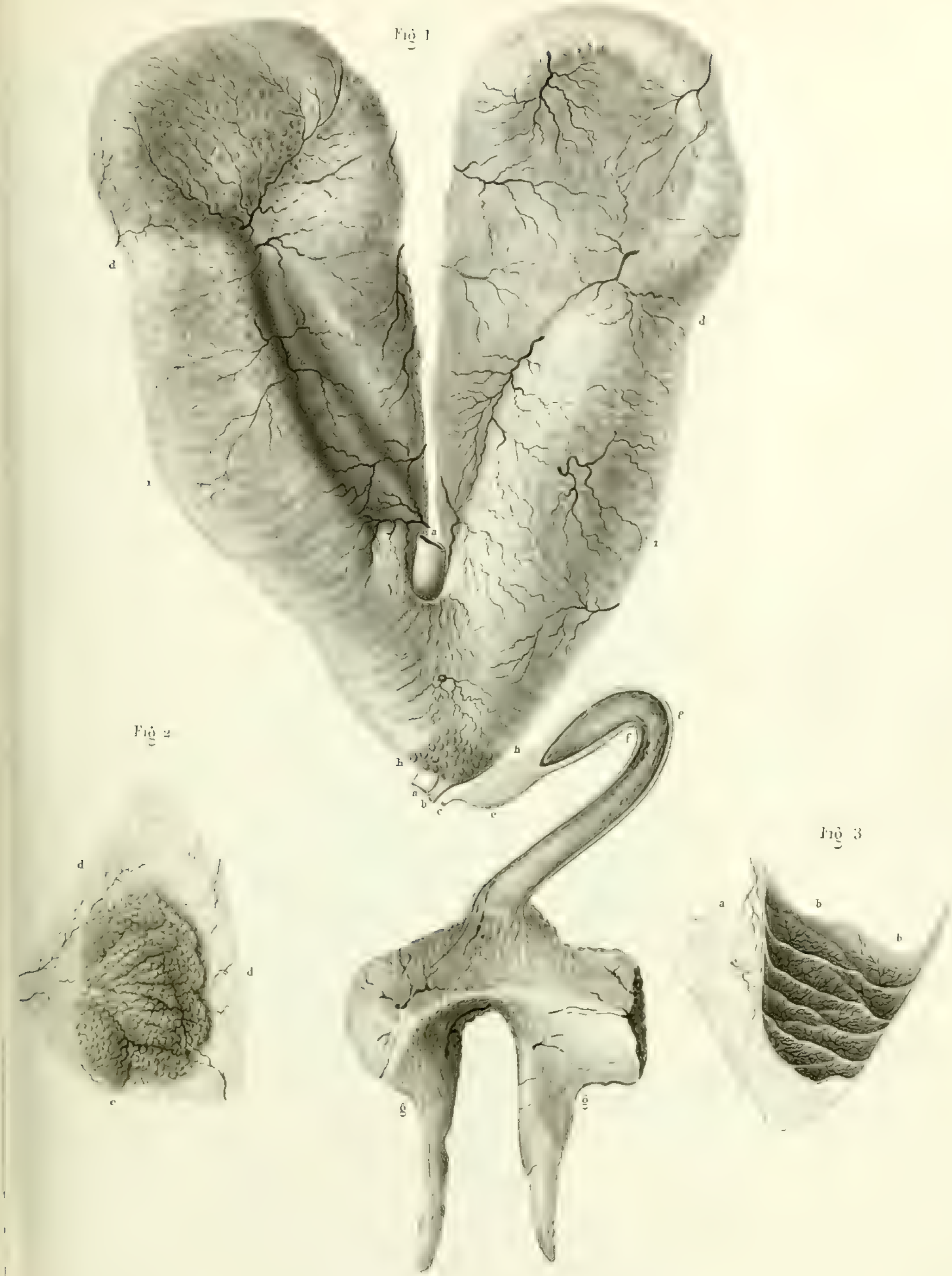
Virto sc.

APPAREILS REPRODUCTEURS MÂLE ET FEMELLE DES TRITONS.

(Par Mr Martin Saint-Ange).

APPAREIL REPRODUCTEUR MÂLE DE LA CARPE.

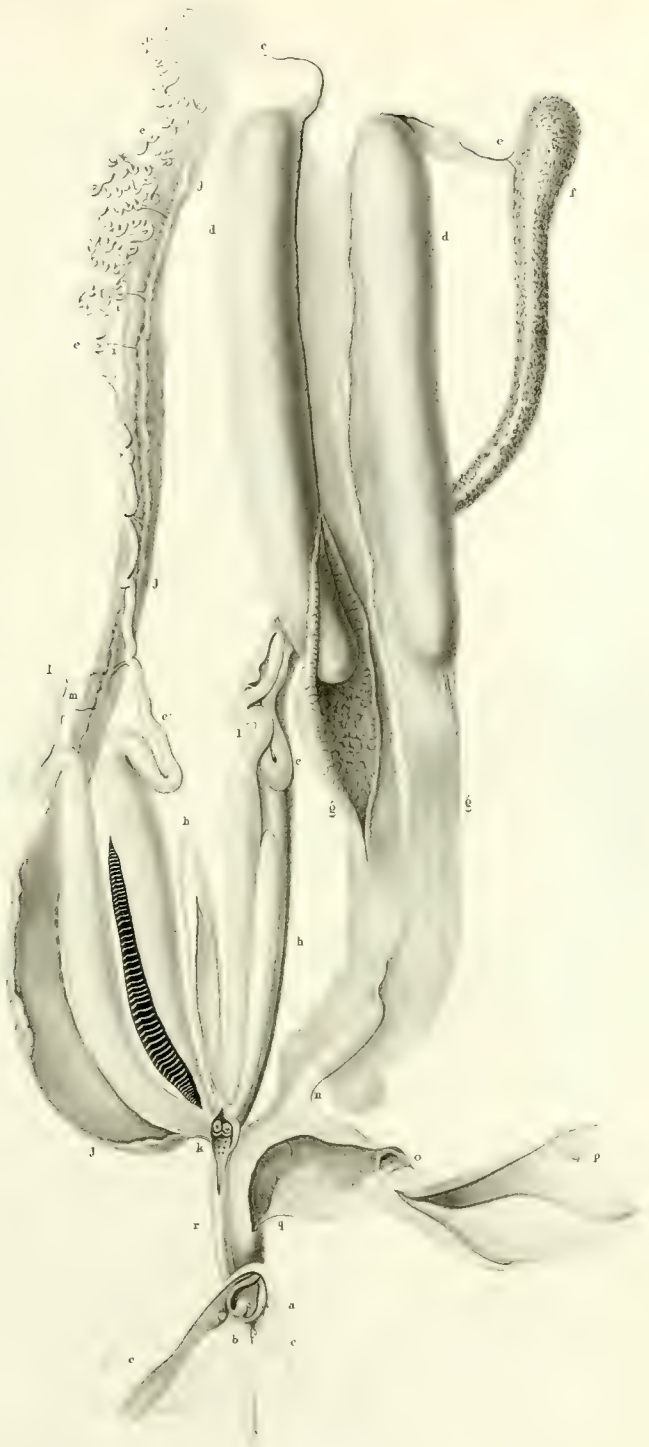
(Par M. Martin Saint Ange.)



Martin St Ange del. Visto sc.

APPAREIL REPRODUCTEUR FEMELLE DE LA CARPE.

(Par Mr. Martin Saint-Ange).

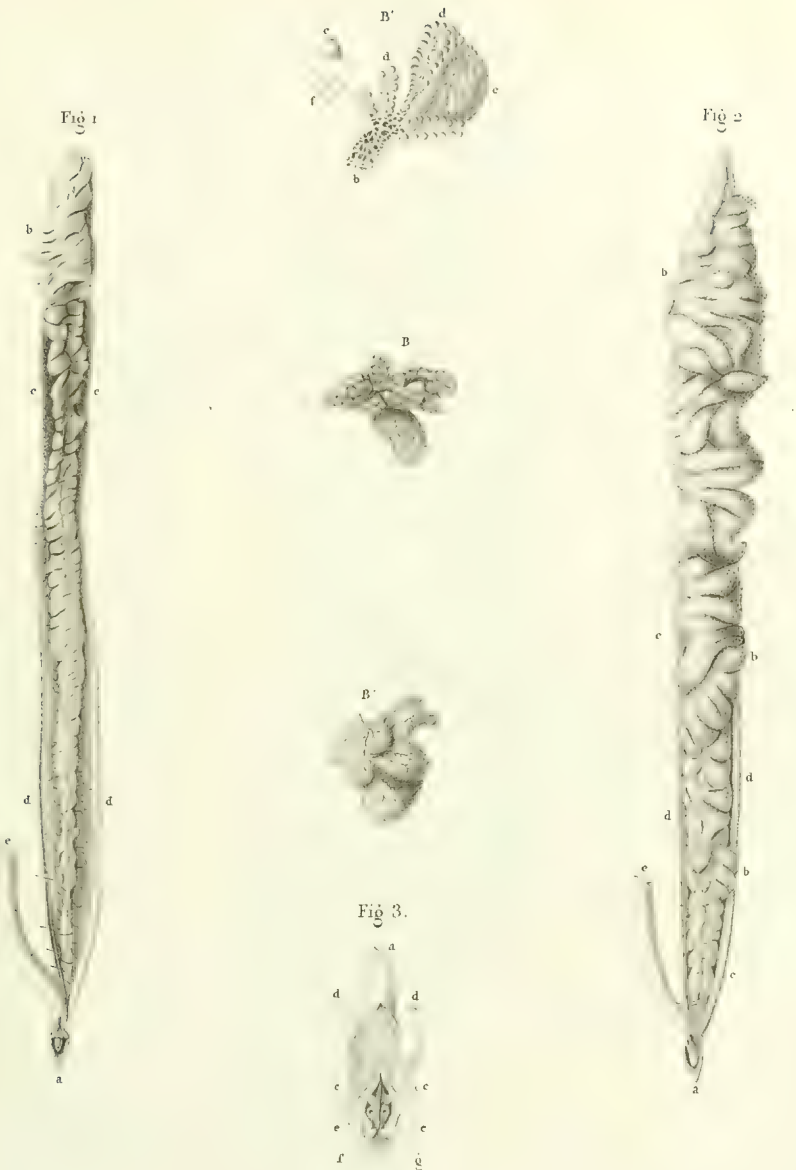


Martin St Ange del

Victo sc

APPAREIL REPRODUCTEUR MÂLE DU SQUALE EMISSOLE.

(Par Mr Martin Saint-Ange).



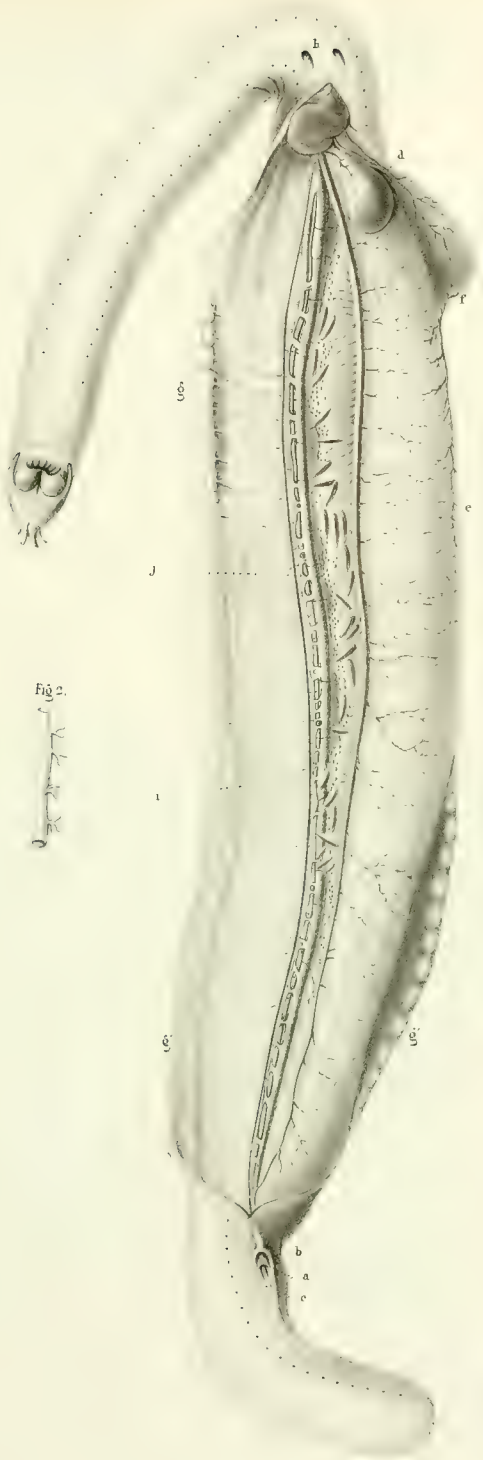
[Mar]tin S.t Ange del. Visto sc

APPAREILS REPRODUCTEURS MÂLE ET FEMELLE DES LAMPROIES.

(Par M.r Martin Saint-Ange).

Fig 1

PL. XVI.

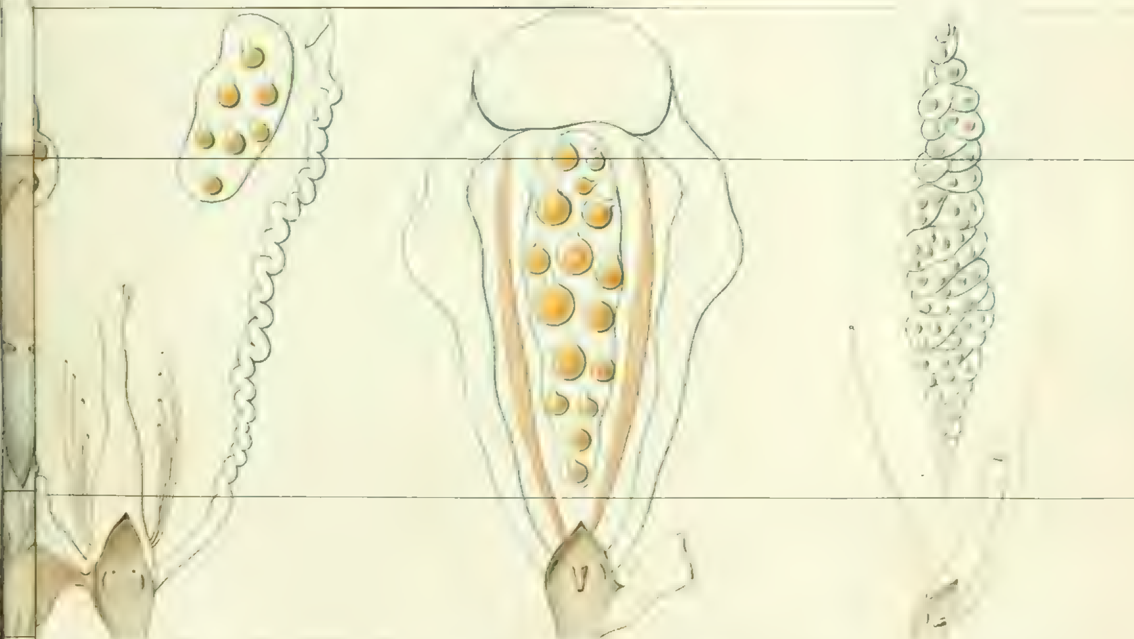


M^r St Ange del.

Vieta sc.

APPAREIL REPRODUCTEUR FEMELLE DES MYXINES.

(Par M^r Martin Saint-Ange).



...génito excrémentitiel — Vestibule génito excrémentitiel — Vestibule génito excrément.l rudiment.re

TABLEAU SYNOPTIQUE DES APPAREILS REPRODUCTEURS MALE ET FEMELLE DANS LES CINQ CLASSES D'ANIMAUX VERTÉBRÉS

indiquant l'analogie qui existe entre les organes, la marche de leur dégradation et les bases que peut trouver la classification générale des espèces basée [illegible]

Vertébrés à tubes spermatiques enroulés.

Homme	Lapin	Kanguroo	Ornithorhynque	Couleuvre
Pénis sexuel	Canal uro-sexuel	Canal uro-sexuel bifide	Vestibule genito-excrementitiel	Vestibule genito-excrementitiel

Vertébrés à tubes spermatiques rameux.

Carpe
Vestibule genito-excrementitiel rudimentaire

Vertébrés à tubes spermatiques soudés.

Pigeon
Vestibule genito-excrementitiel

Vertébrés à tubes spermatiques rudimentaires et ocelleux

Triton	Squale
Vestibule genito-excrementitiel	[illegible]

Vertébrés à ocelles spermatiques sans intromission

[illegible]
[illegible]

Vertébrés à glandes ovigènes sécrétant l'ovule une membrane granulée et du liquide albumineux.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	Vestibule génit. excrementitiel

Vertébrés à glandes ovigènes sécrétant l'ovule seulement.

Vestibule genito-excrementitiel	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

MÉMOIRE

SUR

LA TORSION DES PRISMES,

AVEC DES CONSIDÉRATIONS

SUR LEUR FLEXION AINSI QUE SUR L'ÉQUILIBRE INTÉRIEUR

DES SOLIDES ÉLASTIQUES EN GÉNÉRAL,

ET DES FORMULES PRATIQUES

POUR LE CALCUL DE LEUR RÉSISTANCE À DIVERS EFFORTS S'EXERÇANT SIMULTANÉMENT,

PAR M. DE SAINT-VENANT.

(LU À L'ACADÉMIE LE 13 JUIN 1853.)

CHAPITRE PREMIER.

EXPOSÉ ET INTRODUCTION.

1. *Solutions directes et inverses des problèmes sur les corps solides élastiques.* — Les formules générales de l'équilibre intérieur de ces sortes de corps établissent, comme l'on sait [1], des relations entre les déplacements éprouvés par leurs points, et les forces qui les sollicitent.

[1] Voyez chapitre II.

Par leur moyen, les déplacements étant donnés, une simple différentiation fait connaître immédiatement les forces capables de les produire; tant celles qui agissent sur tous les points à la manière de la pesanteur, que celles qui s'exercent à la surface, comme les pressions.

Le problème inverse et bien plus important, où il s'agit de *déterminer les déplacements étant données les forces,* n'est pas encore généralement résolu, parce qu'on ne sait pas encore intégrer les équations où ils se trouvent engagés, ou déterminer les fonctions et les coefficients arbitraires qui entrent dans leurs intégrales, de manière à satisfaire aux conditions des divers cas.

On arriverait bien, en résolvant le problème direct pour une suite d'hypothèses sur les déplacements, à posséder par cela seul la solution d'un pareil nombre de cas particuliers du problème inverse : car, après avoir trouvé les forces répondant à des déplacements donnés, on est toujours en droit de conclure réciproquement que, si ces forces avaient été données, elles auraient engendré les déplacements dont on est parti.

Mais en suivant une pareille marche, l'on aurait malheureusement bien peu de chances, même après de longs tâtonnements, de tomber sur des solutions offrant quelque intérêt pour les applications.

2. *Méthode mixte ou semi-inverse.* — Il en est autrement si l'on suit une méthode mixte, et une marche en quelque sorte semi-inverse ou intermédiaire entre la détermination difficile ou impossible des déplacements pour des forces données, et la détermination immédiate et facile des forces par les déplacements supposés donnés. Cette méthode consiste à se donner *une partie des déplacements,* et, en même temps, *une partie des forces,* et à déterminer en conséquence, par une analyse exacte, quels doivent être et les autres déplacements et les autres forces, après s'être assuré, bien entendu, que les données choisies sont compatibles entre elles.

Par cette manière de procéder on peut ne rencontrer que des intégrations abordables, fournissant des expressions facilement calculables, et obtenir la solution rigoureuse et complète du problème des déplacements pour un grand nombre de cas particuliers qui soient de ceux qui se présentent dans la pratique, ou qui offrent comme des limites dont ceux-ci se rapprochent généralement assez pour leur être assimilables très-approximativement.

Nous l'appliquerons spécialement aux problèmes sur la torsion. Nous retrouverons quelques résultats communiqués à l'Académie en 1847 [1], sur les prismes à base rectangulaire ou elliptique; mais nous étendrons le calcul aux cas d'élasticité inégale en divers sens, nous donnerons des tables pratiques, nous résoudrons les mêmes questions pour des bases curvilignes de forme variée, ainsi que pour des prismes creux; nous développerons les conséquences en tâchant de les rendre palpables, et nous arriverons, pour les conditions de la résistance à la rupture par torsion, à des résultats tout nouveaux et fort différents de ce qui avait été conclu d'hypothèses connues et inexactes.

Mais, auparavant, nous appliquerons le même procédé, afin d'en bien faire voir l'esprit, au problème le plus simple de la théorie des corps élastiques, l'extension uniforme d'un prisme à base quelconque, tiré longitudinalement et pressé latéralement. Nous l'appliquerons aussi à la flexion de ce prisme, ce qui, en fournissant quelques résultats non connus, justifiera, dans certaines limites, des résultats admis, et qui peuvent continuer de l'être approximativement, bien qu'on les ait déduits jusqu'à présent d'une division des solides en fibres et en tranches supposées se comporter d'une manière particulière.

[1] Ils ont été publiés seulement par extraits aux comptes rendus de ses séances, t. XXIV, 22 février, 22 mars et 10 mai 1847, p. 262, 485, 847. Une note sur nos nouvelles recherches, lue à la Société philomatique le 26 février 1853, a aussi paru au Bulletin de cette Société, et au numéro du 16 mars 1853 du journal *L'Institut*.

Enfin, nous examinerons ce qui arrive quand un prisme est soumis simultanément à diverses sortes d'efforts, et nous déterminerons spécialement les conditions de sa résistance à la rupture lorsqu'il est en même temps fléchi et tordu, ou tendu et cisaillé.

Et, d'abord, pour ne pas renvoyer le lecteur à d'autres écrits, nous établirons, et autant que possible d'une manière géométrique, les formules d'équilibre sur lesquelles nous aurons à nous baser.

CHAPITRE II.

FORMULES DE L'ÉQUILIBRE INTÉRIEUR DES SOLIDES ÉLASTIQUES. — RAPPEL SUCCINCT DE LEUR ÉTABLISSEMENT, POUR DES GRANDEURS QUELCONQUES DES DÉPLACEMENTS.

3. *Déplacements moyens des petits groupes moléculaires.* — Lorsque des forces extérieures, appliquées à un corps solide, ont déplacé ses parties, et changé les distances qui les séparent, il s'est produit, par cela seul, un changement dans les grandeurs et les directions des actions attractives et répulsives qu'elles exercent les unes sur les autres. C'est par la considération de ces actions *intérieures*, qui doivent faire équilibre aux forces extérieures, que l'on parvient à établir des relations entre celles-ci et les déplacements qu'elles ont amenés.

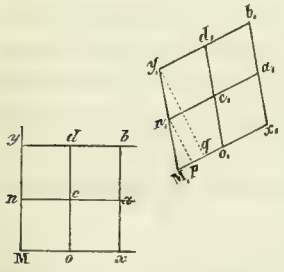
Mais on n'a pas besoin, ordinairement, de considérer les déplacements réels ou individuels des molécules, déplacements qui, bien que peu différents pour celles qui sont voisines, doivent varier généralement de l'une à l'autre d'une manière fort compliquée, vu la grande diversité de leurs arrangements et de leurs actions mutuelles. Il suffit de considérer des *déplacements moyens*, qui ne sont autre chose que *les déplacements des centres de gravité de groupes d'un certain nombre de molécules*. Chaque point de l'espace occupé par le corps peut toujours être considéré comme le centre de gravité d'un pareil groupe, contenu dans un élément imperceptible, mais fini, de cet espace. Et comme, malgré la petitesse attribuée aux dimensions de l'élément, il peut toujours

être supposé contenir un nombre assez considérable de molécules pour compenser, l'une par l'autre, les inégalités irrégulières de leurs déplacements individuels, *les déplacements moyens varient généralement, d'un point à l'autre du corps, avec continuité et d'une manière simple, ou insensiblement pour des distances insensibles, et proportionnellement aux distances tant qu'elles sont très-petites et mesurées dans une même direction.*

Ces déplacements moyens, qui sont les seuls visibles et mesurables, seront aussi les seuls dont nous parlerons désormais, à moins de spécification contraire.

4. *Dilatations. — Glissements.* — De petites lignes droites menées primitivement à l'intérieur du corps deviendraient généralement sinueuses ou *très-ondulées*, si leurs points se mouvaient suivant les lois qui régissent les déplacements moléculaires réels : mais, d'après ce qu'on vient de dire, elles resteront sensiblement droites en ne leur faisant éprouver que les déplacements *moyens;* et, si elles se dilatent ou se contractent, ce sera, pour la même direction, de quantités sensiblement proportionnelles à leurs longueurs.

Celles Mx, na, yb qui étaient parallèles et dans un même plan,



resteront sensiblement parallèles et dans un même plan en devenant M_1x_1, n_1a_1, y_1b_1. Mais ces lignes, supposées toujours extrêmement courtes et fort proches, auront *glissé* l'une devant l'autre de quantités M_1p, M_1q si les points n, y, qui se projetaient primitivement en M sur la première, se projettent maintenant en des points p, q différents de M_1. Et, en même temps, les petites lignes My, od, xb qui leur étaient perpendiculaires, et qui sont devenues M_1y_1, o_1d_1, x_1b_1, auront également glissé relativement l'une à l'autre, en sorte qu'il y aura toujours, simultanément, dans un même petit plan, glissement réciproque de deux systèmes de

petites droites qui s'y coupaient à angle droit. En rapportant le glissement relatif à l'unité de la distance actuelle $m_1 n_1$, $m_1 y_1$, ou $m_1 o_1$, $m_1 x_1$ des points qui se trouvaient primitivement au droit l'un de l'autre sur ces lignes, il est évident qu'il aura la même mesure pour toutes.

Nous appellerons donc :

Dilatation, en un point M *d'un corps, dans le sens d'une droite* Mx *qui y passe, la proportion de l'allongement (positif ou négatif) qu'éprouve une portion quelconque très-petite de cette droite*, en vertu des déplacements moyens du corps, tels qu'on les a définis à l'article précédent;

Glissement, suivant deux petites droites primitivement rectangulaires Mx, My, *ou suivant l'une d'elles et dans le plan qu'elle fait avec l'autre, la projection actuelle, sur chacune, de l'unité de longueur portée dans la direction de l'autre.*

Nous désignerons cette quantité, *qui en grandeur n'est autre chose que le cosinus de l'angle actuel des deux droites*, par

$$\gamma_{xy} \text{ ou } \gamma_{yx},$$

selon qu'on la regardera comme désignant le *glissement relatif* des diverses lignes parallèles à Mx situées dans le plan xMy, ou comme le glissement relatif des lignes parallèles à My, situées dans ce même plan. *Elle est positive quand l'angle primitivement droit* yMx *est devenu aigu.*

Et nous désignerons en général la dilatation suivant Mx ou x par

$$\delta_x$$

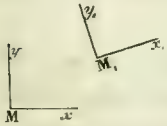
en la regardant comme positive lorsqu'il y a allongement, et comme négative lorsqu'il y a raccourcissement ou *contraction.*

Les dilatations comme les glissements varient d'une manière continue avec les points et les directions. Ils sont sensiblement

les mêmes pour mêmes directions, en des points appartenant à une même portion extrêmement petite d'un corps.

5. *Conditions pour que les déplacements relatifs, même considérables, des points des corps élastiques, n'altèrent pas leur cohésion. — Valeur des glissements très-petits.* — L'exemple des lames minces qui se redressent après qu'on les a ployées de manière à en faire toucher les deux bouts, ou des fils métalliques tordus de plusieurs circonférences et qui reviennent ensuite d'eux-mêmes à leur premier état, prouve qu'on peut déplacer considérablement certains points des solides élastiques, les uns par rapport aux autres, et y changer beaucoup les inclinaisons mutuelles de certaines lignes, sans les rompre, et même sans y produire de *déformation permanente*. Mais pour ne pas arriver jusqu'à un pareil effet, qui, sans faire perdre aux corps leur *élasticité*, signale un changement dans leur contexture, et annonce, lorsqu'il devient marqué, que la matière *s'énervera* bientôt, les déplacements doivent remplir une condition : c'est de conserver entre eux des relations telles *que les distances entre points très-rapprochés, ou appartenant à une même portion très-petite des solides, ne changent pas au delà de certaines proportions, variables avec la nature des corps, mais généralement très-faibles.*

Nous supposerons toujours cette dernière condition remplie. En conséquence, dans ce qui va suivre, les *dilatations* seront de très-petites quantités, et il en sera de même des *glissements*, dont la grandeur dépend aussi, évidemment, des proportions du changement de distance de molécules très-proches, telles que celles en x, y, transportées en x_1, y_1.

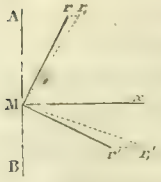


Alors l'angle $y_1 M_1 x_1$ formé par les deux petites lignes Mx, My primitivement rectangulaire, est resté *presque droit*, et le glissement

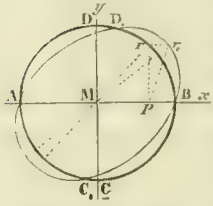
$$\gamma_{xy}$$

est sensiblement égal à la petite diminution, au resserrement *très-petit éprouvé par cet angle devenu légèrement aigu.*

6. *Relations des glissements et des dilatations en divers sens. Changement d'axes.* — Toute dilatation δ_x dans une certaine direction Mx, affectant une petite portion d'un corps, y produit des glissements suivant des lignes obliques à cette direction : car si, par une translation et une rotation du corps après ses déplacements, on suppose ramenés à leurs situations primitives le point M, le petit plan AMB perpendiculaire à Mx, et une petite droite telle que AMB située dans ce plan, on voit que les extrémités r, r' de deux petites lignes rectangulaires, telles que Mr, Mr' auront cheminé de quantités rr_1, rr'_1 égales à δ_x multiplié par leurs distances respectives à AB, en sorte que l'angle de ces lignes, devenu $r_1\mathrm{M}r'_1$, aura cessé d'être droit, et il y aura eu un glissement $g_{rr'}$.



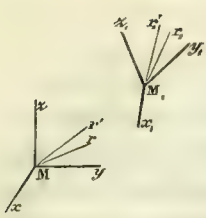
Réciproquement, tout glissement g_{xy} suivant deux droites rectangulaires MBx, MDy produit des dilatations positives ou négatives dans des sens qui leur sont obliques, car, de même qu'une dilatation, il transforme en ellipsoïde $\mathrm{AD}_1r_1\mathrm{BC}_1$ un élément sphérique ADrBC ayant son centre en M, en inclinant d'un même angle g_{xy}, sur le plan diamétral AMB perpendiculaire à CMDy, toutes ses ordonnées rp primitivement parallèles à la même droite.



Supposons généralement qu'il y ait, dans les sens de trois coordonnées rectangulaire x,y,z, les trois dilatations et les trois glissements

$$\delta_x\ ,\ \delta_y\ ,\ \delta_z\ ;\qquad g_{yz}\ ,\ g_{zx}\ ,\ g_{xy}\ ,$$

c'est-à-dire que trois petites lignes Mx, My, Mz menées avant les déplacements par un point M du corps parallèlement à ces axes fixes, *se soient allongées* dans les petites proportions $\delta_x, \delta_y, \delta_z$, et *qu'elles se soient inclinées* l'une sur l'autre ou que leurs angles se soient *resserrés* (art. 5) des petites quantités g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} lorsqu'elles sont devenues M_1x_1, M_1y_1, M_1z_1. On pourra en déduire comme il suit les dilatations et les glissements dans d'autres directions quelconques :



Soient Mr, Mr' ou r, r' deux petites droites faisant primitivement avec Mx, My, Mz les angles

$$\alpha, \mathcal{E}, \gamma; \quad \alpha', \mathcal{E}', \gamma',$$

en sorte qu'en prenant pour unité leurs longueurs supposées égales, elles ont respectivement pour projections sur ces lignes Mx, My, Mz:

$$\cos\alpha, \cos\mathcal{E}, \cos\gamma; \quad \text{et } \cos\alpha', \cos\mathcal{E}', \cos\gamma'.$$

Les déplacements changent ces deux droites en r_1, r'_1, et les parallélipipèdes rectangles dont elles étaient diagonales et qui avaient pour côtés $\cos\alpha$, $\cos\mathcal{E}$, etc., en deux parallélipipèdes obliquangles ayant, suivant M_1x_1, M_1y_1, M_1z_1, des côtés que nous appellerons x, y, z, et, x', y', z', de sorte qu'on aura

$$(1)\begin{cases} r_1 = 1+\delta_r, & x = \cos\alpha\,(1+\delta_x), \quad y = \cos\mathcal{E}\,(1+\delta_y), \quad z = \cos\gamma\,(1+\delta_z) \\ r'_1 = 1+\delta_{r'}, & x' = \cos\alpha'(1+\delta_x), \quad y' = \cos\mathcal{E}'(1+\delta_y), \quad z' = \cos\gamma'(1+\delta_z). \end{cases}$$

Cherchons la grandeur de la projection de la seconde diagonale r'_1 sur la direction de la première r_1. Nous n'aurons pour cela qu'à prendre la somme des projections, sur celle-ci, des côtés x', y', z', car r'_1 est un chemin direct unissant les deux mêmes points qu'un chemin polygonal composé de ces dernières lignes. Nous obtiendrons ainsi pour cette projection :

$$(2) \qquad r'_1 \cos\widehat{r'r'_1} = x' \cos\widehat{r_1x_1} + y' \cos\widehat{r_1y_1} + z' \cos\widehat{r_1z_1}.$$

Pour avoir la valeur des cosinus qui entrent dans le second membre, projetons d'abord la diagonale r_1 sur la direction x_1; la projection $r_1 \cos r_1x_1$ sera la somme des projections des trois côtés x, y, z de son parallélipipède obliquangle, ou $x + y\,g_{xy} + z\,g_{xz}$. On aura donc la première des trois expressions suivantes, dont les deux autres s'obtiennent de même :

$$\cos\widehat{r_1x_1} = \frac{x + y\,g_{xy} + z\,g_{xz}}{r_1}, \quad \cos\widehat{r_1y_1} = \frac{x\,g_{yx} + y + z\,g_{yz}}{r_1}, \quad \cos\widehat{r_1z_1} = \frac{x\,g_{zx} + y\,g_{zy} + z}{r_1}.$$

Substituant dans l'expression (2) de la projection de r'_1 sur r_1 et

multipliant par r_1, l'on obtient

$$(3)\quad r_1 r'_1 \cos\widehat{r_1 r'_1} = x x' + y y' + z z' + (y z' + z y')\, g_{yz} + (z x' + x z')\, g_{zx} + (x y' + y x')\, g_{xy}.$$

Cette formule, dont celle connue du carré de la diagonale d'un parallélipipède quelconque n'est qu'un cas particulier, et où nous devons mettre pour r_1, r'_1, x, y, z, x', y', z' leurs expressions (1), s'applique à des grandeurs quelconques des dilatations δ_r, $\delta_{r'}$, δ_x, δ_y, δ_z et des cosinus g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} des angles formés par les lignes dans lesquelles se sont changées celles x, y, z par l'effet des déplacements.

Mais si, après la substitution de (1), nous attribuons à ces huit quantités δ, g des valeurs très-petites en négligeant leurs carrés et leurs produits, et si nous supposons successivement, 1° que les directions r, r' se confondent, ce qui change le premier membre en $(1+\delta_r)^2 = 1 + 2\,\delta_r$; 2° qu'elles sont à angle droit, ce qui le change en $(1+\delta_r)(1+\delta_{r'})\, g_{rr'} = g_{rr'}$, nous avons, en faisant attention que :

$$(4)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\mathcal{E} + \cos^2\gamma = 1, \\ \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\mathcal{E}\cos\mathcal{E}' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0, \end{cases}$$

les deux formules

$$(5)\quad \begin{cases} \delta_r = \delta_x \cos^2\alpha + \delta_y \cos^2\mathcal{E} + \delta_z \cos^2\gamma \\ \qquad + g_{yz}\cos\mathcal{E}\cos\gamma + g_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + g_{xy}\cos\alpha\cos\mathcal{E}, \\ g_{rr'} = 2\,\delta_x \cos\alpha\cos\alpha' + 2\,\delta_y\cos\mathcal{E}\cos\mathcal{E}' + 2\,\delta_z\cos\gamma\cos\gamma' \\ \qquad\qquad + g_{yz}(\cos\mathcal{E}\cos\gamma' + \cos\gamma\cos\mathcal{E}') \\ \qquad\qquad + g_{zx}(\cos\gamma\cos\alpha' + \cos\alpha\cos\gamma') \\ \qquad\qquad + g_{xy}(\cos\alpha\cos\mathcal{E}' + \cos\mathcal{E}\cos\alpha') \\ (\text{où } \alpha = \widehat{r\,x},\ \mathcal{E} = \widehat{r\,y},\ \gamma = \widehat{r\,z},\ \alpha' = \widehat{r'\,x},\ \mathcal{E}' = \widehat{r'\,y},\ \gamma' = \widehat{r'\,z}), \end{cases}$$

dont on aurait pu démontrer en particulier chaque terme direc-

tement par des considérations géométriques comme celles du commencement de cet article.

Elles servent, en donnant successivement aux droites r, r' les directions de trois nouvelles lignes rectangulaires x', y', z', à changer à volonté le système des axes suivant lesquels on prend les dilatations et les glissements [1], comme on change, en géométrie analytique, les axes et les plans coordonnés.

L'une des premières conséquences est que, quelles que soient ces lignes rectangulaires nouvelles, l'on a

$$\vartheta_{x'} + \vartheta_{y'} + \vartheta_{z'} = \vartheta_x + \vartheta_y + \vartheta_z ;$$

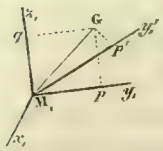
ce qu'on pouvait reconnaître *à priori*, car il est facile de voir que $\vartheta_x + \vartheta_y + \vartheta_z$ est la proportion dont se trouve augmenté le volume d'un élément parallélipipède rectangle ayant son centre au point M et ses côtés parallèles aux x, y, z. Or cette proportion, qui est la *dilatation cubique* en ce point, doit être indépendante du système d'axes par rapport auxquels on prend les trois dilatations *linéaires* ϑ.

7. *Glissements divers suivant une même droite, ou dans divers sens autour de cette droite. — Glissement principal,* etc. — Si nous appliquons l'expression (5) de $g_{rr'}$, en prenant pour direction r', celle même des x, et pour direction r, celle d'une ligne My' faisant dans le plan zMy l'angle ϵ avec y, comme on a alors $\cos\alpha' = 1$, $\cos\alpha = \cos\epsilon' = \cos\gamma' = 0$, elle se réduit à

$$g_{xy'} = g_{xy}\cos\epsilon + g_{xz}\sin\epsilon. \tag{6}$$

[1] La première, exprimant la proportion de l'allongement d'une petite ligne oblique r, a été démontrée depuis longtemps, mais seulement pour le cas de déplacements très-petits, où tels que la ligne r ne change que très-peu, non-seulement de grandeur, mais encore de direction dans l'espace, par Navier, dans son mémoire du 14 mai 1821, où il a donné pour la première fois les équations de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, tant pour les points de l'intérieur que pour ceux de la surface (*Mémoires de l'Institut*, t. VII, 1827, p. 386, et Société philomathique, 1823, p. 179. Voyez aussi *Exercices de mathématiques* de M. Cauchy, t. II, 1827, p. 66, formule (31), et M. Poisson, 20e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, article 19, p. 37.) La seconde est l'une de celles de la page 46 des *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, de M. Lamé (1852).

On obtient directement cette expression simple en remarquant



que si, Mx, My, Mz, My' sont devenues M_1x_1, M_1y_1, M_1z_1, $M_1y'_1$, et si M_1p, M_1q, M_1p' étant les projections, sur celles-ci, de l'unité de distance portée sur M_1x_1, MG est la projection de cette même unité sur le plan $z_1M_1y_1$, l'on a

$$M_1p = g_{xy},\quad M_1q = Gp = g_{xz},\quad M_1p' = g_{xy'};$$

et que, comme les angles $G\,p\,M_1$, $Gp'M_1$ diffèrent extrêmement peu de l'angle droit, et celui $p'M_1p$ très-peu de ϵ, l'on a, en négligeant toujours les quantités très-petites du second ordre, $M_1p' = M_1p\cos\epsilon + Gp\sin\epsilon$, ou précisément la formule (6).

Cette expression (6) de $g_{xy'}$ donne le moyen de comparer les grandeurs des divers glissements suivant une même ligne x, grandeurs variables selon la direction de la deuxième ligne y' qui les détermine avec x (art. 4), ou selon le choix des plans xy' dans lesquels ont lieu ces glissements relatifs de x et de ses parallèles qui l'entourent de divers côtés.

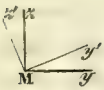
Sa plus grande valeur est celle M_1G, que prend M_1p' pour un angle ϵ dont la tangente est $\frac{g_{xz}}{g_{xy}}$.

Nous appellerons *glissement principal* suivant x ou relativement à x cette plus grande valeur de $g_{xy'}$, ou *cette projection* M_1G, *sur le plan matériel primitivement perpendiculaire à* x, *de l'unité de longueur portée sur cette ligne*. Si on le désigne par g_x, l'on a

$$g^2_x = g^2_{xy} + g^2_{xz}. \tag{7}$$

Les autres glissements suivant x ne sont autre chose que les projections du glissement principal $M_1G = g_x$ sur les diverses directions y' perpendiculaires à x. Il y a toujours un glissement nul, c'est celui pour lequel y' est à angle droit sur M_1G.

D'après la réciprocité des glissements (art. 4), le glissement principal dans le sens x est aussi le plus grand de tous les glissements qui ont lieu suivant des sens perpendiculaires à x, dans des plans passant par cette droite.



La même expression (6) de $g_{rr'}$ donne, si z' est une nouvelle droite perpendiculaire à x et à y' :

$$(8) \qquad g_{y'z'} = (\partial_z - \partial_y) \sin 2\theta = g_{yz} \cos 2\theta,$$

expression dont le maximum est g_{yz} lui-même si $\partial_z - \partial_y$ est nul.

L'expression (5) de ∂_r donne pour la dilatation suivant la même ligne y' que nous avons considérée,

$$(9) \quad \begin{cases} \partial_{y'} = \partial_y \cos^2\theta + \partial_z \sin^2\theta + g_{yz} \sin\theta \cos\theta, \\ \text{ou } \partial_{y'} = \frac{1}{2} g_{yz} \sin 2\theta \qquad (\text{si } \partial_y = 0,\ \partial_z = 0), \end{cases}$$

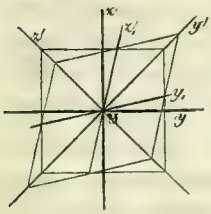
expression qui est à son maximum pour

$$\theta = \tfrac{1}{2} \text{ angle droit.}$$

Si, alors, on suppose aussi $\partial_x = 0$, $g_{zx} = 0$, $g_{xy} = 0$, *en sorte qu'il n'y ait, dans le sens x, y, z, que le glissement g_{yz}*, l'on trouve, pour les dilatations et glissements suivant les axes nouveaux x, y', z',

$$\partial_{y'} = \tfrac{1}{2} g_{yz},\ \partial_{z'} = -\tfrac{1}{2} g_{y'z'},\ (\text{et } \partial_x,\ g_{y'z'},\ g_{z'x'},\ g_{x'y'} \text{ nuls}).$$

On voit que tout *glissement suivant deux droites rectangulaires y, z, équivaut à une dilatation et à une contraction moitié moindres suivant leurs bissectrices y', z'.*



On pourrait, ainsi, remplacer la considération des glissements par celle de dilatations positives et négatives s'opérant dans des directions inclinées aux axes coordonnés dont on a fait choix. Mais les glissements se présentent naturellement dans toutes les formules, et leur usage rend l'exposition beaucoup plus simple et plus élémentaire[1].

[1] J'ai proposé leur considération en 1837 dans des Leçons (lithographiées) de Mécanique à l'école des Ponts et Chaussées; et M. Poncelet l'a adoptée dans son cours à la Faculté des sciences. M. Lamé fait usage du même terme à la page 61 (§ 23) de sa *Théorie de l'élasticité*, et Navier l'emploie également, après M. Vicat.

8. *Relations des dilatations et glissements avec les déplacements, amenés à être très-petits.* — Si $x+u$, $y+v$, $z+w$ sont, dans le nouvel état du corps, les coordonnées du point M dont les coordonnées primitives étaient x, y, z,

$$u,\ v,\ w,$$

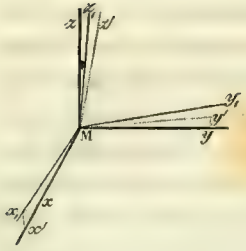
qui sont fonctions de x, y, z, représentent les *projections du déplacement de ce point sur les trois axes fixes des x, y, z, ou ses trois déplacements suivant leurs directions.*

Or, si l'on suppose d'abord les déplacements u, v, w très-petits, on va voir que l'on peut exprimer d'une manière simple les dilatations et glissements δ_x, δ_y, δ_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} (art. 6), *au moyen de leurs coefficients différentiels du premier ordre;* mais pourvu qu'il ne s'agisse toujours que des déplacements moyens des groupes moléculaires (art. 3) et non des déplacements réels ou individuels: car ceux-ci ne pourraient être représentés, avons-nous dit, que par des fonctions compliquées, dont il faudrait prendre aussi les dérivées d'ordre supérieur, et en grand nombre, pour obtenir la forme sinueuse ou ondulée (art. 4) qu'ils donneraient à des lignes précédemment droites, d'une longueur comprenant un certain nombre d'intervalles moléculaires.

En effet, si l'on fait coïncider la situation nouvelle du point M avec sa situation primitive en communiquant au corps une petite translation égale et contraire au déplacement de ce point, et si Mx_1, My_1, Mz_1, sont toujours les lignes dans lesquelles les déplacements moyens ont changé Mx, My, Mz, parallèles aux trois axes coor-

à l'article 152 du Résumé (1833) de ses Leçons sur l'application de la Mécanique aux constructions. Fresnel avait remarqué (Société philomathique, 1822, p. 65) que c'est en *glissant* les unes contre les autres que les tranches du fluide éthéré s'entraînent mutuellement.

Je considérais, alors et en 1843 (*Comptes rendus de l'Académie*, t. XVII, p. 944, mémoire lu le 30 octobre et approuvé le 27 novembre), des glissements de plans ou *sur* des plans; et les quantités telles que g_{xy}, g_{xz} n'étaient que ces glissements g_x décomposés. Il me paraît plus simple de considérer ces quantités g_{xy}, g_{xz} d'une manière directe, comme des *glissements de lignes, dans* divers plans, et les g_x comme leurs plus grandes valeurs pour une direction donnée.



donnés, la petite ligne xx', projection de xx_1 sur Mx prolongé, représentera le déplacement u du point x, diminué du déplacement u du point M, par la translation opérée. Son quotient par Mx sera $\frac{du}{dx}$ si Mx est très-petit (art. 3), et mesurera (art. 4) la dilatation dans le sens x. Comme on peut dire la même chose pour les sens y et z, l'on a

$$(10) \qquad \delta_x = \frac{du}{dx}, \quad \delta_y = \frac{dv}{dy}, \quad \delta_z = \frac{dw}{dz}.$$

Quant aux glissements, l'angle y_1Mz_1, dont le plan ne fait avec celui yMz qu'un angle dièdre extrêmement petit, peut être regardé comme égal à sa projection $y'Mz'$ sur le plan yMz. Or, une petite ligne yy', menée parallèlement à Mz sur ce dernier plan entre les lignes My, My' n'est autre chose que le déplacement w du point y, diminué de celui du point M par la translation opérée : par conséquent, si l'on prend la longueur $My = dy$, l'on a $yy' = \left(w + \frac{dw}{dy}dy\right) - w = \frac{dw}{dy}dy$. D'où le petit angle $y'My = \frac{dw}{dy}$.

On prouvera de même que le petit angle $z'Mz = \frac{dv}{dz}$; d'où il suit que la diminution éprouvée par l'angle droit yMz devenu l'angle peu aigu y_1Mz_1, et par conséquent (art. 5) le glissement γ_{yz}, est $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$, et l'on a

$$(11) \qquad \gamma_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad \gamma_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \quad \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}.$$

Lorsque les déplacements u, v, w ne sont pas très-petits, l'on a pour les dilatations et les glissements, en fonction de ces déplacements, des expressions moins simples que celles (10) et (11)[1].

[1] J'ai trouvé (Société philomatique, 26 mars 1844, ou journal *L'Institut*, n° 537, 10 avril; et *Comptes rendus de l'Académie*, 22 février 1847, t. XXIV, p. 261) que

Mais on peut toujours, au moyen d'une translation et d'une rotation, rendre extrêmement voisines les situations anciennes et nouvelles des mêmes points, lorsqu'on ne s'occupe à la fois que d'une portion peu étendue du corps élastique, les déplacements remplissant, bien entendu, la condition du faible changement des petites distances, indiquée (art. 5) comme nécessaire à la non-altération de la cohésion. On amène, ainsi, successivement pour chaque portion du corps, les déplacements à être très-petits; ce qui conduit, dans un grand nombre de cas, à calculer de proche en proche et par addition les grandeurs de déplacements quelconques en ne partant que des formules (10) et (11), comme on en verra des exemples dans la suite de ce mémoire.

9. *Pressions. Leur résultante sur les diverses faces d'un élément. Leur variation continue.* — De ces considérations de pure cinématique, passons à celle des forces qui se trouvent en jeu (art. 3).

Au lieu de chercher à faire entrer dans le calcul les actions individuelles et irrégulièrement variables des divers couples de molécules, on peut ne considérer que les résultantes de toutes celles qui s'exercent en très-grand nombre à travers les faces de séparation des éléments des corps, résultantes analogues aux pressions que l'on considère dans les fluides, mais pouvant avoir des inclinaisons quelconques sur ces faces, et pouvant, aussi, être attractives, tandis que les pressions dans les fluides en repos sont toutes normales et répulsives [1].

Nous appellerons donc en général *Pression, sur un des deux côtés d'une petite face plane imaginée à l'intérieur d'un corps ou à la limite de séparation de deux corps, la résultante de toutes les actions des mo-*

l'on a alors

$$\vartheta_x = \frac{du}{dx} + \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{2\,dx^2}, \quad \vartheta_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} + \left(\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz} \right)$$

expressions qui ont de l'analogie avec celles données par M. Cauchy à la page 62 du deuxième volume des *Exercices de mathématiques*, pour d'autres quantités.

[1] Excepté, bien entendu, dans les phénomènes capillaires.

lécules situées de ce côté sur les molécules du côté opposé, et dont les directions traversent cette face; toutes ces forces étant supposées transportées parallèlement à elles-mêmes sur un même point pour les composer ensemble (voyez art. 29 pour le *sens*).

Il suit immédiatement de cette définition de la pression [1] que *la résultante des pressions sur les diverses faces d'un élément polyédrique est exactement la même que la résultante des actions exercées sur les molécules de cet élément, de la part des molécules qui lui sont extérieures;* car si les pressions comprennent, en outre, des actions de molécules extérieures sur d'autres molécules extérieures, suivant des lignes qui traversent deux des faces de l'élément solide, ces actions étrangères se détruisent deux à deux en composant la résultante générale des pressions sur toutes les faces, en sorte qu'il ne reste que les actions des molécules du dehors sur celles de l'intérieur de l'élément du corps.

Comme les pressions, même à travers des faces de dimensions imperceptibles, comprennent toujours un nombre assez grand d'actions moléculaires pour compenser les inégalités irrégulières qu'elles peuvent offrir en passant d'un couple de molécules à un couple voisin, l'on peut considérer :

1° Les pressions sur des petites faces ayant le même centre de gravité et tracées sur le même plan, comme proportionnelles aux superficies de ces faces;

[1] Je l'ai comparée aux autres définitions qui en ont été données, dans une note imprimée au *Bulletin de la Société philomathique*, à la date du 30 décembre 1843, ainsi qu'au numéro 524 du journal *L'Institut*, et dans une autre note, insérée aux *Comptes rendus de l'Académie*, le 7 juillet 1845, t. XXI, p. 24. Ce que dit M. Poisson, à la fin de l'article 19 de son Mémoire sur les corps cristallisés, des conséquences d'une autre définition qu'il a adoptée (tome XVIII des *Mémoires de l'Institut*, p. 56-57), me paraît propre à me confirmer dans mon choix.

M. Cauchy a considéré le premier les *pressions* ou *tensions* dans les corps solides (Mémoire du 30 septembre 1822, *Bulletin de la Société philomathique*, 1823, p. 10). M. Lamé les appelle aujourd'hui *forces élastiques* (*Leçons sur l'élasticité*, § 5), ce qui lui permet de distinguer un peu plus facilement les cas où il y a tension ou traction, c'est-à-dire résultante attractive, du cas où il y a résultante répulsive ou pression proprement dite (*Ibid.* § 23).

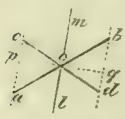
2° Les *pressions par unité superficielle* comme variant d'une manière simple et continue pour des faces parallèles, et proportionnellement aux distances de leurs centres de gravité, tant que ces distances restent très-petites et sont mesurées dans une même direction.

10. *Relations des pressions sur diverses faces ayant leur centre en un même point.* — M. Cauchy, en posant les équations de l'équilibre de translation d'un élément de forme tétraèdre, et de l'équilibre de rotation, autour de son axe, d'un élément de forme prismatique à base losange, est arrivé, en négligeant les quantités proportionnelles au volume devant celles proportionnelles aux superficies, à ces deux théorèmes fort importants, applicables aux pressions dans les corps, soit solides, soit fluides, en repos ou en mouvement[1] :

1° La pression sur une petite face plane est résultante des pressions supportées par ses trois projections droites ou obliques, faites sur trois plans quelconques passant par son centre de gravité;

2° Lorsque deux petites faces planes ont la même superficie et le même centre, la pression sur la première, décomposée suivant une normale à la seconde, est égale à la pression sur la seconde, décomposée suivant une normale à la première.

On aperçoit facilement la vérité de ces théorèmes en remarquant



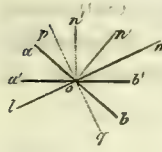
que le nombre et l'intensité totale des actions moléculaires qui s'exercent parallèlement à une droite lm, à travers diverses petites faces aob, cod, etc., ayant un centre commun o, sont les mêmes pour toutes si ces faces ont toutes la même projection pq sur un plan perpendiculaire à lm; et que cette intensité, proportionnelle du reste à la super-

[1] *Exercices de mathématiques*, t. II (1827), p. 48-49; et t. IV (1829), p. 41-42, pour l'extension du second théorème à deux plans non rectangulaires, considérés l'année d'avant par MM. Lamé et Clapeyron (Équilibre des solides homogènes, *Savants étrangers*, 1829, p. 490-491). La communication de M. Cauchy, de 1822, citée article précédent, énonçait déjà implicitement le premier théorème.

ficie des faces qui peuvent faire partie d'un même plan (art. précédent), est en raison de la projection $p\,q$ si cette projection a des grandeurs différentes pour ces diverses faces; car on déduit immédiatement de cette remarque :

1° Que les actions, parallèles à une droite quelconque, s'exerçant à travers une face A, ont la même intensité totale que celles s'exerçant à travers ses projections B, C, D sur trois plans quelconques; car celles-ci, projetées sur un même autre plan, donnent toujours une somme égale à la projection de A sur ce dernier[1]; par conséquent, comme les pressions sont les résultantes générales des actions s'exerçant dans toutes les directions, la pression sur A peut être remplacée par les pressions sur B, C, D, *ce qui est le premier théorème, dit des projections de plans de pression;*

2° Que si les deux faces $a\,o\,b$, $a'\,o\,b'$ ont la même superficie, les intensités totales des actions qui les traversent parallèlement à une ligne $l\,m$, sont respectivement comme les cosinus des angles qu'elles font avec le plan $p\,q$ perpendiculaire à $l\,m$, ou, ce qui est la même chose, comme les cosinus des angles $n\,o\,m$, $n'\,o\,m$ que les lignes n, n' normales à ces faces font avec la ligne $l\,m$. Ces deux actions totales ou sommes de forces, qui ont l'une et l'autre la direction $l\,m$, étant projetées, la première sur la seconde normale n', la seconde sur la première normale n, donneront évidemment la même chose, puisqu'on aura des deux parts la même quantité multipliée par deux cosinus qui sont ceux des deux mêmes angles $n\,o\,m$, $n'\,o\,m$. En prenant donc les deux résul-



[1] Rappelons que les *projections obliques d'une aire A* sur trois plans B, C, D, s'opèrent, sur chacun, par des droites parallèles aux deux autres, ou à leur intersection; et que les *projections obliques d'une droite a* sur trois autres *b*, *c*, *d* s'opèrent, sur chacune, par des plans parallèles à la fois aux deux autres. Une droite et ses trois projections obliques peuvent toujours être regardées comme la diagonale et les trois côtés d'un même parallélipipède, comptés d'un même sommet; une aire plane et ses trois projections, comme les quatre faces d'un même tétraèdre, prises, la première du côté du dehors, les trois autres du côté du dedans de ce solide, ou réciproquement.

tantes générales de ces projections de forces pour toutes les directions lm, on aura la même chose encore, et il y a par conséquent égalité entre la pression sur la première face ab, projetée suivant la deuxième normale on', et la pression sur la deuxième face $a'b'$, projetée suivant la première normale on, *ce qui est le second théorème, dit de réciprocité des composantes de pression.*

11. *Conséquences. Changements de plans de pression. Plans légèrement obliques l'un à l'autre.* — Il résulte du second théorème que, si trois plans ayant leur centre au même point sont perpendiculaires respectivement à trois droites x, y, z, *rectangulaires ou obliques*, et si l'on désigne par

$$p_{xx},\ p_{xy},\ p_{xz};\quad p_{yx},\ p_{yy},\ p_{yz};\quad p_{zx},\ p_{zy},\ p_{zz},$$

les pressions qu'ils supportent *par unité superficielle*, successivement décomposées ou estimées suivant ces mêmes droites, la première sous-lettre désignant le plan par sa normale, et la seconde, le sens de la décomposition, l'on a les trois égalités

$$p_{yz} = p_{zy},\quad p_{zx} = p_{xz},\quad p_{xy} = p_{yx},$$

en sorte que ces neuf quantités se réduisent à six

$$(12)\qquad p_{xx},\ p_{yy},\ p_{zz};\quad \text{et}\quad p_{yz},\ p_{zx},\ p_{xy}.$$

Les trois premières sont appelées les *pressions normales.*

Les trois dernières sont les *pressions tangentielles* lorsque les droites x, y, z sont rectangulaires; car alors z se trouve tracée sur la face perpendiculaire à y, et ainsi des autres.

Le premier théorème permet d'obtenir, en fonction de six composantes (12), celle, dans une direction quelconque, de la pression qui s'exerce sur une autre face quelconque ayant son centre au même point du corps.

En effet, soient :

r la normale à cette face; α, β, γ les angles de r avec x, y, z supposés rectangulaires.

Si la superficie de cette face est l'unité, on a

$$\cos\alpha,\ \cos\mathcal{E},\ \cos\gamma,$$

pour les superficies de ses projections sur les trois plans perpendiculaires aux x, aux y, aux z. Multipliant ces aires par les composantes p_{xx}, p_{yx}, p_{zx}, suivant x, des pressions que supporte l'unité superficielle de chacune, on a, sur ces faces, les composantes suivant x,

$$\cos\alpha.\ p_{xx},\ \cos\mathcal{E}.\ p_{yx},\ \cos\gamma.\ p_{zx}.$$

D'après le théorème invoqué, leur somme sera la composante p_{rx} de pression supportée par la nouvelle face, estimée dans le sens x; d'où, en raisonnant de même pour les composantes dans les sens y et z, ces formules

$$(13)\quad \begin{cases} p_{rx} = p_{xx}\cos\alpha + p_{yx}\cos\mathcal{E} + p_{zx}\cos\gamma, \\ p_{ry} = p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\mathcal{E} + p_{zy}\cos\gamma, \\ p_{rz} = p_{xz}\cos\alpha + p_{yz}\cos\mathcal{E} + p_{zz}\cos\gamma. \end{cases}$$

Si maintenant l'on projette p_{rx}, p_{ry}, p_{rz} dans la direction d'une droite

r', faisant les angles α', $\mathcal{E}'$, γ' avec les x, y, z,

et si l'on ajoute les projections, qui seront les expressions précédentes multipliées respectivement par $\cos\alpha'$, $\cos\mathcal{E}'$, $\cos\gamma'$, l'on a l'expression suivante de la composante, suivant r', de la pression sur l'unité superficielle d'une face perpendiculaire à r:

$$(14)\quad \begin{cases} p'_{rr} = p_{xx}\cos\alpha\cos\alpha' + p_{yy}\cos\mathcal{E}\cos\mathcal{E}' + p_{zz}\cos\gamma\cos\gamma' \\ \qquad + p_{yz}(\cos\mathcal{E}\cos\gamma' + \cos\gamma\cos\mathcal{E}') \\ \qquad + p_{zx}(\cos\gamma\cos\alpha' + \cos\alpha\cos\gamma') \\ \qquad + p_{xy}(\cos\alpha\cos\mathcal{E}' + \cos\mathcal{E}\cos\alpha')\ [1] \\ (\text{où } \alpha = \widehat{rx},\ \beta = \widehat{ry},\ \gamma = \widehat{rz},\ \alpha' = \widehat{r'x},\ \beta' = \widehat{r'y},\ v' = \widehat{r'z}). \end{cases}$$

[1] Elle comprend les six formules de changement de plans de pression (7) et (8) de la page 32 du quatrième volume des *Exercices de mathématiques* de M. Cauchy, ou celles (11) de la page 48 de la *Théorie de l'élasticité* de M. Lamé.

Il n'est pas difficile de voir que *cette expression convient encore au cas où x, y, z ne sont pas rectangulaires, mais font entre eux des angles peu différents de l'angle droit*, pourvu que α, 6, γ, α', $6'$, γ' représentent alors les angles de r et r', non avec les lignes x, y, z, mais avec les lignes peu différentes suivant lesquelles se coupent les trois plans perpendiculaires à celles-ci [1].

[1] Soient en effet $x'y'z'$ ces trois intersections, ou trois perpendiculaires communes, savoir x' à y et z, y' à z et x, z' à x et y. Soient $A = 1$ la face perpendiculaire à r, sur laquelle on prend la pression, et A_x, A_y, A_z ses projections *obliques* sur les trois plans perpendiculaires à x, y, z. Comme la projection oblique A_x de A s'opère par des lignes parallèles à x', A et A_x auront la même projection droite sur un plan perpendiculaire à x'; donc, comme les angles des plans sont les mêmes que ceux de leurs normales, on aura $A\cos\widehat{rx'} = A_x\cos\widehat{xx'}$, d'où $A_x = \frac{\cos rx'}{\cos xx'}$ puisque $A = 1$. Et l'on aura de même $A_y = \frac{\cos ry'}{\cos yy'}$, $A_z = \frac{\cos rz'}{\cos zz'}$. Si nous projetons orthogonalement, sur x, la droite représentant en grandeur et direction la pression sur A_x, nous aurons $A_x p_{xx}$ d'après la définition même de p_{xx}; et si nous projetons obliquement la même droite sur x', y', z', sa projection oblique sur x' se fera avec les mêmes plans, parallèles à y' et z', et par conséquent perpendiculaires à x, que la projection orthogonale que nous venons d'opérer : donc cette projection oblique sur x' est $\frac{A_x p_{xx}}{\cos xx'}$; celles sur y' et sur z' sont de même $\frac{A_x p_{xy}}{\cos yy'}$, $\frac{A_x p_{xz}}{\cos zz'}$. Ce sont les trois côtés d'un parallélipipède dont la diagonale est la pression sur A_x. Décomposée ou projetée orthogonalement dans le sens r', cette pression sur A_x donnera donc $A_x\left(\frac{p_{xx}}{\cos xx'}\cos r'x' + \frac{p_{xy}}{\cos yy'}\cos r'y' + \frac{p_{xz}}{\cos zz'}\cos r'z'\right)$. Mettant pour A_x sa valeur $\frac{\cos rx'}{\cos xx'}$, et formant deux expressions semblables pour les composantes, suivant r', des pressions sur A_y et sur A_z, l'on a, en ajoutant le tout conformément au premier théorème de M. Cauchy :

$$p_{rr'} = \frac{\cos rx'}{\cos xx'}\left(p_{xx}\frac{\cos r'x'}{\cos xx'} + p_{xy}\frac{\cos r'y'}{\cos yy'} + p_{xz}\frac{\cos r'z'}{\cos zz'}\right) +$$
$$+ \frac{\cos ry'}{\cos yy'}\left(p_{yx}\frac{\cos r'x'}{\cos xx'} + p_{yy}\frac{\cos r'y'}{\cos yy'} + p_{yz}\frac{\cos r'z'}{\cos zz'}\right) +$$
$$+ \frac{\cos rz'}{\cos zz'}\left(p_{zx}\frac{\cos r'x'}{\cos xx'} + p_{zy}\frac{\cos r'y'}{\cos yy'} + p_{zz}\frac{\cos r'z'}{\cos zz'}\right),$$

formule générale qui s'applique à des inclinaisons mutuelles quelconques de x, y, z, ou à des grandeurs quelconques des trois cosinus en dénominateurs; mais qui se ré-

Elle sert comme celles (5) de l'art. 6, donnant les dilatations et glissements δ_r et $g_{rr'}$, à changer des pressions sur trois plans qui peuvent être rectangulaires ou légèrement obliques, en des pressions sur d'autres plans d'une obliquité quelconque, mais pris ordinairement rectangulaires.

On peut en tirer un grand nombre de théorèmes remarquables, dont les principaux font le sujet de la cinquième leçon sur l'élasticité de M. Lamé.

12. *Relations des composantes de pression avec les dilatations et les glissements.* — Considérons un corps élastique dans un état, que nous pouvons prendre pour son état *primitif*, où aucune pression n'est encore opérée sur sa surface et où aucune force extérieure ou non réciproque (telle que la pesanteur) ne sollicite ses points, soumis seulement aux attractions et répulsions qu'ils exercent les uns sur les autres à des distances insensibles[1]. En le partageant en éléments d'une manière quelconque (voy. art. 20), et en considérant ces éléments successivement à partir de la surface, il est facile de voir que l'équilibre de chacun exige que ces forces intérieures se détruisent mutuellement à travers leurs faces de séparation, en sorte que *les pressions sont nulles partout dans cet état regardé comme primitif*, qu'on appelle quelquefois l'état *naturel* du corps.

Des forces extérieures venant à être appliquées, les points se déplacent, d'autres actions se développent entre eux, et les pressions s'engendrent.

Ces actions nouvelles des couples de molécules ou de points matériels dépendent des déplacements relatifs individuels; mais les pressions, qui sont des résultantes d'un nombre extrêmement considérable d'actions entre points d'une même petite portion d'un corps, doivent dépendre uniquement de ces déplacements moyens définis art. 3, qui sont les seuls déplacements perceptibles.

duit à l'expression (14) lorsque, les angles xx', yy', zz' étant petits, on peut remplacer ces cosinus par l'unité, dont ils ne diffèrent que de quantités du second ordre.

[1] *Exercices de mathématiques*, t. III, 1828, p. 167.

Or, cela admis, *les pressions qui s'exercent sur diverses faces ayant leur centre en un point donné* M *d'un corps, sont nécessairement fonctions des trois dilatations* δ_x, δ_y, δ_z *et des trois glissements* g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} (art. 4, 5, 6) qui ont lieu au même point dans la direction de trois axes rectangulaires x, y, z choisis arbitrairement. En effet, ces six quantités qui représentent les allongements de toutes les droites primitivement parallèles aux x, y, z autour du point M, et les inclinaisons qu'elles ont prises les unes sur les autres, fournissent tout ce qu'il faut pour déterminer les situations relatives nouvelles des points environnants, dont les situations primitives étaient données, et qui sont capables d'exercer des actions sensibles à travers les petites faces ayant leur centre en M : et c'est ce que montrent d'ailleurs les expressions (5) δ_r et $g_{rr'}$ de l'art. 6.

Dans ces fonctions inconnues, les quantités δ_x, δ_y, δ_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} devront entrer nécessairement au même degré, car ces quantités *très-petites* peuvent décroître indéfiniment sans cesser d'avoir toutes le même ordre de grandeur et d'influence sur les déplacements relatifs et les pressions (fin de l'art. 7); et il ne faut pas que, par l'inégalité des exposants qui les affecteraient, le terme qui contient l'une disparaisse comme négligeable avant ceux qui contiennent les autres.

Reste à savoir si ce sera au premier degré ou à un autre degré quelconque, c'est-à-dire si ces fonctions seront *linéaires*, ou homogènes non linéaires.

Il n'y a, à cet égard, que l'expérience, ou quelque principe physique qui en soit déduit (note page suivante), qui puisse nous instruire.

Or, soit qu'on étende un fil (ce qui produit une dilatation longitudinale à peu près égale dans toutes ses parties), soit qu'on torde un cylindre creux (ce qui produit un glissement à peu près le même partout), l'expérience prouve que l'*effort est proportionnel aux effets*, tant que ceux-ci restent très-petits, et non à des puissances de ces effets, autres que la première; ce à quoi il n'y aurait pourtant aucune impossibilité *mathématique*.

C'est même en cela que consiste le fameux principe *ut tensio sic vis*, avancé par Hooke[1] et employé par Mariotte[2], il y a bientôt deux siècles.

Admettons donc avec tout le monde que les pressions sont fonctions linéaires des dilatations et des glissements tant qu'ils sont très-petits, ou que l'on a, A_{xx}, A_{yy}..... étant des coefficients indépendants de ces quantités :

$$(15)\quad \begin{cases} p_{xx} = A_{xx}\,\delta_x + A_{yy}\,\delta_y + A_{zz}\,\delta_z + A_{yz}\,\gamma_{yz} + A_{zx}\,\gamma_{zx} + A_{xy}\,\gamma_{xy}, \\ p_{yy},\ p_{zz} \\ p_{yz},\ p_{zx},\ p_{xy} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{égalent} \\ \\ \\ \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{des expressions de même forme} \\ \text{avec d'autres coefficients A [3].} \end{array} \right.$$

[1] *Lectures De potentiâ restitutivâ or of spring*, 1678, opuscule inséré aux *Philosophical tracts and collections* de Robert Hooke.

[2] *Traité du mouvement des eaux*, 1680 à 1684, 5e partie, 2e discours.

[3] En partant de ce principe « que les points matériels exercent mutuellement, à des distances insensibles, des actions qui, pour les deux mêmes points, sont fonctions continues de ces distances », principe que les physiciens ont déduit d'autres faits encore que de ceux de cohésion et d'élasticité, on peut rendre raison de la forme (15) des expressions de p_{xx}, p_{yy}... et se faire en même temps une idée des valeurs relatives de plusieurs de leurs coefficients A, de la manière suivante, qui, en laissant en évidence jusqu'à la fin ce qui peut résulter des petites différences inconnues entre les déplacements réels et les déplacements *moyens*, et en maintenant dans les formules les actions mêmes dont se composent les pressions sans en substituer d'autres regardées comme équivalentes, se trouve dégagée de ce qui a prêté à reproches dans d'autres démonstrations analogues.

Appelons $p_{x'x'}, p_{y'y'}, p_{z'z'}, p_{y'z'} = p_{z'y'}, p_{z'x'} = p_{x'z'}, p_{x'y'} = p_{y'x'}$ les pressions sur l'unité superficielle des plans légèrement obliques dans lesquels se sont changés, en vertu des *déplacements moyens* (art. 3), trois petits plans rectangulaires primitivement perpendiculaires aux x, y, z et ayant leur centre en un point M du corps; ces pressions étant décomposées successivement, non pas suivant les intersections M_1x_1, M_1y_1, M_1z_1 des plans, mais *suivant leurs trois normales* actuelles M_1x', M_1y', M_1z';

r la distance primitive de deux molécules ou particules matérielles élémentaires m, m' situées de part et d'autre de celui des trois plans sur lequel on cherche à exprimer la pression;

$\mathfrak{R}$ l'action, quelle qu'elle soit, de m' sur m, action qui dépend à la fois de r et de la masse de ces molécules et même de leur nature (car le corps peut être composé de diverses substances tant pondérables qu'impondérables dont les parties agissent les unes sur les autres) ;

r_1, $\mathfrak{R}_1$ ce que sont devenues r, $\mathfrak{R}$ par suite des *déplacements réels* de m et m';

α, ϵ, γ les angles primitifs de r avec les x, y, z;

13. *Observation sur le nombre des coefficients distincts.* — Il résulte de l'analyse par laquelle M. Cauchy, en considérant les corps comme des systèmes de points qui s'attirent et se repoussent, a obtenu, soit les expressions sextinômes (15) $A_{xx}\,\delta_x + A_{yy}\,\delta_y + A_{zz}\,\delta_z + A_{yz}\,\gamma_{yz} + A_{zx}\,\gamma_{zx} + A_{xy}\,\gamma_{xy}$ des six composantes de pressions,

δ', δ'', δ''' les proportions dont il faut augmenter les projections rectangulaires primitives $r\cos\alpha$, $r\cos\mathcal{E}$, $r\cos\gamma$ de $r = mm'$ sur les x, y, z, pour avoir les *projections obliques* de r_1 sur les intersections actuelles M_1x_1, M_1y_1, M_1z_1 des trois petits plans, intersections dont les angles presque droits $y_1M_1z_1$, $z_1M_1x_1$, $x_1M_1y_1$ ont pour cosinus les trois glissements γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy};

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ les trois dilatations au même point M : ces dilatations ne sont autre chose (art. 4) que δ', δ'', δ''' si les déplacements réels varient d'un point à l'autre d'une manière simple et continue, puisque alors nos déplacements moyens de petits groupes moléculaires (art. 3 et 8) sont identiques aux déplacements réels : et, généralement, δ', δ'', δ''' diffèrent fort peu de δ_x, δ_y, δ_z qui en sont, respectivement, les *moyennes* prises pour une portion très-petite du corps.

S_x, S_y, S_z les signes de sommes relatives à toutes les lignes de jonction r ou r_1 de molécules m, m' agissant sensiblement l'une sur l'autre, à travers les trois faces considérées; *ces sommes étant divisées par leurs superficies*, ou rapportées à l'unité superficielle de ces faces.

Comme la projection droite de r_1 sur la normale M_1x' au plan $y_1M_1z_1$ s'opère par les deux mêmes plans, parallèles à celui-ci, que sa projection oblique sur M_1x_1, elle est égale à cette dernière projection, ou à $r\cos\alpha\,(1+\delta')$, multipliée par le cosinus de l'angle très-petit x_1M_1x', cosinus que l'on peut regarder comme égal à l'unité. Donc on a $\cos\widehat{r_1x'} = \dfrac{r\cos\alpha\,(1+\delta')}{r_1}$, et deux expressions semblables pour $\cos r_1y'$, $\cos r_1z'$; d'où, en vertu de la définition même de la pression :

$$p_{x'x'} = S_x\frac{\mathcal{R}_1}{r_1}\cdot r\cos\alpha\,(1+\delta');\quad p_{x'y'} = S_x\frac{\mathcal{R}_1}{r_1}r\cos\mathcal{E}\,(1+\delta'');\quad p_{x'z'} = S_x\frac{\mathcal{R}_1}{r_1}r\cos\gamma\,(1+\delta''').$$

Or on a en négligeant, comme nous le ferons constamment, les carrés et les produits des quantités très-petites δ, γ, $r_1 - r$:

$$\frac{\mathcal{R}_1}{r_1} = \frac{\mathcal{R}}{r} + (r_1 - r)\,\frac{d\dfrac{\mathcal{R}}{r}}{dr};$$

et, si l'on invoque le théorème connu qui donne le carré de la diagonale $r_1 = r + (r_1 - r)$ d'un parallélipipède en fonction de ses côtés $r\cos\alpha\,(1+\delta')$, $r\cos\mathcal{E}\,(1+\delta'')$, $r\cos\gamma\,(1+\delta''')$ et des cosinus γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} de leurs angles, ou si l'on raisonne comme on a fait pour arriver à la formule (5) $\delta_r =$ etc. de l'art. 6, on a

$$\frac{r_1 - r}{r} = \delta'\cos^2\alpha + \delta''\cos^2\mathcal{E} + \delta'''\cos^2\gamma + \gamma_{yz}\cos\mathcal{E}\cos\gamma + \gamma_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\mathcal{E}.$$

soit les équations d'équilibre de pareils systèmes très-peu dérangés de leur état primitif, que lorsque aucune force extérieure n'agissait dans ce premier état, et que les déplacements individuels sont supposés varier d'un point à l'autre de la même manière simple et continue que nos déplacements *moyens* (art. 3, 8), il y a entre

Substituant dans la valeur de $\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1}$, puis celle-ci dans $p_{x'x'}$, $p_{x'y'}$, $p_{x'z'}$ et faisant

$$(a)\quad r^2\frac{d\frac{\mathfrak{R}}{r}}{dr} = r\frac{d\mathfrak{R}}{dr} - \mathfrak{R} = \mathrm{R}$$

l'on trouve, pour ces trois composantes de pression, des parties sextinômes affectées de R, précédées de parties binômes affectées de $\mathfrak{R}$, qui sont :

$$S_x\mathfrak{R}\cos\alpha + S_x\mathfrak{R}\cos\alpha.\,\partial',\quad S_x\mathfrak{R}\cos\mathcal{E} + S_x\mathfrak{R}\cos\mathcal{E}.\,\partial'',\quad S_x\mathfrak{R}\cos\gamma + S_x\mathfrak{R}\cos\gamma.\,\partial'''.$$

Or ces binômes doivent être effacés, car les premiers termes $S_x\mathfrak{R}\cos\alpha$, $S_x\mathfrak{R}\cos\beta$, $S_x\mathfrak{R}\cos\gamma$ représentent les trois composantes p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} de la pression dans l'état primitif, pression qu'on suppose nulle comme nous avons dit; et les seconds termes, tels que $S_x\mathfrak{R}\cos\alpha.\,\partial'$, sommes de produits, par les quantités ∂' très-petites et peu différentes entre elles, de forces parallèles $\mathfrak{R}\cos\alpha$ dont la somme est nulle, doivent être nuls eux-mêmes ou négligeables.

Il ne reste donc que les termes en R, ou les expressions sextinômes

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned}
p_{x'x'} &= S_x\,\mathrm{R}\cos^3\alpha.\,\partial' + S_x\,\mathrm{R}\cos\alpha\cos^2\mathcal{E}.\,\partial'' + S_x\,\mathrm{R}\cos\alpha\cos^2\gamma.\,\partial''' \\
&\quad + g_{yz}S_x\,\mathrm{R}\cos\alpha\cos\mathcal{E}\cos\gamma + g_{zx}S_x\,\mathrm{R}\cos^2\alpha\cos\gamma + g_{xy}S_x\,\mathrm{R}\cos^2\alpha\cos\mathcal{E}, \\
p_{x'y'} &= S_x\,\mathrm{R}\cos^2\alpha\cos\mathcal{E}.\,\partial' + S_x\,\mathrm{R}\cos^2\mathcal{E}.\,\partial'' + S_x\,\mathrm{R}\cos\mathcal{E}\cos^2\gamma.\,\partial''' \\
&\quad + g_{yz}S_x\,\mathrm{R}\cos^2\mathcal{E}\cos\gamma + g_{zx}S_x\,\mathrm{R}\cos\alpha\cos\mathcal{E}\cos\gamma + g_{xy}S_x\,\mathrm{R}\cos\alpha\cos^2\mathcal{E}, \\
p_{x'z'} &= S_x\,\mathrm{R}\cos^2\alpha\cos\gamma.\,\partial' + S_x\,\mathrm{R}\cos^2\mathcal{E}\cos\gamma.\,\partial'' + S_x\,\mathrm{R}\cos^2\gamma.\,\partial''' \\
&\quad + g_{yz}S_x\,\mathrm{R}\cos\mathcal{E}\cos^2\gamma + g_{zx}S_x\,\mathrm{R}\cos\alpha\cos^2\gamma + g_{xy}S_x\,\mathrm{R}\cos\alpha\cos\mathcal{E}\cos\gamma, \\
p_{y'z'}, p_{y'y'}, p_{y'z'} &= \text{les trois mêmes expressions en mettant des } S_y \text{ au lieu de } S_x, \\
p_{z'x'}, p_{z'y'}, p_{z'z'} &= \text{les trois mêmes expressions en mettant des } S_z \text{ au lieu de } S_x.
\end{aligned}\right.$$

Des six termes que l'on a ainsi pour chaque composante, les trois derniers sont les glissements multipliés (comme dans les expressions (15)) chacun par un coefficient ne dépendant que de la contexture primitive du corps dans les sens x, y, z autour du point M. Les trois premiers sont des sommes d'un nombre extrêmement considérable de produits de quantités telles que $\mathrm{R}\cos^3\alpha$, $\mathrm{R}\cos\alpha\cos^2\beta$ susceptibles de toutes sortes de grandeurs, par des quantités ∂' ou ∂'' ou ∂''' qui, au contraire, sont toutes égales respectivement à ∂_x, ∂_y, ∂_z dans plusieurs cas très-possibles où chaque petit groupe ne ferait que participer à la déformation de la portion du corps à laquelle il appartient, et qui, dans tous les autres cas, sont presque égales entre elles ou s'é-

les *trente-six* coefficiens A, *vingt et une égalités*. Il trouve en effet (en mettant, pour la symétrie, deux sous-lettres aux ∂ comme aux $\mathfrak{g}$) que

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Les coefficients A qui, dans } p_{xx}, \text{ affectent } \left\{\begin{array}{l}\partial_{yy}\\ \mathfrak{g}_{xy}\\ \mathfrak{g}_{yz}\end{array}\right\} \text{ sont égaux respectivement à ceux qui, dans } p_{xy}, \text{ affectent } \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{g}_{xy}\\ \partial_{xx}\\ \mathfrak{g}_{zx}\end{array}\right.\\ \text{Celui qui, dans } p_{xy}, \text{ affecte } \partial_{zz} \quad \text{est égal à celui qui, dans } p_{zz}, \text{ affecte } \mathfrak{g}_{yz}\\ \textit{Et ainsi des autres.}\end{array}\right.$$

En sorte que si l'on désignait chaque coefficient par quatre sous-lettres, dont les deux premières fussent celles de la composante de pression p, et les deux dernières celles du ∂ ou du $\mathfrak{g}$, l'on aurait $A_{xxyy} = A_{xyxy}$, $A_{xxxy} = A_{xyxx}$, $A_{xxyz} = A_{xyzx}$, $A_{xyzz} = A_{xzyz}$, c'est-à-dire que l'on pourrait intervertir à volonté, non-seulement les deux premières ou les deux dernières sous-lettres (art. 4 et 11), mais encore une ou deux des premières avec une ou deux des

cartent très-peu au-dessus ou au-dessous de ∂_x, ∂_y, ∂_z qui en représentent respectivement les moyennes.

Or, soit qu'on accorde que l'on peut y remplacer généralement ∂', ∂'', ∂''' par ∂_x, ∂_y, ∂_z en considération de ce qu'on ne voit aucune raison pour que leurs écarts en dessus de ces moyennes correspondent plutôt que ceux en dessous, ou ceux-ci plutôt que ceux-là, aux valeurs les plus grandes des multiplicateurs $R\cos^3\alpha$, $R\cos\alpha\cos^2\beta$, etc., soit que l'on conteste cette possibilité à l'égard de certains corps régulièrement cristallisés, en disant que la reproduction périodique des mêmes arrangements atomiques dans des groupes susceptibles de tourner tous semblablement sur eux-mêmes, ou de se déformer autrement que leur ensemble, peut y donner lieu à des correspondances de ce genre, toujours voit-on que les quantités ∂, comme celles $\mathfrak{g}$, ne sont engagées qu'au premier degré dans les expressions des composantes $p_{x'x'}$, $p_{y'y'}$, etc. Si donc on admet, comme nous l'avons dit dans le texte, que ces composantes de pression ne dépendent que des moyennes ∂_x, ∂_y, ∂_z qui, seules avec les $\mathfrak{g}_{yz}$, $\mathfrak{g}_{zx}$, $\mathfrak{g}_{xy}$, déterminent tous les déplacements relatifs visibles et mesurables, on voit, dis-je, que ces pressions $p_{x'x'}$, $p_{y'y'}$... $p_{x'y'}$ sur des plans légèrement obliques, sont bien fonctions linéaires des six petites quantités ∂_x, ∂_y, ∂_z, $\mathfrak{g}_{yz}$, $\mathfrak{g}_{zx}$, $\mathfrak{g}_{xy}$ au même point.

Et *l'on aura des fonctions de même forme* pour des composantes p_{xx}, p_{yy}... sur des *plans rectangulaires* différant extrêmement peu de ces plans obliques, vu qu'elles se déduisent des composantes obliques $p_{x'x'}$, $p_{y'y'}$... par de simples projections, ou par la formule (14) de l'article précédent, qui, même *ne changera les coefficients de* ∂_x...

dernières, sans changer les valeurs du coefficient, ce qui réduit de *trente-six* à *quinze* le nombre des coefficients distincts[1].

C'est ce qui résulte, évidemment aussi, de l'analyse très-simple de la note de l'article précédent, *si l'on admet seulement que les quantités appelées* ∂', ∂'', ∂''' *peuvent être remplacées par les trois dilatations* ∂_x, ∂_y, ∂_z qui leur sont rigoureusement égales dans des cas très-possibles de distribution régulière des molécules, et qui, dans les autres cas, ne sont autre chose que des moyennes dont leurs valeurs individuelles s'écartent fort peu[2].

g_{xy} *que de quantités susceptibles d'être négligées*, parce que leurs produits par les ∂, g, seront du second ordre.

[1] *Exercices de mathématiques*, t. IV, p. 2, et t. III, p. 226. S'il semble, aux pages 222 du tome troisième et 138 du quatrième, qu'il y a 21 coefficients au lieu de 15, c'est que, à ces deux endroits, M. Cauchy suppose qu'il existait, dans l'état primitif, des pressions dont les six composantes sont précisément les six coefficients supplémentaires. — On peut remarquer que M. Poisson, après avoir, le premier, présenté les formules avec les 36 coefficients indépendants (*Journal de l'École polytechnique*, 20e cahier, p. 83), en a réduit le nombre à 15, même pour les corps cristallisés, dans son dernier mémoire relatif à ces sortes de corps (*Mémoires* (*nouv.*) *de l'Institut*, t. XVIII, art. 36, 37).

[2] En effet, alors (voir les formules de cette note, art. 12), comme les ∂', ∂'', ∂''' remplacés par les ∂_x, ∂_y, ∂_z, sortent des signes S_x, les coefficients de ∂_y, g_{xy}, g_{yz} dans $p_{x'z'}$ sont $S_x R \cos\alpha \cos^2\epsilon$, $S_x R \cos^2\alpha \cos\epsilon$, $S_x R \cos\alpha \cos\epsilon \cos\gamma$ comme ceux de g_{xy}, ∂_x, g_{zx} dans $p_{x'y'}$; le coefficient de ∂_z dans $p_{x'y'}$ est $S_x \cos\epsilon \cos^2\gamma$ comme celui de g_{yz} dans $p_{x'z'}$; et si l'on considère de même les composantes $p_{y'z'_1}, \ldots p_{z'y'_1}, \ldots$ sur les deux autres plans, primitivement perpendiculaires aux y et aux z, en se rappelant que $p_{z'y'} = p_{y'z'}$, $p_{x'z'} = p_{z'x'}$, $p_{y'x'} = p_{x'y'}$ on arrive bien aux 21 égalités entre les 36 coefficients, ou à la réduction de ces coefficients à 15.

On voit cependant que, dans la note citée, nous avons conservé à la matière du corps sa *discontinuité*, ou aux sommes appelées S_x, S_y, S_z leur généralité sans les convertir en intégrales comme quelques auteurs; que nous n'avons fait aucune hypothèse sur le plus ou moins d'étendue de la petite sphère d'activité sensible des forces moléculaires, ou que nous n'avons pas supposé, avec M. Poisson, qu'elle comprend toujours un nombre excessivement grand de molécules (nos 3, 15, 16 de son mémoire inséré au 20e cahier du *Journal de l'École polytechnique*); enfin que, même, nous nous sommes abstenu d'opérer une transformation connue, par laquelle on a coutume de remplacer ces sommes S_x, S_y, S_z d'actions réelles de couples moléculaires quelconques par des sommes S, regardées comme plus simples et comme équivalentes, d'actions fictives sur une même molécule, en sorte que, par exemple, ρ

Mais des doutes ont été élevés sur le principe de cette réductibilité des 36 coefficients à 15 inégaux. Bien que ce doute ait pour motif principal une autre manière de l'établir, et qu'il ne paraisse atteindre, tout au plus, que les corps régulièrement cristallisés dont nous n'aurons pas à nous occuper dans la suite de ce mémoire, et, même, ceux seulement de ces corps où des groupes atomiques éprouveraient des rotations ou des déformations particulières lorsque l'on déforme l'ensemble[1], nous conserverons en général, à l'exemple de M. Lamé, l'indépendance des coefficients, ce qui, comme il l'a remarqué, ne rend pas plus compliquées les solutions analytiques des problèmes.

14. *Corps homogènes.* — Mais les expressions (15) où entrent

étant la densité, l'on remplace $S_x R\cos\alpha\cos^2\varepsilon$ par $\frac{\rho}{2} S r R\cos^2\alpha\cos^2\varepsilon$, et $S_y R\cos^3\alpha$ par $\frac{\rho}{2} S r R\cos^3\alpha\cos\varepsilon$ et ainsi des autres. (*Exercices*, t. III; p. 215-216. — Mémoire de M. Poisson, au 20ᵉ cahier du *Journal de l'École polytechnique*, art. 16; et autre mémoire du même géomètre, sur les corps cristallisés, au tome XVIII de l'Académie des sciences, p. 50. — Note sur la pression, aux *Comptes rendus* de l'Académie, 7 juillet 1845, t. XXI, p. 26).

En sorte que nous ne demandons, pour réduire à quinze les trente-six coefficients, que la possibilité de remplacer les ∂', ∂'', ∂''' par leurs moyennes ∂_x, ∂_y, ∂_z; c'est-à-dire une chose généralement admise au moins pour les corps à cristallisation confuse, les seuls qui soient employés comme matériaux dans les constructions.

[1] Voyez note de M. Cauchy aux *Comptes rendus*, 3 mars 1851, t. XXXII, p. 323 et 329. — On conçoit, en effet, que si le corps a une contexture telle que le ∂' (par exemple) pour certains couples de molécules, soit égal à sa moyenne ∂_x, plus une fonction périodique dépendant de la déformation générale, ou contenant aussi ∂_y, ∂_z, g_{yz}, etc., engagés de manière à ne pas disparaître en prenant la somme des produits $R\cos^3\alpha\,\partial'$, ou $R\cos^2\alpha\cos\beta.\,\partial''$, etc., cela changera les rapports mutuels des coefficients de ∂_x, ∂_y... g_{xy}; et cette non-disparution de la partie périodique pourrait arriver si $R\cos^3\alpha$, $R\cos^2\alpha\cos\beta$, etc., étaient eux-mêmes fonctions périodiques des coordonnées des molécules des couples; car le produit de deux fonctions périodiques de *même période* peut avoir une moyenne différente de zéro, quoique chaque facteur ait zéro pour moyenne. Il n'y a guère lieu de penser, toutefois, pour peu qu'on y réfléchisse, que les changements ainsi déterminés dans les rapports des coefficients A des composantes de pression pour certains corps à structure régulière puissent être considérables.

ces coefficients A, variables généralement d'un point M à l'autre avec ses coordonnées x, y, z, peuvent se simplifier aussi par des causes tenant à la contexture particulière du corps.

Ainsi (et c'est ce que nous supposerons toujours), ces coefficients peuvent être constants, *ou les mêmes en tous les points du corps, pour les mêmes directions* x, y, z.

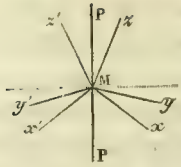
On dit alors que le corps est *homogène*[1] ou que l'*élasticité y est la même dans les mêmes directions en tous ses points*, car *l'élasticité*, prise comme susceptible de plus ou de moins, s'entend ordinairement de la résistance spécifique qu'oppose un corps à un petit déplacement moléculaire d'un sens donné, ou, ce qui revient au même, de la grandeur plus ou moins considérable de la pression qu'y développe une dilatation ou un glissement donné[2], en sorte qu'elle se mesure précisément au moyen de ces divers coefficients A, dont chacun exprime le rapport d'une composante de pression à une dilatation ou à un glissement capable de la produire.

L'homogénéité pourrait être considérée aussi *pour des directions qui varieraient avec les points*. Ainsi, je suppose qu'on ploie, de manière à en faire un tuyau circulaire, une lame plane jouissant de l'homogénéité *parallèle* qu'on vient de définir : les coefficients ne seront les mêmes qu'autant qu'on prendra les composantes de pression dans des directions faisant les mêmes angles tant avec l'axe du tuyau qu'avec son rayon, et l'homogénéité deviendra en quelque sorte *semi-polaire*.

15. *Corps où il y a un ou trois plans de symétrie, ou plans prin-*

[1] M. Cauchy, *Exercices*, t. IV, p. 2.

[2] Fresnel, *Mémoire sur la double réfraction*, du 23 novembre 1821, t. VII de l'Institut (nouv.), p. 99, 101, 103, 107; et Société philomathique, 1822, p. 65); Navier (*Résumé des leçons sur la résistance des matériaux*, etc.). Il conviendrait sans doute mieux d'employer le mot *roideur*, proposé accidentellement par Coriolis (*Calcul de l'effet des machines*), et par M. Poncelet (*Introduction à la mécanique industrielle*), si ce mot n'excluait pas, dans l'opinion vulgaire, l'idée d'extensibilité ou de flexibilité.



cipaux d'élasticité. — Il se trouve souvent dans le corps, et même à tous ses points M, un plan PMP par rapport auquel *les élasticités de diverses grandeurs* (article précédent) *sont symétriquement distribuées*, c'est-à-dire un plan tel que si Mx, My, Mz et Mx', My', Mz', sont deux systèmes d'axes rectangulaires placés symétriquement l'un à l'autre par rapport à ce plan, les six composantes de pression p_{xx}..... p_{xy}, suivant les premiers, s'expriment en fonction des dilatations et glissements δ_x..... g_{xy} dans leurs directions, avec les mêmes coefficients que celles homologues suivant les seconds, $p_{x'x'}$..... $p_{x'y'}$, s'expriment en fonctions des dilatations et glissements correspondants $\delta_{x'}$..... $g_{x'y'}$.

On peut facilement déterminer, sans recourir à une hypothèse sur la distribution des molécules de part et d'autre de ce plan, à quelle condition cette parité de dépendance aura lieu pour tous les couples de systèmes symétriques par rapport à lui. Il suffira, pour cela, qu'elle s'observe pour un des cas, celui par exemple où l'axe Mx est pris perpendiculaire au plan PMP; car les pressions, dilatations et glissements pour toute autre direction attribuée à Mx s'expriment, des deux côtés du plan, en multipliant par les mêmes cosinus (formules 5 de l'art. 6, et 14 de l'art. 11) les pressions, dilatations et glissements relatifs à ce cas de perpendicularité de Mx au plan.

Or, pour cette position particulière de l'axe Mx, l'axe My' se confondra avec My, et l'axe Mz' avec Mz, en sorte qu'on aura

$$p_{y'y'} = p_{yy},\quad p_{z'z'} = p_{zz},\quad p_{y'z'} = p_{yz}$$
$$\delta_{y'} = \delta_y,\quad \delta_{z'} = \delta_z,\quad g_{y'z'} = g_{yz};$$

et l'axe Mx' sera le prolongement de celui Mx de l'autre côté du plan, ce qui donnera, en vertu de la définition même des composantes de pression ou des glissements,

$$p_{y'x'} = -p_{yx},\quad p_{z'x'} = -p_{zx},\quad g_{y'x'} = -g_{yx},\quad g_{z'x'} = -g_{zx},$$

et l'on aura aussi

$$\delta_{x'} = \delta_x,\ \text{et}\ p_{x'x'} = p_{xx},$$

puisque $p_{x'x'}$, p_{xx} sont des sommes d'actions et de réactions égales, prises pour toutes les deux avec les mêmes signes.

Donc, pour que les équations (15) $p_{xx} = A_{xx}\partial_x + A_{yy}\partial_y + \text{etc.}$, donnent les valeurs des pressions en fonction des dilatations et glissements avec les mêmes coefficients A, lorsqu'on y met x', y', z' pour x, y, z, il faut et il suffit que ces équations restent les mêmes lorsqu'on change simplement les signes des quatre quantités p_{xy}, p_{zx}, g_{xy}, g_{zx}; ou, ce qui est la même chose, il faut et il suffit *que les coefficients de* g_{xy}, g_{xz} *soient nuls dans* p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} *et* p_{yz}, *et que les coefficients de* ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz} *soient nuls dans* p_{zx}, p_{xy}.

Ces expressions (15) des composantes de pression au point M (x, y, z) se réduisent donc, lorsqu'il passe en ce point, perpendiculairement aux x, *un plan de symétrie* (qui n'a besoin pour cela que de s'étendre très-peu autour de ce point), à la forme suivante (17). On a désigné par les mêmes lettres les coefficients qui doivent être faits égaux si l'on admet le principe de la réductibilité, à quinze, des trente-six coefficients du cas le plus général (article précédent), en sorte que les accents disparaîtront :

$$(17)\quad \begin{cases} p_{xx} = a\,\partial_x + f'\,\partial_y + e''\,\partial_z + h\,g_{yz} \\ p_{yy} = f''\,\partial_x + b\,\partial_y + d'\,\partial_z + k\,g_{yz} \\ p_{zz} = e'\,\partial_x + d''\,\partial_y + c\,\partial_z + l\,g_{yz} \\ p_{yz} = h'\,\partial_x + k'\,\partial_y + l'\,\partial_z + d\,g_{yz} \\ p_{zx} = e\,g_{zx} + h''\,g_{xy} \\ p_{xy} = h'''\,g_{zx} + f\,g_{yx}. \end{cases}$$

Si, outre le plan de symétrie perpendiculaire aux x, il y en a un perpendiculaire aux y au même point, ces équations devront, et par la même raison, rester les mêmes en changeant pareillement les signes de p_{yz} et g_{yz}, ce qui les réduira à :

$$(18)\quad \begin{cases} p_{xx} = a\,\partial_x + f'\,\partial_y + e''\,\partial_z \\ p_{yy} = f''\,\partial_x + b\,\partial_y + d'\,\partial_z \\ p_{zz} = e'\,\partial_x + d''\,\partial_y + c\,\partial_z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} p_{yz} = d\,g_{yz} \\ p_{zx} = e\,g_{zx} \\ p_{xy} = f\,g_{xy}, \end{cases}$$

et l'on voit que le plan perpendiculaire aux z sera, par cela seul, aussi un plan de symétrie, ou un plan principal *d'élasticité*[1].

16. *Choix des axes coordonnés de manière à réduire à un seul terme deux des composantes tangentielles de pression. — Coefficient d'élasticité de glissement.* — Les solutions que nous donnerons du problème de la torsion n'exigent pas qu'il y ait trois plans de symétrie, mais elles supposent que deux des composantes tangentielles de pression, celles p_{xy} et p_{xz} par exemple, *aient des expressions monômes* comme dans les dernières formules (18) relatives au cas de ces plans.

Il peut y avoir une foule de combinaisons des grandeurs des 36 coefficients A des dilatations et glissements $\delta_x \ldots\ldots g_{xy}$ (formules 15) qui remplissent cette condition, ou qui permettent, en changeant les axes coordonnés x, y, z en d'autres x', y', z', à l'aide des formules de tranformations (5) et (14), de réduire, par un choix convenable des nouveaux axes, les valeurs de $p_{x'y'}$ $p_{x'z'}$ à la forme

$$(19) \qquad p_{x'y'} = f''' g_{x'y'}, \quad p_{x'z'} = e''' g_{z'x'}.$$

Par exemple, s'il y a *seulement un plan principal d'élasticité* ou plan de symétrie, ou si (formules 17) les pressions p_{xy}, p_{xz} sont exprimées par

$$(20) \qquad p_{xy} = f g_{xy} + h''' g_{zx}, \quad p_{zx} = e g_{zx} + h'' g_{xy},$$

[1] M. Cauchy a établi ces formules (18) à la page 228 du tome III des *Exercices*, en supposant (voyez aussi à la page 198) que des molécules d'égale masse et de même nature soient distribuées symétriquement par rapport aux trois plans $y\mathrm{M}z$, $z\mathrm{M}x$, $x\mathrm{M}y$ dont il appelait, alors, *axes d'élasticité* les trois intersections $\mathrm{M}x$, $\mathrm{M}y$, $\mathrm{M}z$ (même volume, p. 235, et quatrième, p. 3 et 42). Il appelle maintenant ces plans *plans principaux d'élasticité*, en réservant le nom d'axes d'élasticité à ceux (art. 18 ci-après) autour desquels les élasticités sont égales en tous sens.

Nous avions indiqué à notre Mémoire une démonstration des mêmes formules (18), indépendante de toute hypothèse sur la distribution moléculaire : nous avons cru devoir y substituer ici celle bien plus simple qui a été donnée depuis par M. Cauchy aux *Comptes rendus*, t. XXXVIII, 20 février 1854, p. 329.

il suffira que l'on ait entre deux des coefficients l'égalité

$$h'' = h'''$$

pour rendre possible une pareille réduction.

En effet, supposons que l'axe x restant dans la même direction, perpendiculaire au plan principal, ceux y, z aient tourné d'un angle θ pour devenir y', z'. Si l'on projette, sur l'axe y', la composante Ma de pression sur le plan yz, composante qui a déjà p_{xy} et p_{xz} pour projections sur y et z, on a la première des deux expressions (21) suivantes, qu'on pouvait obtenir également en appliquant le premier théorème de l'article 10 aux composantes $p_{y'x}$, $p_{yx}\cos\theta$, $p_{zx}\sin\theta$, suivant x, des pressions supportées tant par une face $= 1$ perpendiculaire à y', que par ses deux projections $\cos\theta$, $\sin\theta$ sur des plans perpendiculaires à y et à z; ou simplement en faisant $\cos\alpha = 0$, $\cos\gamma = \sin\theta$ dans la première formule (13). La seconde expression (21) se déduit de la première en augmentant θ d'un angle droit :

$$(21)\qquad \begin{cases} p_{xy'} = p_{xy}\cos\theta + p_{xz}\sin\theta \\ p_{xz'} = -p_{xy}\sin\theta + p_{xz}\cos\theta. \end{cases}$$

Mettant dans ces expressions (21) celles (20) pour p_{xy}, p_{xz}, puis, pour les glissements anciens, les valeurs suivantes qui s'obtiennent comme celle (6) de l'art. 7 :

$$(22)\qquad g_{xy} = g_{xy'}\cos\theta - g_{xz'}\sin\theta, \quad g_{xz} = g_{xy'}\sin\theta + g_{xz'}\cos\theta,$$

l'on obtient en fonction des nouveaux, les expressions suivantes des composantes nouvelles :

$$(23)\qquad \begin{cases} p_{xy'} = \left(\frac{f+e}{2} + \frac{f-e}{2}\cos 2\theta + \frac{h''+h'''}{2}\sin 2\theta\right) g_{xy'} \\ \qquad + \left(\frac{h'''-h''}{2} - \frac{f-e}{2}\sin 2\theta + \frac{h''+h'''}{2}\cos 2\theta\right) g_{xz'}, \\ p_{xz'} = \left(\frac{f+e}{2} - \frac{f-e}{2}\cos 2\theta - \frac{h''+h'''}{2}\sin 2\theta\right) g_{xz'} \\ \qquad + \left(-\frac{h'''-h''}{2} - \frac{f-e}{2}\sin 2\theta + \frac{h''+h'''}{2}\cos 2\theta\right) g_{xy'}. \end{cases}$$

On les réduira chacune au premier terme si l'on a

$$h'' = h'''$$

(ou une égalité qui, probablement, a toujours lieu[1]), et si l'on prend pour l'angle arbitraire θ

$$\text{tang } 2\theta = \frac{2h''}{f - e}.$$

On obtient ainsi, comme l'on voit, les expressions monômes :

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_{xy'} = f''' g_{xy'}, \quad p_{xz'} = e''' g_{xz'} \\ \text{où l'on a} \left\{ \begin{array}{l} f''' = \dfrac{f+e}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(f-e)^2 + 4h''^2}, \\ e''' = \dfrac{f+e}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(f-e)^2 + 4h''^2}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous appellerons les coefficients d, e, f des trois dernières formules (18), ou e''', f''' de celles qu'on vient d'écrire, les *coefficients d'élasticité de glissement*. Ce sont les rapports des pressions tangentielles aux glissements de même sens qu'elles déterminent ou qui les engendrent, ou les résistances spécifiques à l'inclinaison mutuelle des lignes matérielles se coupant à angle droit dans le corps. Les coefficients d'élasticité plus connus, dits *d'extension*, sont des fonctions des coefficients des formules donnant p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, dont nous aurons à nous occuper aux articles 24, 26, 30, 36.

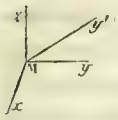
17. *Corps où il y a égale élasticité de glissement en tous les sens perpendiculaires à une même droite, ou suivant cette droite et dans tous les plans qui y passent.* — Lorsque dans un corps, les pressions tangentielles p_{xy}, p_{xz} ayant été ainsi réduites à un seul terme pour

[1] Elle n'a pas été contestée comme l'a été l'égalité f' = f d'après des expériences de M. Wertheim, dont les résultats nous paraissent explicables de plusieurs manières. Les coefficients h'' et h''' sont représentés l'un et l'autre (note de l'art. 12) par $S_x R \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$, si les ∂', ∂'', ∂''' n'introduisent pas (dernière note de l'art. 13), avec les ∂_x, ∂_y, ∂_z, des termes sensibles en g_{xz}, g_{xy}.

certains axes x, y, z, l'élasticité de glissement est la même pour les deux sens y et z dans les plans xy, xz, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$p_{xy} = \mathrm{e}\, g_{xy},\quad p_{xz} = \mathrm{e}\, g_{xz}, \tag{25}$$

ou le même coefficient pour toutes deux, il est facile *de voir qu'elle est, par cela seul, la même dans tous les autres sens y' perpendiculaires à x,* toujours dans des plans passant par x; *ou* (vu la réciprocité) *la même pour tous les glissements suivant x.*



En effet, en substituant (25) dans l'expression $p_{xy'} = p_{xy}\cos\theta + p_{xz}\sin\theta$ (21 de l'article précédent), on a

$$p_{xy'} = \mathrm{e}\,(g_{xy}\cos\theta + g_{xz}\sin\theta),$$

ou (art. 7, form. 6)

$$p_{xy'} = \mathrm{e}\, g_{xy'},$$

c'est-à-dire encore le même coefficient pour la direction y'.

Nous considérerons souvent ce cas dans la suite. Mais nous ferons observer qu'il est compatible avec des combinaisons du reste absolument quelconques des autres coefficients. Ainsi il n'exige nullement, pour avoir lieu, que l'*élasticité de dilatation* ou d'*extension* (dépendant des coefficients de $p_{y'y'}$ ou $p_{z'z'}$) soit aussi égale en tous les sens perpendiculaires à la même droite Mx, ni même que l'élasticité de glissement dans des plans perpendiculaires à x (et qui dépend des coefficients de $p_{y'z'}$) soit égale pour tous les systèmes de droites rectangulaires y', z' tracés dans ces plans. Il n'exige pas davantage que la composante p_{xx} suivant cette droite Mx dépende de la même manière de $\delta_{y'}$, $g_{xz'}$, etc., quels que soient les sens y' et z'.

18. *Corps où il y a un axe d'élasticité.* — Lorsque toutes les conditions dont on vient de parler sont remplies, ou *que tout est égal, autour de la droite* Mx, *dans les résistances à des déplacements donnés,* ou lorsque (pour mieux préciser) les six formules de composantes de pression en fonction des dilatations et glissements dans

leurs sens x, y, z *conservent les mêmes coefficients* en changeant y, z en deux autres droites quelconques y', z' rectangulaires entre elles et avec x, alors la droite x se trouve être complétement ce qu'on peut appeler *un axe d'élasticité*.

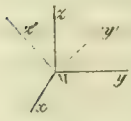
Il faut pour cela d'abord que les coefficients ne changent pas quand on change seulement, soit z, soit y, en son prolongement, c'est-à-dire que xy, xz doivent être deux plans de symétrie (art. 15), ou que les pressions doivent se réduire aux formes trinômes et monômes (18); et ces formules doivent, aussi, rester les mêmes en changeant l'un contre l'autre les axes y et z, en sorte que l'on doit avoir

$$(26) \qquad b = c,\ f = e,\ f' = e'',\ f'' = e',\ d'' = d'.$$

Mais il faut y joindre cette autre relation

$$(27) \qquad b = 2d + d'$$

que l'on démontre très-simplement en exprimant qu'on a



$p_{y'z'} = d.\ g_{y'z'}$ avec le même coefficient d que dans $p_{yz} = d.\ g_{yz}$ quand on prend pour My' la bissectrice de yMz, car il en résulte (formule (8), en faisant $\cos 2\theta = 0$, $\sin 2\theta = 1$, et formule générale (14) en faisant $\cos\alpha = \cos\alpha' = 0$, $\cos\theta = \cos\gamma = -\cos\theta' = \cos\gamma' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$) :

$$g_{y'z'} = \partial_z - \partial_y;\quad p_{y'z'} = \frac{p_{zz} - p_{yy}}{2};$$

or, d'après les expressions trinômes (18) des pressions, quand $f'' = e'$, $b = c$, $d' = d''$, l'on a $p_{zz} - p_{yy} = (b - d')(\partial_z - \partial_y)$; donc $p_{y'z'} = \frac{b-d'}{2}\, g_{y'z'}$, expression qui, pour se réduire à $d\, g_{y'z'}$, exige bien la relation (27) $b = 2d + d'$.

Il en résulte, lorsqu'il y a un axe d'élasticité parallèle aux x,

$$(28) \quad \begin{cases} p_{xx} = a\,\partial_x + e''\,\partial_y + e''\,\partial_z \\ p_{yy} = e'\,\partial_x + (2d + d')\,\partial_y + d'\,\partial_z \\ p_{zz} = e'\,\partial_x + d'\,\partial_y + (2d + d')\,\partial_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_{yz} = d\, g_{yz} \\ p_{zx} = e\, g_{zx} \\ p_{xy} = e\, g_{xy}. \end{cases}$$

On reconnaît facilement que tous les coefficients resteront les mêmes quel que soit l'angle $\mathcal{E}$ des nouveaux axes y', z' avec ceux y, z; car la même formule générale de transformation (14) de l'article 11 donne

$$p_{y'y'} = p_{yy}\cos^2\mathcal{E} + p_{zz}\sin^2\mathcal{E} + 2\,p_{yz}\sin\mathcal{E}\cos\mathcal{E},$$
$$p_{y'z'} = (p_{zz} - p_{yy})\sin\mathcal{E}\cos\mathcal{E} + p_{yz}(\cos^2\mathcal{E} - \sin^2\mathcal{E});$$

ou, en y substituant les expressions (28) de p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} qu'on vient d'écrire,

$$p_{y'y'} = e'\,\partial_x + d'(\partial_y + \partial_z) + 2\,d(\partial_y\cos^2\mathcal{E} + \partial_z\sin^2\mathcal{E} + g_{yz}\sin\mathcal{E}\cos\mathcal{E}),$$
$$p_{y'z'} = d[(\partial_z - \partial_y).\,2\sin\mathcal{E}\cos\mathcal{E} + g_{yz}(\cos^2\mathcal{E} - \sin^2\mathcal{E})].$$

D'un autre côté, les formules de transformation (5) nous ont déjà donné (formules 9 et 8 de l'art. 7) :

$$\partial_{y'} = \partial_y\cos^2\mathcal{E} + \partial_z\sin^2\mathcal{E} + g_{yz}\sin\mathcal{E}\cos\mathcal{E}; \quad \text{d'où } \partial_{y'} + \partial_{z'} = \partial_y + \partial_z,$$
$$g_{y'z'} = (\partial_z - \partial_y)\,2\sin\mathcal{E}\cos\mathcal{E} + g_{yz}(\cos^2\mathcal{E} - \sin^2\mathcal{E}).$$

Il en résulte :

$$p_{xx} = a\,\partial_x + e''(\partial_{y'} + \partial_{z'}); \; p_{y'y'} = e'\,\partial_x + d'(\partial_{y'} + \partial_{z'}) + 2\,d.\,\partial_{y'}; \; p_{y'z'} = d.\,g_{y'z'},$$

formules identiques à celles (28), sauf l'accentuation de y et z.

19. *Corps isotrope.* — S'il y a aussi un axe d'élasticité parallèle aux y, il faut, par les mêmes raisons, qu'on ait

$$e'' = e' = d', \quad a = 2\,d + d' = 2\,e + e'$$

et les formules sont :

$$(29)\quad \begin{cases} p_{xx} = (2\,e + e')\,\partial_x + e'\,\partial_y + e'\,\partial_z \\ p_{yy} = e'\,\partial_x + (2\,e + e')\,\partial_y + e'\,\partial_z \\ p_{zz} = e'\,\partial_x + e'\,\partial_y + (2\,e + e')\,\partial_z. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_{yz} = e\,g_{yz} \\ p_{zx} = e\,g_{zx} \\ p_{xy} = e\,g_{xy}. \end{cases}$$

On voit qu'il y a, alors, également un axe d'élasticité parallèle à la troisième coordonnée z.

Et comme, en changeant les axes y, z en deux autres y', z' sans changer celui x, les formules de composantes ont les même coefficients, on voit que My' est aussi un axe d'élasticité.

Et, par suite, il en sera de même de toute autre ligne My'' choisie comme on voudra dans le plan de Mx et de My'.

D'où il suit que, par rapport à trois axes rectangulaires dirigés d'une manière absolument quelconque, se croisant en M, les expressions des six composantes de pression auront les mêmes coefficients que les formules (29) qu'on vient d'écrire.

C'est ce qu'on exprime en disant, avec M. Lamé, que le corps a une élasticité constante ou égale en tous sens autour du point M, où, avec M. Cauchy, qu'il est *isotrope*.

Les coefficients se réduisent à deux, e et e', et se réduisent même à un seul si l'on a

$$e = e',$$

comme on l'a admis longtemps et comme il y a toujours des motifs de l'admettre; car les molécules, dans un corps isotrope, ne sauraient offrir ces arrangements périodiques qu'elles doivent présenter dans les cristaux, et qui, seuls, paraissent pouvoir empêcher d'adopter sans aucune restriction le principe (art. 13) de l'égalité de vingt et un des coefficients des formules générales à quelqu'un des quinze autres.

Mais l'isotropie paraît rare. Non-seulement les corps fibreux, tels que les bois, les fers étirés ou forgés, mais même les corps grenus ou vitreux, refroidis de la surface au centre après leur fusion, peuvent présenter des élasticités différentes en divers sens[1].

20. *Relations entre les pressions et les forces extérieures ou non*

[1] M. Regnault. *Relations des expériences sur la vapeur*, etc. première partie 1847, septième Mémoire, p. 432 (ou *Mémoires (nouv.) de l'Institut*, t. XXI). Les reproches que fait l'illustre physicien au mode d'établissement des formules ne s'adressent qu'aux premières recherches, où l'on supposait de prime-abord l'isotropie, que ses observations le portent à refuser à la plupart des corps.

On peut voir, à l'art. 86 ci-après, et au n° 234 de l'*Introduction à la mécanique industrielle* de M. Poncelet (1839), des citations de Savart dans le même sens.

réciproques. — Ayant déterminé dans les articles qui précèdent (10 à 19) les relations des pressions qui représentent les forces intérieures ou réciproques, tant entre elles qu'avec les déplacements, il nous reste à établir leurs relations avec les forces extérieures ou non réciproques sollicitant le corps.

Quelques-unes de ces forces agissent sur certains points particuliers, ou sur la surface. Nous nous en occuperons article 22.

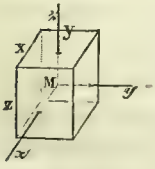
D'autres, telles que la pesanteur, s'exercent sur tous les points du corps. Si nous considérons seulement un élément très-petit de son volume, celles de ces forces qui y agissent doivent faire équilibre aux pressions supportées par ses diverses faces, puisque (art. 9) ces pressions remplacent les actions des molécules qui l'environnent de toute part. Soient donc

X, Y, Z les composantes, parallèlement aux axes des x, y, z, de ces forces extérieures ou non réciproques dont la matière du corps éprouve l'action, *par unité de son volume*, au point M dont les coordonnées sont x, y, z, et qui peuvent varier avec ces coordonnées;

x, y, z, les petites dimensions, parallèles aux mêmes coordonnées, de l'élément solide auquel nous supposons la forme d'un parallélipipède rectangle, *et dont le point* M *occupe le centre.*

p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{zx} = p_{xz}$, $p_{xy} = p_{yx}$, comme aux articles précédents, les six composantes de pression, parallèles aux coordonnées, sur l'unité superficielle de trois faces planes qui leur sont perpendiculaires et dont le centre de gravité est au même point M.

Les deux faces xy de cet élément, perpendiculaires aux z, éprouvent des pressions opposées, qui, décomposées dans le sens x par exemple, seront l'une un peu au-dessus, l'autre un peu au-dessous de celle supportée par une face parallèle passant en M, et qui est p_{zx} par unité superficielle. La différence sera le coefficient différentiel $\frac{d\,p_{zx}}{dz}$ multiplié par la distance z de ces



faces, et, aussi, par leur superficie x y : la résultante de ces deux composantes de pression dans le sens x sera ainsi :

$$\frac{d\,p_{xx}}{d\,z}\,x\,y\,z.$$

Comme on peut faire le même raisonnement pour les différences des pressions, décomposées dans le même sens x, qui ont lieu pour les quatre autres faces de l'élément prises deux à deux, l'on a pour l'équilibre de translation de l'élément, sollicité en sens opposé par la force Xxyz, une équation dont on peut diviser tous les termes par le volume xyz de l'élément. On obtient ainsi la première des trois équations suivantes; les deux autres s'obtiennent de même en exprimant les conditions de l'équilibre de translation dans les sens y et z :

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx}+\dfrac{dp_{yx}}{dy}+\dfrac{dp_{zx}}{dz}=X, \quad \dfrac{dp_{xy}}{dx}+\dfrac{dp_{yy}}{dy}+\dfrac{dp_{zy}}{dz}=Y, \\ \dfrac{dp_{xz}}{dx}+\dfrac{dp_{yz}}{dy}+\dfrac{dp_{zz}}{dz}=Z. \end{cases}$$

Ces trois équations (30), données pour la première fois par M. Cauchy[1], et qui sont une généralisation de celles de l'hydrostatique, établissent les relations cherchées entre les différentielles des pressions et les forces non réciproques agissant sur tous les points du corps, soit solide, soit fluide; forces au nombre desquelles on doit, s'il y a mouvement, mettre l'*inertie*, dont les composantes sont $-\rho\frac{d^2u}{dt^2}$, $-\rho\frac{d^2v}{dt^2}$, $-\rho\frac{d^2w}{dt^2}$ si t représente le temps, et ρ la masse de l'unité de volume.

21. *Équations différentielles indéfinies, ou applicables à tous les points du corps.* — Nous sommes actuellement en état de poser les équations du problème des déplacements des points des corps élastiques, déterminés par des forces données, ou du problème des forces capables de produire des déplacements donnés (art. 1).

[1] *Exercices de mathématiques*, t. II (1827), p. 111

Il n'y a, pour obtenir celles applicables à tous les points du corps ou de la portion de corps que l'on considère, qu'à mettre pour p_{xx}, p_{xy}..... dans les équations différentielles (30) de l'article précédent, leurs valeurs (art. 12 à 19) en fonction des dilatations et glissements δ_x, δ_y..... g_{xy}, après avoir substitué, à ces dernières quantités, leurs valeurs (art. 8) en fonction des déplacements u, v, w des points, estimés dans les sens des coordonnées x, y, z.

Comme nous ramènerons constamment, au moyen de translations et de rotations, les déplacements à être très-petits (art. 8) en ne nous occupant à la fois que de portions peu étendues des corps, nous pourrons prendre (même article, formules 10 et 11)

$$(10\text{ et }11)\quad \begin{cases} \delta_x = \dfrac{du}{dx},\ \delta_y = \dfrac{dv}{dy},\ \delta_z = \dfrac{dw}{dz}, \\ g_{yz} = \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy},\ g_{zx} = \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz},\ g_{xy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}. \end{cases}$$

Il en résultera, pour le cas, par exemple, de trois plans principaux d'élasticité (formules 18), les expressions

$$(31)\quad \begin{cases} p_{xx} = a\dfrac{du}{dx} + f'\dfrac{dv}{dy} + e''\dfrac{dw}{dz}, & p_{yz} = d\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right) \\ p_{yy} = f''\dfrac{du}{dx} + b\dfrac{dv}{dy} + d'\dfrac{dw}{dz}, & p_{zx} = e\left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right) \\ p_{zz} = e'\dfrac{du}{dx} + d''\dfrac{dv}{dy} + c\dfrac{dw}{dz}, & p_{xy} = f\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right) \end{cases}$$

qui, substituées dans les trois équations (30) $\dfrac{dp_{xx}}{dx} + \dfrac{dp_{xy}}{dy} + \dfrac{dp_{xz}}{dz} = X$, etc., donnent pour les *équations différentielles relatives à ce cas de trois plans principaux d'élasticité* qui se coupent suivant des parallèles à x, y, z :

$$(32)\quad \begin{cases} a\dfrac{d^2u}{dx^2} + f\dfrac{d^2u}{dy^2} + e\dfrac{d^2u}{dz^2} + (f+f')\dfrac{d^2v}{dxdy} + (e+e'')\dfrac{d^2w}{dzdx} = X \\ f\dfrac{d^2v}{dx^2} + b\dfrac{d^2v}{dy^2} + d\dfrac{d^2v}{dz^2} + (d+d')\dfrac{d^2w}{dydz} + (f+f'')\dfrac{d^2u}{dxdy} = Y \\ e\dfrac{d^2w}{dx^2} + d\dfrac{d^2w}{dy^2} + c\dfrac{d^2w}{dz^2} + (e+e')\dfrac{d^2u}{dzdx} + (d+d'')\dfrac{d^2v}{dydz} = Z. \end{cases}$$

Si, sans qu'il y ait trois plans principaux, ni même peut-être un seul, on a pu réduire, par un changement d'axes coordonnés, les composantes p_{xy}, p_{xz} à la forme monôme (19) ou (24), (art. 16), on a, pour les trois composantes de la pression sur le plan perpendiculaire aux x (la première ayant sa forme la plus générale) :

$$(33)\quad \begin{cases} p_{xx} = a\dfrac{du}{dx} + f'\dfrac{dv}{dy} + e''\dfrac{dw}{dz} + h\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right) + i\left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right) + j\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right), \\ p_{xy} = f\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right), \qquad p_{xz} = e\left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right). \end{cases}$$

D'où, en substituant dans la première équation $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = X$ de l'article précédent :

$$(34)\quad \begin{cases} a\dfrac{d^2u}{dx^2} + f\dfrac{d^2u}{dy^2} + e\dfrac{d^2u}{dz^2} + j\dfrac{d^2u}{dxdy} + i\dfrac{d^2u}{dxdz} + \\ + (f + f')\dfrac{d^2v}{dxdy} + (e + e'')\dfrac{d^2w}{dxdz} + h\left(\dfrac{d^2v}{dxdz} + \dfrac{d^2w}{dxdy}\right) + j\dfrac{d^2v}{dx^2} + i\dfrac{d^2w}{dx^2} = X. \end{cases}$$

C'est la seule équation dont nous aurons besoin pour les problèmes sur la torsion, comme on verra.

Comme nous négligerons la pesanteur, et que nous ne nous occuperons que de problèmes d'équilibre où l'*inertie* n'est pas en jeu, nous ferons habituellement, dans ces équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

22. *Équations définies, ou à satisfaire pour certains points seulement.* — Mais il y a en outre, avons-nous dit (art. 20), des forces agissant sur certains points en particulier, qui sont ordinairement tous ceux de la surface extérieure des corps, ou des faces de séparation des portions de corps que l'on considère successivement.

Soient Π ces forces, par unité superficielle des divers éléments de surface où elles agissent ;

n, les directions des normales aux mêmes éléments, directions généralement variables d'un point à l'autre, ainsi que les intensités Π.

Les forces Π doivent faire équilibre aux pressions intérieures

prises en sens opposé, et peuvent être regardées elles-mêmes comme des *pressions extérieures :* on aura donc, d'après le théorème (art. 10) des projections de plans de pression, ou conformément aux trois équations (13) de l'art. 11 :

$$(35)\quad \begin{cases} p_{xx}\cos\widehat{nx} + p_{xy}\cos\widehat{ny} + p_{xz}\cos\widehat{nz} = \Pi\cos\widehat{\Pi x} \\ p_{xy}\cos\widehat{nx} + p_{yy}\cos\widehat{ny} + p_{yz}\cos\widehat{nz} = \Pi\cos\widehat{\Pi y} \\ p_{zx}\cos\widehat{nx} + p_{yz}\cos\widehat{ny} + p_{zz}\cos\widehat{nz} = \Pi\cos\widehat{\Pi z}. \end{cases}$$

Ce sont les équations définies, dans lesquelles on mettra pour les composantes $p_{xx}\ldots p_{xy}$ leur valeurs (15) à (29) en fonction des dilatations et glissements, et, pour ces quantités, leurs valeurs (10) et (11) en fonction des déplacements ramenés, comme nous avons dit, à être très-petits.

Les forces ou pressions Π, souvent données en tous les points où elles agissent, seront quelquefois négligeables pour une partie des surfaces extérieures, comme il arrive ordinairement lorsqu'elles se réduisent à la pression atmosphérique, que l'on défalque tacitement, d'ailleurs, ainsi que ses effets (voy. art. 30) : on fera alors, dans les équations relatives à ces portions,

$$\Pi = 0.$$

Mais quelquefois aussi, ces forces, provenant de l'action mutuelle de deux corps pressant l'un contre l'autre, seront inconnues. On les laissera alors sous forme indéterminée; et comme elles entreront dans des équations relatives à chacun des deux corps, dont les points en contact éprouveront des déplacements égaux, l'on aura, en définitive, le nombre d'équations nécessaire pour déterminer toutes les inconnues.

23. *Usage de ces équations.—Problèmes directs, problèmes inverses, problèmes mixtes.* — Si les déplacements sont donnés partout en fonction des coordonnées, ces équations tant indéfinies (art. 21) que définies (art. 22), qui sont celles même dont nous avons parlé au commencement de ce mémoire, fourniront évidemment, par

de simples différentiations, les valeurs des forces extérieures X, Y, Z, Π, ainsi que des pressions ou forces intérieures, comme nous avons dit art. 1^er^.

Si au contraire, comme il arrive plus souvent, les forces sont ce qui est donné, et les déplacements sont ce qu'on cherche, il faudra intégrer les équations indéfinies ou générales (art. 21), en déterminant les constantes ou fonctions arbitraires de manière à satisfaire aux conditions particulières exprimées par les équations définies (art. 22).

Enfin, dans le cas mixte où l'on se donnera *a priori*, avec une partie des forces, une partie des déplacements ou de leurs relations mutuelles (art. 2), ces valeurs ou ces relations serviront à simplifier les équations différentielles, et, en réduisant la part laissée à l'intégration, les rendront plus facilement résolubles, comme on verra aux chapitres suivants.

24. *Conditions de résistance à la rupture éloignée ou à une altération progressive et dangereuse de la contexture des corps.* — L'usage principal que l'on fait du calcul des déplacements produits par des forces dans les premiers instants qui suivent leur application à un corps solide, est la détermination de la résistance de sa matière à l'action continuée de ces forces.

Si les écartements ou rapprochements moléculaires qui en résultent sont faibles, ils s'arrêtent, ou immédiatement, ou après avoir, dans certains cas et au bout d'un certain temps, produit quelques déformations permanentes, peu considérables et qui ne font qu'*écrouir* le corps ou rendre plus stable l'arrangement de ses parties.

S'ils sont forts, ils augmentent progressivement, de manière à amener la rupture du corps, ou une telle altération de sa contexture et de sa forme, qu'il devient incapable de remplir l'objet auquel on l'avait destiné.

Pour prévenir ces effets, il faut imposer la condition que nulle part la dilatation linéaire, positive ou négative (art. 4), n'excède

une certaine limite, qui peut varier avec la direction dans un même corps dont la contexture n'est pas égale en tous sens.

Et pour être assuré qu'ils ne se produiront pas, même à la longue, sous l'action continuée des forces et avec le concours de causes accidentelles de diverses sortes, inévitables et que le calcul ne peut embrasser, l'observation prouve que la limite à adopter doit être fort resserrée, et telle que la partie permanente des dilatations, s'il y en a une, reste très-faible; ensorte que les formules ci-dessus peuvent s'appliquer très-approximativement à la détermination de toutes les dilatations qui sont inférieures ou au plus égales à cette limite.

Soient dans un corps, pour une direction donnée:

δ la limite dont il s'agit, pour les dilatations positives;

δ' celle relative aux contractions, ou aux dilatations négatives, prises positivement;

ϑ la dilatation effective, due aux forces appliquées.

La double condition de non-rupture, ou de stabilité de la cohésion du corps, sera qu'en tous les points et pour toutes les directions l'on ait

$$\delta = \text{ou} > \vartheta, \qquad \delta' = \text{ou} > -\vartheta,$$

ou que:

$$(36) \qquad 1 = \text{ou} > \text{maximum } \frac{\vartheta}{\delta}; \qquad 1 = \text{ou} > \text{maximum } \frac{-\vartheta}{\delta'}.$$

L'on a coutume de donner à la dilatation limite une désignation venant de ce que les géomètres, avant que Mariotte eût fait observer « que c'est le degré d'extension qui fait rompre les corps »[1], exprimaient leur résistance à la rupture en limitant, au lieu des dilatations, les efforts supportés intérieurement par leurs parties, ce qui ne donne pas toujours le même résultat. L'on fait donc

$$(37) \qquad \delta = \frac{R}{E},$$

E étant ce qu'on appelle le *coefficient d'élasticité d'extension*, relatif à la direction que l'on considère, c'est-à-dire (art. 30 ci-après) le

[1] *Traité du mouvement des eaux*, sixième et treizième alinéa du *second discours*.

rapport entre des forces supposées appliquées longitudinalement à un petit prisme extrait du corps dans cette direction, pour l'unité superficielle de sa section droite, et les dilatations très-petites qu'elles lui feraient éprouver.

Et cette sorte de notation est sans inconvénient si l'on n'oublie pas que R *représente simplement le produit* $E\delta$, ou la force capable de donner (aussi par unité superficielle), à ce même petit prisme supposé isolé, la dilatation limite δ relative à sa situation dans le corps, mais qu'il ne représente que *quelquefois* et *non toujours* l'effort intérieur ou *la pression supportée normalement par sa section transversale* pendant qu'il fait partie du corps. Nous verrons même que les constantes telles que E, qui sont fonctions des coefficients des formules de pression dont on déduit les dilatations effectives ϑ, disparaissent assez souvent des équations de résistance à la rupture, qui contiennent ainsi seulement les constantes telles que R, en sorte que la désignation de la limite δ par $\frac{R}{E}$ simplifie ordinairement les expressions finales.

La condition de non-rupture est, ainsi

$$(38)\quad R = \text{ou} > E\vartheta \text{ partout et en tous sens; ou } 1 = \text{ou} > \text{maximum } \frac{E}{R}\vartheta,$$

en ne nous occupant, comme nous ferons désormais, que de celle relative aux dilatations positives, parce que celle relative aux contractions se traite de la même manière.

Si α, $\mathcal{E}$, γ sont les angles faits avec les x, y, z par la direction suivant laquelle la dilatation est ϑ, la grandeur de celle-ci s'obtient en fonction des trois dilatations et des trois glissements dans les sens x, y, z, supposés calculés, par la formule (5) de l'art. (6) :

$$(39)\quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta = \vartheta_x \cos^2\alpha + \vartheta_y \cos^2\mathcal{E} + \vartheta_z \cos^2\gamma + \\ \quad + g_{yz} \cos\mathcal{E} \cos\gamma + g_{zx} \cos\gamma \cos\alpha + g_{xy} \cos\alpha \cos\mathcal{E}, \end{array} \right.$$

qui prouve que les dilatations ϑ se distribuent autour d'un point de la même manière que les divers moments d'inertie d'un corps solide, c'est-à-dire que les inverses $\frac{1}{\sqrt{\pm\vartheta}}$ de leurs racines carrées,

portées sur des lignes menées de ce point dans leurs directions, sont, suivant la remarque de M. Cauchy[1], *les rayons vecteurs d'un même ellipsoïde,* qui se change en deux hyperboloïdes conjugués lorsque les valeurs de ϑ sont les unes positives, les autres négatives.

Faute de connaître la loi qui lie les grandeurs des dilatations limites δ en divers sens, à celles

$$\delta_x,\ \delta_y,\ \delta_z,$$

relatives aux sens x, y, z, et qui peuvent avoir été seules déterminées expérimentalement, nous pouvons approximativement leur supposer ce même mode de distribution simple, qui ne saurait s'écarter beaucoup de la réalité, surtout lorsque le corps a trois plans principaux d'élasticité, de part et d'autre desquels (art. 15) sa contexture est symétrique. Nous prendrons, par conséquent, les x, y, z étant parallèles aux trois intersections de ces plans de symétrie dont on supposera toujours l'existence,

$$\delta = \delta_x \cos^2\alpha + \delta_y \cos^2\mathcal{C} + \delta_z \cos^2\gamma. \tag{40}$$

La condition de non-rupture $\delta = $ ou $> \vartheta$ sera ainsi, géométriquement, que l'ellipsoïde des $\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}$ soit compris tout entier dans l'intérieur de l'ellipsoïde des $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$.

Analytiquement, elle sera que la valeur de $\frac{\vartheta}{\delta}$ qui est la plus grande, et pour laquelle on a, en différentiant,

$$d\frac{\vartheta}{\delta} = 0,$$

soit au us égale à l'unité.

Si dans cette équation, qui revient à

$$\delta.\, d\,\vartheta - \vartheta.\, d\,\delta = 0, \tag{41}$$

nous mettons pour ϑ et δ leurs valeurs (39) et (40), et si nous effectuons les différentiations par rapport à $\cos\alpha$, $\cos\mathcal{C}$, $\cos\gamma$ regardés comme trois variables qu'on peut représenter par trois

[1] *Exercices*, t. II, 1827, p. 68.

lettres a, b, c, nous pouvons éliminer une de leurs trois différentielles, db par exemple, au moyen de la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, qui donne $db = -\frac{a\,da + c\,dc}{b}$. Comme les polynômes affectés de chacune des deux différentielles restantes da, dc devront être égaux séparément à zéro, nous aurons deux équations qui reviennent à l'égalité de ces trois fractions :

$$(42)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(2\,\partial_x \cos\alpha + g_{xy}\cos\mathcal{C} + g_{zx}\cos\gamma)\,\delta - 2\,\delta_x\,\partial\cos\alpha}{\cos\alpha} = \\ = \dfrac{(g_{xy}\cos\alpha + 2\,\partial_y\cos\mathcal{C} + g_{yz}\cos\gamma)\,\delta - 2\,\delta_y\,\partial\cos\mathcal{C}}{\cos\mathcal{C}} = \\ = \dfrac{(g_{zx}\cos\alpha + g_{yz}\cos\mathcal{C} + 2\,\partial_z\cos\gamma)\,\delta - 2\,\delta_z\,\partial\cos\gamma}{\cos\gamma}. \end{array} \right.$$

Suivant la remarque faite par M. Cauchy pour le cas où il s'agit d'avoir seulement le maximum de ∂, l'on composera une quatrième fraction de même valeur en prenant pour son numérateur la somme de leurs trois numérateurs, et pour son dénominateur la somme de leurs trois dénominateurs, après les avoir multipliées haut et bas, la première par $\cos\alpha$, la seconde par $\cos\mathcal{C}$, la troisième par $\cos\gamma$. Or il en résulte 1 pour dénominateur, et, d'après (39) et (40), $2\,\partial.\,\delta - 2\,\delta.\,\partial = 0$ pour numérateur. Chacune de nos trois fractions est donc égale à zéro, ce qui donne ces trois équations

$$(43)\quad \left\{ \begin{array}{l} 2\left(\dfrac{\partial}{\delta}\,\delta_x - \partial_x\right)\cos\alpha = g_{xy}\cos\mathcal{C} + g_{zx}\cos\gamma, \\ 2\left(\dfrac{\partial}{\delta}\,\delta_y - \partial_y\right)\cos\mathcal{C} = g_{yz}\cos\gamma + g_{xy}\cos\alpha, \\ 2\left(\dfrac{\partial}{\delta}\,\delta_z - \partial_z\right)\cos\gamma = g_{zx}\cos\alpha + g_{yz}\cos\mathcal{C}. \end{array} \right.$$

On en élimine les cosinus en les multipliant l'une par l'autre et remplaçant, ensuite, dans les termes tels que $g^2_{yz}\cos\mathcal{C}\cos\gamma$ $(g_{xy}\cos\mathcal{C} + g_{zx}\cos\gamma)$, où un glissement entre au carré, la parenthèse qui n'est autre chose qu'un des trois seconds membres

par le premier membre correspondant, ce qui rend tous les termes divisibles par $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Il en résulte :

$$(44)\quad 4\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_x-\partial_x\right)\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_y-\partial_y\right)\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_z-\partial_z\right)-\gamma^2_{yz}\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_x-\partial_x\right)$$
$$-\gamma^2_{zx}\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_y-\partial_y\right)-\gamma^2_{xy}\left(\frac{\partial}{\delta}\delta_z-\partial_z\right)-\gamma_{yz}\gamma_{zx}\gamma_{xy}=0,$$

équation du troisième degré en $\frac{\partial}{\delta}$ qui revient, lorsque $\delta=\delta_x=\delta_y=\delta_z$, à celle en ∂ donnée par M. Cauchy pour trouver les trois dilatations principales, ou à celle plus connue au moyen de laquelle on détermine les trois axes d'un ellipsoïde dont l'équation est donnée par rapport à des plans rectangulaires quelconques [1].

On lui donne une autre forme en remarquant que, dans le cas où les dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z sont nulles ainsi que deux glissements γ_{yz} et γ_{zx}, elle se réduit à

$$\frac{\partial}{\delta}=\frac{\gamma_{xy}}{2\sqrt{\delta_x\,\delta_y}},$$

d'où l'on voit que, comme δ est la limite supérieure de la dilatation ∂, $2\sqrt{\delta_x\,\delta_y}$ est la limite supérieure du glissement γ_{xy}, qui ne peut la dépasser sans mettre la cohésion en péril. Cette limite, ainsi que celles analogues de γ_{yz}, γ_{zx}, aurait pu être déduite d'expériences directes de rupture par glissement, de même que les limites δ_x, δ_y, δ_z sont supposées déduites d'expériences de rupture par dilatation. Si nous représentons de la manière suivante ces trois nouvelles limites

$$(45)\quad 2\sqrt{\delta_y\,\delta_z}=\Gamma_{yz},\ 2\sqrt{\delta_z\,\delta_x}=\Gamma_{zx},\ 2\sqrt{\delta_x\,\delta_y}=\Gamma_{xy},$$

l'équation (44) divisée par $\delta_x\,\delta_y\,\delta_z$ s'écrit :

$$(46)\quad \left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_x}{\delta_x}\right)\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_y}{\delta_y}\right)\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_z}{\delta_z}\right)-\frac{\gamma^2_{yz}}{\Gamma^2_{yz}}\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_x}{\delta_x}\right)-\frac{\gamma^2_{zx}}{\Gamma^2_{zx}}\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_y}{\delta_y}\right)$$
$$-\frac{\gamma^2_{xy}}{\Gamma^2_{xy}}\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_z}{\delta_z}\right)-2\frac{\gamma_{yz}\gamma_{zx}\gamma_{xy}}{\Gamma_{yz}\Gamma_{zx}\Gamma_{xy}}=0.$$

[1] *Exercices*, t. II, p. 63; et t. III, p. 5.

On peut, au même titre qu'on a adopté l'expression (40) de δ, étendre l'usage de cette équation au cas où, par suite des expériences de glissements ainsi que des inductions tirées de la considération d'édifices ou de machines dont les pièces sont exposées aux efforts qui en produisent, les constructeurs auraient adopté, pour les limites Γ_{yz}, Γ_{zx}, Γ_{xy}, des valeurs un peu différentes de celles $2\sqrt{\delta_y \delta_z}$, $2\sqrt{\delta_z \delta_x}$, $2\sqrt{\delta_x \delta_y}$ données par les relations (45); relations dont on pourra, du reste, se servir toujours pour déterminer quelques-unes des six constantes δ et Γ au moyen des autres, si toutes n'ont pas été l'objet d'expériences spéciales.

25. *Établissement de cette condition de non-rupture.* — *Points dangereux.* — En résolvant l'équation (46) par rapport à $\frac{\partial}{\delta}$ l'on obtient le maximum de cette fraction pour les diverses droites qui se croisent en tous sens en un seul et même point. Cherchant, ensuite, *parmi les divers points du corps,* celui où ce maximum relatif se trouve avoir la valeur la plus considérable, *l'on obtiendra, en l'égalant à l'unité, la condition nécessaire et justement suffisante de la résistance du corps à la rupture* sous l'action des forces produisant les dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z et les glissements g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}.

Elle servira, ou à modérer les forces, de manière que le corps supposé donné puisse leur résister, ou à donner au corps les dimensions justement nécessaires pour ne pas céder sous l'action des forces si ce sont elles qui sont données.

Le point dont nous parlons, où l'on a le maximum maximorum du rapport $\frac{\partial}{\delta}$ entre la dilatation effective et la limite relative à sa direction, est le point appelé *dangereux* par M. Poncelet, parce que c'est celui où la limite imposée δ risque le plus d'être dépassée et où la rupture est le plus imminente.

Ce point dangereux est simplement celui de plus grande dilatation lorsque le corps est isotrope (art. 19) ou d'égale contexture en tous sens; ou lorsque, seulement, le rapport (37) $\frac{R}{E} = \delta$

entre les deux quantités R et E, dont la première mesure le degré de cohésion des petits prismes extraits du corps, et, la seconde, leur degré de roideur, est constant : ce qui doit avoir lieu à peu près dans beaucoup de cas, si l'on considère qu'en général les matières les plus *roides*, ou qui s'étendent le moins sous des efforts donnés, sont aussi celles qu'il est le plus difficile de disjoindre.

Souvent il y a plusieurs *points dangereux*, ou plusieurs points pour lesquels la plus grande valeur de $\frac{\partial}{\vartheta}$ est la même, d'après la manière dont les forces sont appliquées. Lorsque, dans un corps de forme allongée, il y a un pareil point à chacune de ses sections transversales, ce corps est dit d'*égale résistance :* tels sont les prismes lorsqu'ils sont simplement étendus ou tordus par des forces appliquées aux extrémités.

26. *Mêmes conditions lorsque les glissements sont nuls ou négligeables dans trois directions x, y, z.* — Alors, en faisant $g_{yz} = 0$, $g_{zx} = 0$, $g_{xy} = 0$ dans l'équation (46), elle se réduit à son premier terme égalé à zéro, c'est-à-dire à

$$\frac{\partial}{\vartheta} = \frac{\partial_x}{\delta_x}, \text{ ou } \frac{\partial}{\vartheta} = \frac{\partial_y}{\delta_y}, \text{ ou } \frac{\partial}{\vartheta} = \frac{\partial_z}{\delta_z}.$$

Une seule de ces solutions convient, savoir la plus grande des trois.

Si c'est, par exemple, $\frac{\partial_x}{\delta_x}$, la condition de non-rupture est simplement

$$(47) \qquad 1 = \text{ou} > \text{maximum de } \frac{\partial_x}{\delta_x}; \text{ ou } R_x = \text{ou} > E\,\partial_x,$$

en appelant R_x, E_x les valeurs de R et E relatives au sens x.

27. *Mêmes conditions, lorsqu'on peut au contraire ne considérer que des glissements.* — Nous rencontrerons souvent dans ce mémoire, qui a la torsion des prismes pour objet principal, des cas où l'on a

$$(48) \qquad \partial_x = 0, \ \partial_y = 0, \ \partial_z = 0, \ g_{yz} = 0,$$

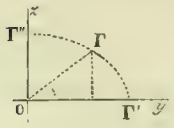
c'est-à-dire où il n'y a aucune dilatation dans le sens x, *ni dans les divers sens qui lui sont perpendiculaires* (car l'expression (9) $\delta_{y'} = \delta_y \cos^2\theta + \delta_z \sin^2\theta + g_{yz} \sin\theta \cos\theta$ de l'art. 7 prouve qu'alors $\delta_{y'}$ est nul, quel que soit l'angle θ de y' avec y).

Alors l'équation (46) se réduit à

$$\frac{\partial}{\delta} = \sqrt{\frac{g^2_{xy}}{\Gamma^2_{xy}} + \frac{g^2_{xz}}{\Gamma^2_{xz}}}, \tag{49}$$

et la condition de résistance à la rupture, à remplir pour tous les points, est que

$$1 = \text{ou} > \frac{g^2_{xy}}{\Gamma^2_{xy}} + \frac{g^2_{xz}}{\Gamma^2_{xz}}, \tag{50}$$



ou qu'en construisant une ellipse dont les demi-axes soient $O\Gamma' = \Gamma_{xy}$, $O\Gamma'' = \Gamma_{xz}$ dans les sens y et z, le glissement principal $g_x = \sqrt{g^2_{xy} + g^2_{xz}}$ n'excède, nulle part, son rayon vecteur $O\Gamma$ de même sens.

Le point dangereux est celui où $\frac{g^2_{xy}}{\Gamma^2_{xy}} + \frac{g^2_{xz}}{\Gamma^2_{xz}}$ est le plus grand. C'est celui où, simplement, le glissement principal est le plus considérable lorsque $\Gamma_{xy} = \Gamma_{xz}$ ou lorsque $2\sqrt{\delta_x \delta_y} = 2\sqrt{\delta_x \delta_z}$, d'où $\delta_y = \delta_z$, c'est-à-dire lorsque (d'après l'expression (40) $\delta = \delta_x \cos^2\alpha + \delta_y \cos^2\theta + \delta_z \cos^2\gamma$) les limites de dilatation sont égales dans toutes les directions faisant le même angle avec les z, ainsi que nous le supposerons aux chapitres VI, VII, VIII, IX.

De même que les limites des dilatations s'expriment (art. 24) par une fraction $\frac{R}{E}$, l'on a coutume d'exprimer ainsi les limites des glissements

$$\Gamma_{xy} = \frac{T'}{G'}, \quad \Gamma_{xz} = \frac{T''}{G''}, \tag{51}$$

G' et G'' n'étant autre chose que les coefficients d'élasticité de glissement désignés ci-dessus par f et e, ou f''' et e''' (formules 18 et 24 des art. 15 et 16), qui, multipliés par les glissements, donnent

les efforts tangentiels capables de les produire, rapportés à l'unité superficielle des faces où ils s'exercent;

Et T′, T″ n'étant autre chose que les grandeurs de ces efforts ou composantes de pression $p_{xy} = G'\gamma_{xy}$, $p_{xz} = G''\gamma_{xz}$ lorsque les glissements atteignent leurs limites Γ_{xy}, Γ_{xz}.

En sorte que la condition de *non-rupture par glissement* est exprimée par

$$(52) \qquad 1 = \text{ou} > \left(\frac{G'\gamma_{xy}}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G''\gamma_{xz}}{T''}\right)^2.$$

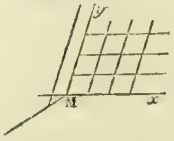
Elle se réduit, lorsque les droites parallèles aux x sont des *axes de symétrie,* autour desquels la contexture du corps est la même tant sous le rapport de l'élasticité que sous le rapport de la cohésion, ou, seulement, lorsque les dilatations-limites sont égales autour de ces droites, en appelant alors $\frac{T}{G}$ la valeur commune $\frac{T'}{G'} = \frac{T''}{G''}$, à

$$(53) \qquad T = \text{ou} > \text{maximum de } G\gamma_x.$$

28. *Manières diverses dont s'opèrent les ruptures.* — Il ne faut pas chercher, dans les équations des articles précédents, des moyens de prévoir ou d'expliquer ce qui peut se passer dans les ruptures, à partir de l'instant où elles commencent à se déclarer. Dès cet instant, les tensions changent par tout le corps; le point dangereux occupe une suite de positions nouvelles où la disjonction se fait *successivement;* et, ainsi que M. Vicat l'a remarqué pour l'*arrachement* d'une tige de fer à tête, fortement scellée dans de la pierre, la surface de rupture peut être toute différente de celle suivant laquelle la somme des forces nécessaires pour l'opérer simultanément était la moindre. C'est ainsi que, lorsqu'une rupture par torsion est commencée sur un point, elle s'achève, pour certaines substances grenues peu cohérentes sur lesquelles a opéré le même illustre ingénieur, par une sorte de flexion autour de lignes très-obliques aux arêtes des prismes. La théorie

précédente a pour but de prévenir *le commencement de la rupture*, et d'en écarter les chances, même éloignées : l'on ne peut rien inférer contre son exactitude, de ce qu'elle n'en calcule pas les circonstances et les phases, ce qui serait aussi difficile qu'inutile à son objet.

Observons aussi que puisque tout glissement, suivant x, dans



un plan passant par x et par une ligne y qui lui est perpendiculaire, est accompagné (art. 4), d'un glissement égal, suivant y et dans le même plan, la rupture qu'il amène peut s'opérer, ou parallèlement à la première ou parallèlement à la seconde de ces deux lignes. Bien que le glissement ait et conserve, jusqu'à la fin, la même grandeur suivant celle-là que suivant celle-ci, il peut y avoir une différence considérable entre la force capable de produire la *rupture* ou la disjonction, *par glissement l'une sur l'autre*, des lignes matérielles parallèles à y, et la force nécessaire pour produire la disjonction, par glissement l'une sur l'autre, des lignes matérielles parallèles à x.

Qu'arrivera-t-il donc? La rupture, si elle a lieu par glissement, se fera dans celui des deux sens corrélatifs où elle est plus facile. Ainsi des prismes de bois ou de fer fibreux dont les parties sont, par une torsion ou autrement, sollicitées à glisser les unes sur les autres, cèdent pour l'ordinaire *en se fendant longitudinalement*, ou par glissement des fibres l'une devant l'autre, et non par la disjonction transversale des sections, qui exigerait une force bien plus considérable.

CHAPITRE III.

APPLICATION AU CAS SIMPLE DE L'EXTENSION OU DE LA CONTRACTION D'UN PRISME À BASE QUELCONQUE.

29. *Problème proposé. Solution préalable d'un autre problème dont il est l'inverse.* — Supposons un prisme ou cylindre à base quelconque, soumis latéralement à la seule pression normale et cons-

tante — Q (comme serait la pression de l'atmosphère ou de tout autre fluide);

Tandis que ses bases éprouvent par unité superficielle, outre la même action — Q, *une traction* aussi *constante et normale* P, par unité superficielle.

En sorte que comme les *pressions* définies au chapitre précédent sont censées agir toujours dans le sens positif des droites élevées perpendiculairement aux faces sur lesquelles elles s'exercent, ou *à la manière des tractions*, les faces latérales doivent être supposées éprouver une pression normale — Q, et les bases une pression normale P — Q, par unité superficielle.

Il s'agit de déterminer les déplacements de ses points.

Quoique cette question soit à peu près la plus simple de celles de ce genre, il est bien difficile de la résoudre en attaquant les équations différentielles indéfinies (32) et définies (35) particularisées, même lorsqu'on suppose la pression latérale $Q = 0$, la base rectangulaire et les élasticités égales en tous sens; et cela paraît tout à fait impossible en laissant au contour de la base une forme indéterminée.

Mais nous connaîtrons bientôt quelle est la solution de ce problème de déplacements dus à des forces données en résolvant d'abord un problème de forces capables de déplacements donnés (art. 1[er]).

Et, ici, nous n'avons pas même besoin de prendre une marche *mixte* (art. 2) ou de nous donner à la fois des déplacements et des forces.

Donnons-nous donc des déplacements tels que les dilatations, dans chacun des trois sens x, y, z, intersections de trois plans principaux d'élasticité (art. 15), *soient les mêmes par tout le prisme*, et représentées *par les trois constantes* δ_x, δ_y, δ_z, la direction x étant parallèle aux arêtes du prisme;

Et que les glissements g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} soient nuls partout.

Les formules trinômes et monômes (18) de l'article 15, donnant les expressions générales des composantes des pressions en

fonction des dilatations et glissements, pour ce cas de trois plans principaux, nous apprennent qu'alors :

1° Les composantes normales p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} sont constantes;

2° Et les composantes tangentielles p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} sont nulles, aussi par tout le prisme.

Les données du problème de recherche *directe* des forces, que nous posons à la place du problème inverse qui est proposé, n'ont, ainsi, rien d'incompatible entre elles; car, outre qu'il existe évidemment des valeurs de u, v, w répondant aux dilatations et glissements que nous nous donnons, on voit que les équations indéfinies, prises par exemple sous leur forme (30), article 20, $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = 0$, etc. sont satisfaites.

Les pressions ou tractions extérieures qui en résulteront seront les valeurs de Π données par les équations définies (35), savoir : celle sur les bases extrêmes qui sont perpendiculaires aux x en faisant $\cos nx = 1$, $\cos ny = 0$, $\cos nz = 0$ et celles sur la surface latérale en faisant $\cos nx = 0$, puisque toute normale n à cette surface est perpendiculaire aux x.

Il en résultera, pour les bases extrêmes, que la pression, qu'on peut appeler plutôt tension ou *traction*, doit y être constante et égale à p_{xx}, c'est-à-dire à $a\,\partial_x + f'\,\partial_y + e''\,\partial_z$, ce qui était évident;

Et que, pour la surface latérale, la pression extérieure $-\Pi$ est telle que (form. 35) l'on a

$$0 = \Pi\cos\widehat{\Pi x},\quad p_{yy}\cos\widehat{ny} = \Pi\cos\widehat{\Pi y},\quad p_{zz}\cos\widehat{nz} = \Pi\cos\widehat{\Pi z},$$

équations qui donnent :

$$\cos\widehat{\Pi x} = 0,\ \operatorname{tang}\widehat{\Pi y} = \frac{p_{zz}}{p_{yy}}\operatorname{tang}\widehat{ny},\ \Pi = \sqrt{p^2_{zz}\cos^2 ny + p^2_{yy}\cos^2 nz}$$

ou, généralement, Π variable en grandeur et en direction; mais qui, si ∂_x, ∂_y, ∂_z sont tels que

$$p_{yy} = p_{zz},$$

se réduisent à :

(54) $\Pi = p_{yy} = p_{zz}$, et normal à la surface latérale.

30. *Solution complète du problème proposé.* — Ces résultats de la solution d'une question de forces nous fournissent tous les documents nécessaires pour résoudre la question inverse, ou de déplacements, proposée au commencement de ce chapitre.

On satisfait complétement, comme l'on voit, aux équations indéfinies générales, et aux équations définies exprimant que la traction latérale doit être normale $= -Q$, et la traction longitudinale aussi normale $= P - Q$ par unité superficielle, si l'on prend des déplacements tels que les trois glissements soient nuls, et que les trois dilatations vérifient les trois équations (31) $p_{xx} = a\frac{du}{dx} + f'\frac{dv}{dy} + e''\frac{dw}{dz}$, etc., c'est-à-dire si l'on prend des valeurs de u, v, w telles que l'on ait les expressions suivantes en y faisant $p_{xx} = P - Q$, $p_{yy} = p_{zz} = -Q$

$$(55)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{(bc - d'd'')\,p_{xx} - (cf' - d''e'')\,p_{yy} - (be'' - f'd')\,p_{zz}}{abc + d'e'f' + d'e''f'' - ad'd'' - be'e'' - cf'f''} \\[2ex] \dfrac{dv}{dy} = \dfrac{-(cf'' - d'e')\,p_{xx} + (ca - e'e'')\,p_{yy} - (ad' - e''f'')\,p_{zz}}{\text{Même dénominateur.}} = \dfrac{-(cf'' - d'e')\dfrac{du}{dx} + c\,p_{yy} - d'\,p_{zz}}{bc - d'd''} \\[2ex] \dfrac{dw}{dz} = \dfrac{-(be' - f''d'')\,p_{xx} - (ad'' - e'f')\,p_{yy} + (ab - f'f'')\,p_{zz}}{\text{Même dénominateur.}} = \dfrac{-(be' - f''d'')\dfrac{du}{dx} - d''\,p_{yy} + b\,p_{zz}}{bc - d'd''} \end{array}\right.$$

$$(56)\quad \frac{dv}{dz} = -\frac{dw}{dy},\quad \frac{dw}{dx} = -\frac{du}{dz},\quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}.$$

Les déplacements u, v, w, résolvant le problème, seront tous ceux dont les différences premières ont ces valeurs, c'est-à-dire tous ceux que comprennent les expressions :

$$(57)\quad u = \delta_x x + t_x + r_y z - r_z y,\ v = \delta_y y + t_y + r_z x - r_x z,$$
$$w = \delta_z z + t_z + r_x y - r_y x,$$

dans lesquelles δ_x, δ_y, δ_z représentent (simplement pour abréger) les seconds membres des trois équations (55) ou les trois dilata-

tions constantes qu'on vient de trouver; et t_x, t_y, t_z, τ_x, τ_y, τ_z sont six quantités constantes très-petites, mais du reste arbitraires, qui représentent, comme il est facile de le voir, trois translations générales des points du corps parallèlement aux axes des x, y, z, et trois rotations générales autour des mêmes axes.

Ces translations et rotations sont nulles quand on suppose le prisme assujetti à une de ses extrémités, de manière qu'un de ses points (celui, par exemple, qu'on prend pour origine) reste fixe, ainsi que les directions d'une droite et d'un plan qui y passent.

Alors on a simplement

$$(58)\quad \begin{cases} u = \partial_x x, \quad v = \partial_y y, \quad w = \partial_z z; \\ \partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z \text{ représentant toujours les seconds membres de (55) en faisant} \\ p_{xx} = \mathrm{P} - \mathrm{Q},\ p_{yy} = p_{zz} = -\mathrm{Q}. \end{cases}$$

Les déplacements des points du prisme sont proportionnels aux coordonnées auxquelles ils sont parallèles.

On voit également que si — Q se réduit à la pression atmosphérique ordinairement négligeable, *ou, pour mieux dire, si l'on ne cherche que les déplacements dus à la traction P en sus de ceux déjà produits par cette action — Q s'exerçant de toutes parts sur les corps plongés dans l'atmosphère*, on obtiendra, en retranchant des expressions (55) tout ce qu'elles donnent pour $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -\mathrm{Q}$, ou en prenant, ce qui revient au même, leurs valeurs pour $p_{yy} = p_{zz} = 0$ et $p_{xx} = \mathrm{P}$, les rapports suivants entre la dilatation longitudinale ∂_x et les dilatations ∂_y, ∂_z, ou plutôt les contractions transversales $-\partial_y$, $-\partial_z$:

$$(59)\ldots\quad \left\{ \begin{array}{l} -\partial_y = \varepsilon\,\partial_x \\ -\partial_z = \varepsilon'\partial_x \end{array} \right\} \text{ en faisant } \varepsilon = \frac{cf'' - d'e'}{bc - d'd''},\ \varepsilon' = \frac{be'' - f''d'}{bc - d'd''}$$

et la traction longitudinale P capable de produire la dilatation ∂_x lui est proportionnelle, en sorte qu'on a

$$(60)\quad \mathrm{P} = \mathrm{E}\,\partial_x, \text{ si } \mathrm{E} = \frac{abc + d'e'f' + d''e''f'' - ad'd'' - be'e'' - cf'f''}{bc - d'd''}.$$

Cette quantité E est le *coefficient d'élasticité d'extension*, de Navier[1], dont nous avons parlé déjà, articles 16 et 24.

Et ces expressions (59) (60) se réduisent, dans le cas où, l'axe des x étant un axe d'élasticité (art. 19), l'on a $b = c = 2d + d'$, $d' = d''$, $e' = f''$, $e'' = f'$, à

$$(61)\quad \begin{cases} -\partial_y = -\partial_z = \frac{1}{2}\frac{e'}{d+d'}\partial_x, \quad E = a - \frac{e'e''}{d+d'}; \\ \text{ou, s'il y a isotropie, } d' = e' = e'', \ d = e, \ a = 2e + e', \text{ à} \\ -\partial_y = -\partial_z = \frac{1}{2}\frac{e'}{e+e'}\partial_x, \quad E = e\left(2 + \frac{e'}{e+e'}\right); \\ \text{ou, si } e' = e \text{ (art. 13, 19), à} \\ -\partial_y = -\partial_z = \frac{1}{4}\partial_x, \quad \varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{4}, \quad E = \frac{5}{2}e. \end{cases}$$

Ces résultats sont depuis longtemps connus, mais plusieurs savants doutaient de leur exactitude théorique et ne les regardaient, en quelque sorte, que comme plausibles, parce qu'ils leur semblaient n'être fournis que par des intégrales particulières ou non complètes, et dans le choix desquelles il y eût quelque chose d'arbitraire et d'hypothétique. Nous voyons qu'ils offrent la solution exacte et complète de la question dans les termes particuliers où elle est posée, c'est-à-dire pour la supposition de P et Q constants : car ils satisfont à toutes les conditions tant indéfinies que définies[2].

[1] M. Lamé (*Leçons sur l'élasticité*, fin du § 29, p. 75) appelle de ce nom l'inverse du même coefficient, ou le nombre $\frac{1}{E}$ par lequel il faut multiplier la traction ou pression longitudinale p_{xx} pour avoir la dilatation $\partial_x = \frac{du}{dx}$, quand les pressions latérales sont nulles; nombre qui revient, comme dit M. Combes (*Exploitation des mines*, chap. V, p. 444), à la dilatation que fait subir une charge d'un kilogramme à un prisme dont la section est l'unité superficielle.

[2] MM. Lamé et Clapeyron les ont obtenus, les premiers, pour le cas d'égale élasticité, par la manière simple qui consiste à supposer *à priori*, aux dilatations, des expressions d'une certaine forme, manière qu'ils ont appliquée aussi à d'autres problèmes du même genre, dans leur beau mémoire sur l'équilibre intérieur des solides homogènes présenté en 1828 (*Savants étrangers*, 1829, art. 40, p. 407).

Et ils sont les seuls à la résoudre, puisque le problème des déplacements est complétement déterminé quand, avec la traction et les pressions sur tous les points de la surface d'un corps, on donne la situation d'un de ses points et la direction d'une de ses droites et d'un de ses plans matériels; et il ne saurait y avoir d'autres valeurs des déplacements que celles qu'on reconnaît, n'importe par quelle voie directe ou indirecte, satisfaire à toutes ces données.

C'est ainsi que les solutions que Fourier a données des problèmes de la distribution de la chaleur dans divers cas particuliers relatifs à la forme des corps et aux températures de leur surface, sont regardées comme complètes parce que, construites de toutes pièces de manière à satisfaire aux conditions indéfinies exprimées par l'équation différentielle générale, elles ont leurs coefficients choisis de manière à vérifier les conditions définies relatives aux limites, et que ces conditions suffisent pour rendre chaque problème tout à fait déterminé.

Si l'on veut, au reste, s'assurer d'une manière pouvant paraître plus analytique de l'unité de la solution, l'on n'a qu'à poser

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}\right\} = \text{les expressions trouvées (58), plus trois inconnues } \left\{\begin{matrix} u' \\ v' \\ w' \end{matrix}\right.$$

et qu'à substituer dans les équations du problème. On verra que u', v', w' seront les déplacements des points d'un prisme qui ne serait sollicité que par des forces nulles. Ces déplacements seraient nuls eux-mêmes. Nos expressions offrent donc la solution complète et unique.

31. *Déplacements qui ne sont pas très-petits.* — Tous ces résultats ont été obtenus en supposant les déplacements u, v, w très-petits; car il n'y a que de pareils déplacements qui entrent dans les équations différentielles du chapitre I.

Ils s'appliquent néanmoins à des déplacements, soit longitudi-

naux, soit transversaux, d'une grandeur pouvant devenir aussi considérable qu'on veut, tout en conservant les relations nécessaires pour ne pas altérer la cohésion du corps. Il suffit, pour cela, que les déplacements relatifs soient très-petits dans chacune des petites portions dans lesquelles on peut diviser le prisme (art. 5).

En effet, pour chacune de ces portions que l'on peut concevoir séparées par des faces perpendiculaires aux x, aux y, aux z, les dilatations $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ auront les expressions (55); par conséquent, les petits déplacements rapportés à des plans coordonnés transportés sur leurs faces, et mobiles avec ces faces, auront les expressions (58), $u = \partial_x x$, $v = \partial_y y$, $w = \partial_z z$. En y ajoutant de proche en proche les déplacements des points de chaque face de séparation, considérée comme faisant partie de la portion précédente, avec les petits déplacements relatifs des points de la portion suivante du corps, on a, pour les déplacements absolus ou totaux, les mêmes expressions (58)

$$\partial_x x, \quad \partial_y y, \quad \partial_z z,$$

plus, telles translations et telles rotations générales qu'il aura plu d'attribuer à la première des petites portions du prisme solide, et qui s'ajouteront aux déplacements de tous les autres.

Les expressions trouvées article précédent conviennent donc à des déplacements de grandeur quelconque, produits dans les limites de la conservation indéfinie de la cohésion du prisme. Il y a, à cela, cette seule restriction, qui ne regarde que la forme des expressions générales (57) des déplacements, que si les rotations générales arbitraires ne sont pas supposées très-petites, il faudra donner à ce qui en résulte d'autres expressions que $r_y z - r_z y$, etc., et qui contiendront les lignes trigonométriques des angles finis de rotation. Nous n'avons pas besoin de nous occuper ici de ces formes plus compliquées, dont on verra un exemple à l'article 60, car la considération des rotations générales est ordinairement inutile, et leur mode de calcul est étranger à notre sujet.

32. *Problème plus général. — Prisme homogène sans plan d'élasticité.* — La solution donnée dans ce chapitre peut s'étendre, en la modifiant légèrement, à la question d'un prisme rectangulaire *simplement homogène*, et sans plan principal d'élasticité, dont les bases ou les faces éprouvent deux à deux des pressions normales et égales, et peuvent supporter aussi des pressions tangentielles dont les composantes p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} sont les mêmes sur les diverses faces; et même à une question beaucoup plus générale, savoir celle des déplacements des points d'un corps de forme quelconque dont la surface éprouverait des pressions Π (équations 35) résultant partout des six mêmes composantes $p_{xx} = \mathrm{P}$, $p_{yy} = \mathrm{P}'$, $p_{zz} = \mathrm{P}''$, $p_{yz} = \mathrm{Q}$, $p_{zx} = \mathrm{Q}'$, $p_{xy} = \mathrm{Q}''$.

En effet, si l'on égale ces six composantes P, P', P'', Q, Q', Q'' supposées données, aux expressions sextinômes (15) $p_{xx} = \mathrm{A}_{xx}\,\delta_x + \mathrm{A}_{yy}\,\delta_y + \mathrm{A}_{zz}\,\delta_z + \mathrm{A}_{yz}\,\gamma_{yz} + \mathrm{A}_{zx}\,\gamma_{zx} + \mathrm{A}_{xy}\,\gamma_{xy}$; $p_{yy} = \mathrm{A}'_{xx}\,\delta_x +$ etc., l'on a six équations du premier degré dont on peut tirer des valeurs de δ_x, δ_y, δ_z, γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy}. Or ces valeurs, prises pour celles des dilatations et des glissements par tout le corps, satisfont à la fois aux équations indéfinies générales (30) et aux équations définies (35), en sorte que les déplacements u, v, w, exprimables en fonctions du premier degré de x, y, z, qui donnent ces dilatations et glissements, constants par tout le corps, résolvent complétement le problème proposé.

Si, par exemple, le corps étant *prismatique à base quelconque*, l'on a, sur les bases, des pressions ou tractions normales $p_{xx} = \mathrm{P}$ *et aucune pression sur la face latérale*, il faut, dans les six équations (15) $p_{xx} = \mathrm{A}_{xx}\,\delta_x + \mathrm{A}_{yy}\,\delta_y +$ etc., faire

$$p_{xx} = \mathrm{P},\quad p_{yy} = 0,\quad p_{zz} = 0,\quad p_{yz} = 0,\quad p_{zx} = 0,\quad p_{xy} = 0,$$

ce qui donnera, en éliminant les glissements γ, ainsi que les dilatations latérales δ_y et δ_z, et en appelant E une certaine fonction des trente-six (ou des quinze) coefficients A_{xx}, etc., c'est-à-dire une certaine constante, analogue à celle qui est représentée

(art. 30) par la même lettre E :

$$(62) \qquad \vartheta_x = \frac{P}{E}, \quad P = E\,\vartheta_x$$

Et, ensuite, en appelant ε, ε', η, η', η'' cinq autres fonctions des mêmes coefficients constants,

$$(63) \quad \vartheta_y = \varepsilon\,\vartheta_x, \ \vartheta_z = -\varepsilon'\,\vartheta_x, \ \gamma_{yz} = \eta\,\vartheta_x, \ \gamma_{zx} = \eta'\,\vartheta_y, \ \gamma_{xy} = \eta''\,\vartheta_z.$$

D'où l'on voit que, même lorsque la matière n'a pas de plans de symétrie, ou lorsque ces plans (comme dans les pièces à clivage ou à fibres obliques) ne sont pas perpendiculaires et parallèles à ses arêtes, un prisme homogène (art. 14) tiré ou pressé longitudinalement et uniformément sur ses bases, et ne supportant latéralement aucune pression (ou seulement la pression atmosphérique dont on défalque tacitement les effets comme à l'article 30) éprouvera, de même que le prisme qui a trois plans principaux, dont un perpendiculaire à ses arêtes, une dilatation longitudinale proportionnelle aux tractions sur les bases [1], mais, de plus, des *glissements* aussi proportionnels à ces tractions, et qui le feront devenir légèrement obliquangle.

33. *Application de ces résultats à la pratique.* — Tout le monde admet la possibilité de cette application, et l'on se sert généralement et avec confiance, pour obtenir la dilatation longitudinale des diverses parties d'un prisme homogène, de l'expression (60) ou (62) $\vartheta_x = \frac{P\omega}{E\omega} = \frac{P}{E}$; $P\omega$ représentant les résultantes, égales entre elles, des forces qui le tirent en sens contraire vers les extrémités, résultantes qui doivent passer l'une et l'autre, au moins à peu près, par les centres de gravité des sections ω qu'on suppose n'être pas trop irrégulières; et E étant un coefficient déterminé par la même formule au moyen d'expériences préalablement faites sur d'autres prismes de même matière.

Nous avons cependant vu que cette expression (60) n'est exacte

[1] *Exercices* de M. Cauchy, t. IV (1829), p. 19.

qu'à la condition que la traction $P\omega$ *soit appliquée aux deux bases extrêmes du prisme, et uniformément répartie sur tous les points de chacune,* ce qui ne peut jamais se réaliser.

D'où vient donc qu'elle représente suffisamment bien les faits, et cela, quel que soit le mode d'application et de distribution des forces de traction extrêmes, dont il suffit ainsi de considérer les résultantes, astreintes seulement à être égales et dirigées dans l'axe de figure.

On l'explique en considérant que si l'état de choses représenté par les formules ci-dessus $p_{xx} =$ constante, $p_{xy} = p_{xz} = 0$, a lieu sur deux sections quelconques, extrêmes ou non, c'est-à-dire si les tractions y sont égales et normales en tous les points, *ce même état aura lieu par cela seul,* comme nous le révèle l'analyse précédente, *sur toutes les sections intermédiaires* (les pressions sur les faces latérales étant, suivant l'hypothèse, nulles ou constantes et normales dans tout l'intervalle). D'où l'on peut conclure que cet état d'égale distribution des tractions aux divers points des sections est une sorte d'état limite, vers lequel converge l'état intérieur réel du prisme à mesure que l'on y considère des sections de plus en plus éloignées des extrémités où les forces de traction peuvent être autrement appliquées; de même que dans un grand nombre de phénomènes, tels que ceux de distribution de la chaleur sous l'action de causes constantes et de causes initiales, l'état réel et variable converge plus ou moins rapidement vers un état final capable de se maintenir une fois établi, et où l'influence de l'état initial ne se fait plus sentir.

L'expérience montre même, à défaut du calcul (art. 1[er]), que la constance de la dilatation longitudinale s'établit déjà à des distances à peine sensibles des points d'application des forces de traction[1], même lorsque celles-ci s'exercent latéralement et non sur les bases. Ce seul fait, admis comme s'observant avec une très-grande approximation, entraîne comme conséquence l'admission des autres résultats ci-dessus, tels que la grandeur relative des contractions latérales, la nullité des glissements, etc., *en excluant*

[1] M. Poncelet, *Introduction à la mécanique industrielle*, 1839, art. 240, p. 285.

seulement les points très-proches de ceux où agissent les forces. Il n'y a que pour ces points exceptionnels (où l'on peut toujours renforcer les pièces s'ils donnent plus de crainte de rupture) que les déplacements s'opèrent suivant des lois compliquées, qu'il n'est que peu ou point utile de rechercher par une intégration difficile et peut-être impossible, suivie de la solution, encore inconnue, d'autres difficultés relatives au calcul numérique d'intégrales qui offriraient probablement, si l'on en croit quelques analogies, un genre inusité de complication.

Notre méthode nous fera arriver, dans d'autres cas encore (art. 41, 58, 73, etc.), à des conditions analogues de permanence de la loi des déplacements tout le long d'un prisme, ou nous apprendra de quelle manière les pressions doivent s'exercer sur deux sections pour s'exercer, par cela seul, d'une manière identique sur toutes celles de la partie qu'elles comprennent, ce qui nous fournira des limites dont la pratique peut se contenter, sans chercher ce qui se passe dans de très-petites étendues à partir des points où agissent les forces extérieures, et sans avoir besoin, non plus, de déterminer (ce qui serait encore bien difficile) de quelle manière ces forces, appliquées en général par l'intermédiaire d'autres corps solides, se distribuent sur les faces du contact avec celui dont on s'occupe.

CHAPITRE IV.

APPLICATION À LA FLEXION D'UN PRISME.

34. *Flexion en arc de cercle. Marche mixte ou semi-inverse qu'on suivra.* — La détermination exacte et générale des déplacements des points d'un prisme sous l'action de forces qui tendent à le *fléchir,* a échappé jusqu'à présent aux recherches les plus laborieuses des géomètres.

Nous ne pouvons y appliquer, même pour le cas le plus simple, la marche consistant à ne se donner que des déplacements, et à ne faire que des différentiations comme au chapitre précédent,

car nous pouvons bien nous donner des déplacements longitudinaux tels qu'il y ait flexion, mais nous ne pouvons supposer *à priori* les grandeurs des déplacements transversaux correspondants de manière à avoir quelque chance d'obtenir un système de valeurs des déplacements et des forces se rapprochant des cas des applications.

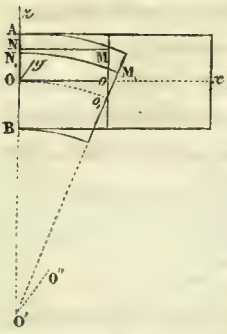
Mais en prenant la voie intermédiaire ou mixte, consistant à se donner une partie des déplacements ou de leurs relations mutuelles, et une partie des forces (art. 2), pour chercher les autres forces et les autres déplacements, nous aurons, comme on va le voir, résolu, d'une manière exacte, des problèmes de flexion auxquels on pourra assimiler, au moins très-approximativement, le plus grand nombre de ceux de la pratique.

Nous supposerons donc d'abord qu'un prisme élastique *à base quelconque* ait été fléchi d'*une manière égale sur toute sa longueur*, en sorte que ses lignes matérielles, primitivement droites et parallèles aux arêtes, *soient devenues des arcs de cercles* conaxiques et parallèles, et que les sections droites soient restées planes et normales à ces lignes : ce qui est bien *se donner une partie des déplacements;*

Et que les pressions extérieures latérales soient nulles (voyez article 37 un cas plus général) : ce qui est se donner *une partie des forces*, dans les conditions où elles se trouvent ordinairement, puisque, comme nous avons dit, la pression atmosphérique ne produit que des effets négligeables ou, plutôt, précomptés ou défalqués tacitement et dont il n'y a pas lieu de tenir un nouveau compte (art. 30).

Et nous chercherons *les autres déplacements et les autres forces;* c'est-à-dire quels sont les déplacements transversaux, et quelles doivent être les forces appliquées aux divers points des bases extrêmes pour produire la flexion uniforme ou *circulaire* supposée.

35. *Recherche des expressions des déplacements.* — Prenons pour



origine des coordonnées un point O de l'une des sections droites AB du prisme, l'axe des x parallèle aux arêtes, et pour axe Oy des y une droite tracée dans le plan de cette section, parallèlement à l'axe O′ O″ sur lequel se trouvent les centres de tous les arcs de cercle dans lesquels se transforment, par les déplacements, les arêtes et les autres files de molécules parallèles aux x. L'axe des z sera la droite O′ Oz également tracée sur le plan de la section transversale AB, et perpendiculaire à cet axe de courbure O′ O″. On suppose que la matière du prisme a trois plans principaux d'élasticité (art. 15), perpendiculaires à ces trois axes coordonnés.

Lorsque la portion O$o = x$ de la ligne matérielle se confondant primitivement avec l'axe des x sera devenue l'arc de cercle Oo_1, le point matériel M dont les coordonnées étaient

$$x,\ y,\ z$$

sera arrivé en M_1 sur la section qui est maintenant un plan passant par o_1 et par l'axe O′ O″, et aura, dans cette position nouvelle M_1, pour coordonnées

$$x + u,\ y + v,\ z + w.$$

Soient donc

v_o, w_o les valeurs de v et w pour $x = o$, ou pour le point N, projection de M sur le plan de la section transversale AB qui est le plan coordonné yOz, ρ le rayon O′ O $=$ O′o_1 de l'arc Oo_1. Comme ces déplacements changent la droite NM en un arc de cercle N_1M_1 dont le rayon est $\rho + z + w_o$ et dont l'angle au centre est $\frac{O o_1}{\rho}$, l'on a pour les coordonnées de M_1, *en supposant d'abord* (voyez art. 37) *que l'axe du prisme n'a pas changé de longueur :*

$$x + u = (\rho + z + w_o) \sin\frac{x}{\rho};\quad y + v = y + v_o;$$

$$z + w = z + w_o - (\rho + z + w_o)\left(1 - \cos\frac{x}{\rho}\right).$$

Remplaçant le sinus par son arc, et le cosinus par l'unité moins le demi-carré du même arc, puisque les déplacements et par suite la courbure de cet arc sont supposés très-petits (voyez plus loin art. 39 pour le cas où ils seraient grands), et négligeant comme à l'ordinaire les quantités très-petites du second ordre, c'est-à-dire les carrés et les produits de w_o et de $\frac{x}{\rho}$, l'on a simplement

$$(64) \qquad u = \frac{xz}{\rho}, \quad v = v_o, \quad w = w_o - \frac{x^2}{2\rho}.$$

Reste à déterminer les valeurs de v_o, w_o ou des déplacements transversaux sur la section AB dont le plan est resté fixe, de manière que les pressions latérales sur la surface du prisme soient nulles, ou que l'on ait les équations définies (35) de l'art. 22 avec $\Pi = 0$, $\cos\widehat{nx} = 0$, c'est-dire

$$(65) \left\{ \begin{array}{c} p_{xy}\cos ny + p_{xz}\cos nz = 0\,;\; p_{yy}\cos ny + p_{yz}\cos nz = 0, \\ p_{yz}\cos ny + p_{zz}\cos nz = 0 \end{array} \right.$$

et qu'en même temps les trois équations indéfinies (32) du cas de trois plans principaux d'élasticité soient satisfaites.

Si, dans les trois équations définies (65) que nous venons d'écrire, nous substituons aux composantes de pression p les formules trinômes et monômes (18) de l'art. 15, et si, pour les coefficients différentiels $\frac{du}{dx}$, etc., nous mettons leurs valeurs tirées des expressions que nous avons posées tout à l'heure (64) pour u, v, w, la première de ces trois équations (65) est satisfaite d'elle-même, et les deux autres prennent la forme suivante, vu que v_o et w_o ne sont fonctions que de y et z et non de x:

$$(66) \left\{ \begin{array}{l} \left(f''\frac{z}{\rho} + b\frac{dv_o}{dy} + d'\frac{dw_o}{dz}\right)\cos ny + d\left(\frac{dv_o}{dz} + \frac{dw_o}{dy}\right)\cos nz = 0 \\ d\left(\frac{dv_o}{dz} + \frac{dw_o}{dy}\right)\cos ny + \left(e'\frac{z}{\rho} + d''\frac{dv_o}{dy} + c\frac{dw_o}{dz}\right)\cos nz = 0. \end{array} \right.$$

Si, pour y satisfaire aussi, l'on égale à zéro chacune des trois parenthèses qui multiplient les cosinus, ce qui revient à essayer si

les composantes de pression p_{yy}, p_{yz}, p_{zz} peuvent être supposées nulles séparément, et non-seulement à la surface, mais encore dans tout l'intérieur du prisme fléchi, l'on obtient, en faisant pour abréger, comme à l'art. 30 formules (59) :

$$(67)\qquad \frac{c\,f'' - d'\,e'}{b\,c - d'\,d''} = \varepsilon, \quad \frac{b\,e' - d''\,f''}{b\,c - d'\,d''} = \varepsilon',$$

les expressions ou relations

$$(68)\qquad \frac{dv_o}{dy} = -\varepsilon\frac{z}{\rho}, \quad \frac{dw_o}{dz} = -\varepsilon'\frac{z}{\rho}, \quad \frac{dv_o}{dz} + \frac{dw_o}{dy} = 0.$$

Or, les équations indéfinies (32) viennent justifier cette supposition, car en y mettant pour u, v, w nos valeurs (64), la première est satisfaite d'elle-même, et les deux dernières, moyennant la troisième relation $\frac{dv_o}{dz} + \frac{dw_o}{dy} = 0$ que nous venons d'écrire, se réduisent à

$$b\,\frac{d^2 v_o}{dy^2} + d'\,\frac{d^2 w_o}{dy\,dz} = 0, \quad c\,\frac{d^2 w_o}{dz^2} + \frac{e'}{\rho} + d''\,\frac{d^2 v_o}{dy\,dz} = 0,$$

qui sont satisfaites aussi en mettant pour $\frac{dv_o}{dy}$ et $\frac{dw_o}{dz}$ les valeurs $-\varepsilon\frac{z}{\rho}$, $-\varepsilon'\frac{z}{\rho}$ qu'on vient de poser (68), puisque $c\,\varepsilon' + d''\,\varepsilon = e'$ d'après les expressions (67) de ε, ε'.

Il ne reste donc plus qu'à tirer des expressions ou relations (68) de $\frac{dv_o}{dy}$, etc., les valeurs de v_o et w_o en y et z. Les deux premières, étant intégrées, donnent, en représentant par F, $\mathcal{F}$ des fonctions arbitraires

$$(69)\qquad v_o = -\varepsilon\frac{yz}{\rho} + F(z), \quad w_o = -\varepsilon'\frac{z^2}{2\rho} + \mathcal{F}(y)$$

et la troisième donne, par conséquent,

$$-\frac{\varepsilon y}{\rho} + F'(z) + \mathcal{F}'(y) = 0.$$

D'où l'on voit que $F'(z)$ doit être égal à zéro ou à une constante,

et que $\mathcal{F}'(y)$ doit être égal à $\frac{\varepsilon y}{\rho}$ moins cette même constante, ou que l'on a, k, k', k'' étant des constantes,

$$\mathrm{F}(z) = kz + k', \quad \mathcal{F}(y) = \frac{\varepsilon y^2}{2\rho} - ky + k''.$$

Nous devons faire nulles les constantes k' et k'', puisque nous avons supposé fixe le point O du prisme pris pour origine des coordonnées, en sorte qu'on doit avoir $v = v_0 = 0$, $w = w_0 = 0$ pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Et nous pouvons faire nulle aussi la constante k qui représenterait une rotation de la ligne matérielle prise pour axe des z autour de l'axe des x, puisque nous pouvons supposer aussi sa direction fixe.

Nous avons donc définitivement, en substituant dans les valeurs (64) $u = \frac{xz}{\rho}$, $v = v_0$, $w = w_0 - \frac{x^2}{2\rho}$ les valeurs (69) de v_0, w_0, dans lesquelles on annulera, comme on vient de voir, $\mathrm{F}(z)$, et l'on mettra $\frac{\varepsilon y^2}{2\rho}$ pour $\mathcal{F}(y)$:

$$(70) \qquad u = \frac{xz}{\rho}, \quad v = -\varepsilon \frac{yz}{\rho}, \quad w = -\frac{x^2}{2\rho} + \frac{\varepsilon y^2 - \varepsilon' z^2}{2\rho}.$$

36. *Pressions.* — *Moment de flexion.* — Les expressions (70) des déplacements donnent, pour les dilatations longitudinales et transversales, ces formules :

$$(71) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{z}{\rho}, \quad \frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{z}{\rho}, \quad \frac{dw}{dz} = -\varepsilon' \frac{z}{\rho}.$$

La première montre que les *fibres*, en appelant ainsi les éléments prismatiques très-déliés dans lesquels on peut concevoir le solide divisé longitudinalement, sont dilatées du côté des z positifs, et *contractées* du côté des z négatifs, proportionnellement à leurs distances à la ligne appelée *neutre*, ou *ligne des fibres invariables*, qui est une parallèle à l'axe des y, ou une perpendiculaire au plan de flexion, menée sur chaque section et pour laquelle on a $z = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$.

En tirant des expressions (70) des déplacements leurs six autres coefficients différentiels, substituant dans les six formules (18) $p_{xx} = a\frac{du}{dx} + f'\frac{dv}{dy} + e''\frac{dw}{dz}$, $p_{yy} =$ etc., et ayant égard à ce qu'on a, E étant le coefficient d'élasticité (art. 24, 30, 35, expressions 60, et 59 ou 67),

$$(72)\left\{\begin{array}{c} a - f'\varepsilon - e''\varepsilon' = E, \quad f'' - b\varepsilon - d'\varepsilon' = 0, \\ e' - d''\varepsilon - c\varepsilon' = 0 \end{array}\right.$$

l'on obtient, pour les six composantes de pression :

$$(73)\ p_{xx} = E\frac{du}{dx} = E\frac{z}{\rho};\ p_{yy} = 0,\ p_{zz} = 0,\ p_{yz} = 0,\ p_{zx} = 0,\ p_{xy} = 0.$$

Cette valeur de p_{xx} montre que les *fibres* devenues courbes résistent à l'extension ou à la contraction indépendamment les unes des autres, comme si chacune était un petit prisme soumis isolément à une traction ou à une compression longitudinale.

Elle montre aussi la manière dont les forces qui font fléchir sont distribuées sur les bases extrêmes : elles varient proportionnellement à la coordonnée transversale parallèle au plan de flexion.

La résultante $\int_\omega p_{xx}\, d\omega = \frac{E}{\rho}\int_\omega z\, d\omega$ de ces forces est nulle, si l'axe des x passe, comme nous le supposons, par les centres de gravité des sections que nous appelons ω.

Mais le moment résultant M de ces forces qui font fléchir, et qu'on appelle le *moment de flexion*, n'est pas nul. Comme on peut le décomposer en moments $\int_\omega p_{xx}\, z\, d\omega$, $\int_\omega p_{xx}\, y\, d\omega$ autour des parallèles aux y et aux z menées par le centre de la section, l'on a :

$$(74) \qquad M = \frac{E}{\rho}\sqrt{(\int z^2\, d\omega)^2 + (\int yz\, d\omega)^2},$$

expression qui se réduit, mais dans le seul cas où le plan xz de flexion est parallèle à l'un des deux axes principaux d'inertie de la section ω, à

$$(75) \qquad M = \frac{EI}{\rho}$$

en appelant I *le moment d'inertie* $\int z^2 d\omega$ *de la section autour de la perpendiculaire au plan de flexion passant par son centre de gravité.*

Nous verrons, article 42, qu'on exprime simplement ce moment M dans tout autre cas, au moyen des deux moments d'inertie principaux de la section.

37. *Généralisation pour le cas où il y a des tractions longitudinales dont la résultante n'est pas nulle et constante.* — Supposons que, sur les bases extrêmes, l'on ait la pression ou traction $p_{xx} = P_x + E\frac{z}{\rho}$ au lieu de (73) $E\frac{z}{\rho}$ seulement, outre la pression atmosphérique — Q qui sollicite également les faces latérales, et que l'on ne compte pas, non plus que ses effets (art. 30). Il suffira, pour obtenir les déplacements u, v, w, comme nous le verrons à un chapitre spécial (chapitre XII), relatif aux effets de la simultanéité de divers genres d'effort, et comme il est, du reste, facile de le vérifier, d'ajouter aux valeurs (70) celles (58) du cas où un prisme n'est que tiré longitudinalement sans être fléchi.

Alors l'axe du prisme éprouve une dilatation qui dépend de la constante P_x, et la ligne des fibres invariables, s'il y en a une sur la section, est toujours perpendiculaire au plan de flexion, mais ne passe plus par le centre de celle-ci.

38. *Solution du problème proposé de la détermination des déplacements par les forces (problème inverse ou en partie inverse de celui qu'on vient de résoudre).* — Nous voyons que si les déplacements u, v, w sont représentés par les formules (70) $u = \frac{xz}{\rho}$, $v =$ etc., ce qui exige que la flexion se fasse en arc de cercle d'un rayon ρ dans l'axe du prisme, et que les sections restent planes et normales à cet axe, l'on a, sur les bases, des pressions ou tractions (73) $p_{xx} = E\frac{z}{\rho}$, et, sur les faces latérales, des pressions nulles.

Réciproquement, si un prisme qui ne supporte aucune pression latéralement est sollicité sur les éléments de ses bases par des

forces normales distribuées conformément à cette formule (73) $p_{xx} = \mathrm{E}\frac{z}{\rho}$ ou *proportionnelles à la distance z des éléments à une même droite tracée sur les bases par leur centre de gravité et qui ait la même direction connue sur toutes deux,* l'on est assuré que sa flexion sera circulaire, et que l'arc dans lequel se transformera la ligne des centres aura un rayon ρ déterminé par la formule (74) ou (75); enfin, que les déplacements de ses points seront représentés par les formules (70) de la fin de l'art. 35.

En effet, ces déplacements u, v, w satisfont à toutes les équations indéfinies et définies d'un pareil problème.

Et ils sont les seuls qui y satisfassent, car le problème des déplacements est complétement déterminé si, en donnant les pressions et tractions sur tous les points de la surface, on suppose fixes l'un des points du prisme (le point O), et les directions d'un élément linéaire et d'un élément plan qui y passent (un élément sur l'axe des z et un élément sur le plan $y\,z$), en sorte qu'il ne puisse y avoir ni translation ni rotation générale à ajouter aux déplacements provenant de la flexion. On peut encore s'en assurer, si l'on veut, sous une forme analytique, en posant u, v, w = les expressions (70), plus des inconnues u', v', w' et substituant dans les équations définies et indéfinies; car on verra que, toute réduction faite, ces inconnues représenteraient les déplacements des points d'un prisme *qui ne serait sollicité nulle part* et qui est assujetti quelque part; ces inconnues sont donc nulles, et il n'y a rien à ajouter aux expressions (70), qui donnent ainsi la solution unique du problème de déplacements que nous venons de poser.

39. *Extension de cette solution à une flexion aussi grande qu'on veut.* — Les formules (70) donnant u, v, w ne s'appliquent, comme les équations différentielles dont on les a tirées, qu'à des déplacements très-petits, ne produisant qu'une petite flexion. On peut cependant en tirer des déplacements d'une grandeur aussi considérable qu'on

veut, tels que ceux d'une verge élastique longue et mince qu'on ploie au point de faire presque toucher les deux bouts (art. 5), ce qui est très-possible sans altérer aucunement la contexture de sa matière, car les déplacements relatifs et les déformations peuvent rester petits dans chacune des portions d'une longueur bien moindre que le rayon ρ de la courbure, dans lesquelles on peut diviser par la pensée un pareil corps; et c'est leur accumulation qui produit, à l'extrémité, des déplacements considérables.

Pour construire ces grands déplacements, on n'aura simplement qu'à courber l'axe de la pièce en arc ayant le rayon ρ déterminé par les formules ci-dessus art. 38 ou ci-après art. 42, et qu'à rapporter, sur chacun des plans normaux qu'on peut lui mener, les situations nouvelles des points des sections après qu'ils ont éprouvé les déplacements transversaux v et w (voyez art. 43), égaux à ceux des points de la section AB pour laquelle on a $x = 0$.

40. *Flexion inégale ou non circulaire.* — Dans ce cas plus général, les sections, comme on verra art. 44, ne restent ni planes ni normales aux fibres. Mais nos dernières recherches ont fait cesser un doute que cette circonstance nous avait fait concevoir lors d'une première rédaction, et nous ont prouvé que les formules connues de l'article 36, bien que révélées primitivement par une théorie erronée en plusieurs points, pouvaient être appliquées aussi exactement au cas dont nous nous occupons ici qu'au cas exceptionnel de la flexion égale ou circulaire, pourvu que les forces qui font fléchir soient toujours appliquées et distribuées d'une certaine manière sur les bases extrêmes.

Prenons, en effet, toujours pour axe des x l'axe primitif de figure du prisme, et pour plan xz, un plan par rapport auquel on le suppose d'une forme symétrique et sollicité symétriquement, et qui est le plan de sa flexion; et plaçons l'origine des coordonnées au centre de gravité de l'une des bases extrêmes du prisme ou de la partie de prisme que l'on considère, cette base étant sup-

posée rester tangente, après la flexion, au plan yz. Et *donnons-nous* (art. 2), des forces extérieures qui engendrent, comme aux articles précédents, des pressions transversales p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} nulles sur les fibres, et, sur les sections ω, des pressions longitudinales p_{xx} proportionnelles aux ordonnées z, mais dont le moment total $M = \int p_{xx} z \, d\omega$, au lieu d'être constant d'un bout à l'autre, *varie linéairement avec* x, en sorte qu'il soit exprimé, P et a étant deux constantes, par

$$(76) \qquad M = P(a - x),$$

il en résultera $P(a - x) = \int \frac{p_{xx}}{z} z^2 \, d\omega = \frac{p_{xx}}{z} I$, I étant toujours le moment d'inertie $\int z^2 \, d\omega$, d'où

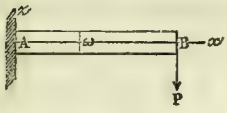
$$(77) \quad p_{xx} = \frac{P(a-x)}{I} z; \text{ outre } p_{yy} = 0, \; p_{zz} = 0, \; p_{yz} = 0;$$

données qui reviennent (art. 30 et 36) aux suivantes sur les déplacements

$$(78) \quad \frac{du}{dx} = \frac{P(a-x)}{E\,I} z, \; \frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{P(a-x)}{E\,I} z, \; \frac{dw}{dz} = -\varepsilon' \frac{P(a-x)}{E\,I} z, \; \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0.$$

Mais les deux autres composantes de pression, p_{zx} et p_{xy}, ne seront pas nulles comme dans le cas de la flexion égale.

Celle p_{xz} doit même être telle que la somme $\int p_{xz} \, d\omega$ des actions exercées, dans le sens de z, par la partie $A\omega$ sur la partie ωB du prisme à travers la section ω, fasse équilibre aux forces extérieures sollicitant ωB; forces qui ne se réduisent plus à un couple puisque leur moment $P(a - x)$ est variable, mais qui ont, dans le même sens z, une résultante $-P$ agissant à une distance $AB = a$ de l'origine A, si aucune force capable de contribuer au moment M ne s'exerce sur le prisme entre ses extrémités. En sorte qu'on doit avoir



$$(79) \qquad \int_0^\omega p_{xz} \, d\omega = -P.$$

Les équations différentielles indéfinies (30) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \text{etc.}$, en y substituant les valeurs (77) données pour p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} et p_{yz} se réduisent à

$$(80) \qquad \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{Pz}{I}, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xz}}{dx} = 0.$$

La troisième, qui revient à $\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) = 0$ ou $-\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d}{dz}\frac{du}{dx}$, montre, en faisant attention que $-\frac{d^2w}{dx^2}$, lorsque w est très-petit, est l'inverse du rayon ρ de la courbure prise par les fibres, que l'on a comme conséquence des suppositions (77) sur les pressions ou (78) sur les déplacements

$$(81) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{P(a-x)}{EI} = \frac{M}{EI}; \text{ d'où } M = \frac{EI}{\rho}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{z}{\rho}, \quad p_{xx} = E\frac{z}{\rho}$$

tout comme dans la flexion circulaire (art. 36), qui n'est, au reste, qu'un cas particulier de la flexion considérée ici; cas répondant à P nul, son bras de levier a infini, mais leur produit Pa fini et $= M$ ou $\frac{EI}{\rho}$ alors constant entre les deux extrémités de la partie de prisme d'une longueur quelconque dont on s'occupe.

Mais il faut pouvoir trouver des valeurs de u, v, w qui y satisfassent, et aussi aux équations définies (35), appliquées à la surface latérale du prisme. Les deux dernières se réduisent, vu que $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{yz} = 0$, $\cos\widehat{nx} = 0$, à $\Pi\cos\widehat{\Pi y} = 0$, $\Pi\cos\widehat{\Pi z} = 0$, d'où $\cos\widehat{\Pi x} = 1$; et par conséquent la première, en appelant ds l'élément de la courbe contour de ω, à

$$(82) \qquad \Pi = p_{xz}\frac{dy}{ds} - p_{xy}\frac{dz}{ds},$$

en sorte que la pression sur la surface latérale, s'il y en avait une, se réduirait à une sorte de *frottement* dans le sens des arêtes.

Pour que cette action n'existe pas, il faut, *aux points du contour des sections*, que l'on ait (voy. aussi art. 48)

$$(83)\quad p_{xz}\,dy - p_{xy}\,dz = 0, \text{ ou } e\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right) - f\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\frac{dz}{dy} = 0.$$

Pour satisfaire d'abord aux équations indéfinies (80), ainsi qu'à celles (77) ou (78) exprimant les *données*, et à la condition de symétrie par rapport au plan xz, il faut prendre pour u, v, w

$$(84)\quad \begin{cases} u = \dfrac{P(2ax-x^2)z}{2EI} + F(y,z), \qquad v = -\varepsilon\dfrac{P(a-x)yz}{EI} \\ w = g_0 x - \dfrac{P}{2EI}\left[a x^2 - \dfrac{x^3}{3} + (a-x)(\varepsilon' z^2 - \varepsilon y^2)\right]; \\ g_0 \text{ étant une constante; } F(y,z) \text{ une fonction qui ne change pas en mettant } -y \\ \text{pour } y, \text{ et telle que } F = 0, \dfrac{dF}{dz} = 0 \text{ pour } y = 0,\ z = 0, \text{ et que} \\ f\dfrac{d^2F}{dy^2} + e\dfrac{d^2F}{dz^2} = \dfrac{P}{EI}(E - \varepsilon f - \varepsilon' e)\, z. \end{cases}$$

En effet, les valeurs de u et de v qu'on vient d'écrire s'obtiennent immédiatement en intégrant les deux premières équations (78), et en observant que la *symétrie* exige que u reste le même et que v change de signe et non de grandeur quand on y met $-y$ pour y. Quant à celle de w, l'intégration de la troisième équation (78) fournit l'expression $w = -\frac{\varepsilon' P(a-x)z^2}{2EI} + f(x,y)$ qui, substituée ainsi que celle de v dans la quatrième $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0$ donne $\frac{d}{dy}f(x,y) = \frac{\varepsilon P(a-x)}{EI}y$ d'où $f(x,y) = \frac{\varepsilon P(a-x)y^2}{2EI} + f_1(x)$; en sorte que la troisième équation (80) $\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right) = 0$ donne $\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) = -\frac{P(a-x)}{EI}$, d'où $f_1(x) = -\frac{P}{EI}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + g_0 x$, g_0 étant une constante qui représente le glissement g_{zx} à l'origine des cordonnés. — Et, quant aux trois conditions relatives à la fonction arbitraire $F(y,z)$ ajoutée à u, la première résulte de la symétrie, la seconde et la troi-

sième résultent de ce que nous supposons fixes le centre et l'élément central de la section ω à l'origine, et, la dernière, de la première des équations indéfinies (80).

Cette fonction F doit en outre être telle, ainsi que la constante g_0, qu'en substituant u, v, w dans l'équation (83) $p_{xz}dy - p_{xy}dz = 0$ relative au contour, elle soit satisfaite, car on suppose que les faces latérales du prisme n'éprouvent aucune action, soit transversale, soit longitudinale entre ses extrémités. Et, par cela seul, l'équation (79) $\int p_{xz}d\omega = -P$ sera satisfaite aussi, comme nous avons dit.

Ce serait sortir de notre sujet que de donner ici la détermination de cette fonction F (y, z) pour diverses formes de la section du prisme[1]. Nous nous contenterons de dire qu'elle existe pour toutes, en sorte qu'il y a toujours des valeurs de u, v, w satisfaisant aux équations ci-dessus, et, par suite, des expressions de p_{xy}, p_{xz} donnant la manière d'appliquer et de distribuer les forces sur la base B du prisme, pour qu'on ait exactement les formules (81) de la flexion.

Cette fonction F est, pour une section elliptique représentée par l'équation $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$(85)\quad \begin{cases} F(y, z) = \frac{P}{2EI}\left[(K - \varepsilon)\, y^2 z + (E - \varepsilon' e - fK)\,\frac{z^3}{3e}\right], \\ \text{Et } g_0 = -\frac{Pc^2(E - fK)}{2EeI} \text{ en faisant } K = \frac{Ec^2 + 2\varepsilon e b^2}{3fc^2 + eb^2}. \end{cases}$$

La même fonction F, pour une section rectangle, est en série trigonométrique fort compliquée. Mais on peut se faire approximativement une idée de sa valeur en prenant encore alors l'expression simple (85), avec $K = \frac{2\varepsilon e b^2}{2fc^2 + eb^2}$; ce qui remplit seulement en quatre points du contour des sections la condition (83) de nullité de la pression latérale, et satisfait aussi à (79) $\int p_{xz}\, d\omega = -P$.

[1] On peut voir là-dessus l'extrait, inséré aux *Comptes rendus*, t. XXXIX, p. 1027, d'un *Mémoire sur la flexion*, que nous venons de présenter à l'Académie.

Il en résulte en effet, vu que $3\,I = \omega\, c^2$

$$(86)\quad \begin{cases} p_{xz} = -\dfrac{3P}{2\omega}\left[1 - \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{2\,\varepsilon e}{3E}\cdot\dfrac{3\,f\,b^2}{2\,f\,c^2+e\,b^2}\left(1 - \dfrac{z^2}{c^2} - 2\,\dfrac{y^2}{b^2}\right)\right] \\ p_{xy} = \dfrac{2Pb}{\omega c}\cdot\dfrac{\varepsilon e}{E}\cdot\dfrac{3\,f\,b^2}{2\,f\,c^2+e\,b^2}\cdot\dfrac{yz}{bc}; \end{cases}$$

et la pression s'exerçant sur les faces $2\,b$ est donnée par la valeur de p_{xz} pour $1 - \frac{z^2}{c^2} = 0$, et celle sur les faces $2\,c$ est la valeur de p_{xy} pour $\frac{y}{b} = \pm 1$. Nulles aux points qui sont au milieu de la largeur de ces faces, ces pressions tangentielles sont petites partout ailleurs, car les fractions $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ n'excèdent jamais l'unité, et il en est de même de celle $\frac{3\,f\,b^2}{2\,f\,c^2+e\,b^2}$ lorsque $e = f$ et que, comme à l'ordinaire, la dimension $2\,c$ excède celle $2\,b$; enfin la fraction $\frac{\varepsilon e}{E}$, dans le cas d'isotropie, a pour valeur (art. 30) $\frac{e'}{4\,e+6e'}$, c'est-à-dire 1/10 si l'on admet (art. 13) $e = e'$, ou $\varepsilon = 1/4$, $\frac{e}{E} = 2/5$: et elle doit être petite dans tous les autres cas.

Ces espèces de petits frottements longitudinaux qui, d'ailleurs, se compensent de manière à ne contribuer en rien au moment de flexion M (dû entièrement à l'action transversale P sur la section extrême B quand on a $\int p_{xz}\, d\omega = -P$), doivent donc n'influer que fort peu sur la grandeur des déplacements; et l'on peut admettre, pour les applications, que lorsqu'ils n'existent pas, p_{xz} à l'intérieur est sensiblement représenté par la formule (86) moins le terme en $\frac{\varepsilon e}{E}$ (voy. art. 44 et chap. XII).

41. *Application à la pratique. Cas où la force ou le couple qui sollicite un prisme à fléchir agit dans un plan parallèle à l'un des deux axes principaux de ses sections.* — Jamais, dans la pratique, la flexion n'est déterminée par des forces s'exerçant, soit normale-

ment, soit tangentiellement sur les bases extrêmes des prismes, et distribuées sur leurs divers points comme l'indique la formule (73) ou (81) $p_{xx} = \mathrm{E}\frac{z}{\rho}$ des forces normales ou celles (art. 40) des forces tangentielles p_{xz}, p_{xy}. Aussi les résultats ci-dessus ne sont pas applicables d'une manière tout à fait rigoureuse.

Mais l'analyse précédente nous prouve toujours que si sur deux sections quelconques, extrêmes ou non, les forces sont appliquées et distribuées de cette manière, il en sera absolument de même sur toutes les sections intermédiaires, et que les déplacements, dans toute l'étendue du prisme, seront représentés par les autres expressions trouvées ci-dessus. Les formules donnent donc (comme à l'article 33) l'état de choses vers lequel converge l'état intérieur réel du prisme à mesure que l'on considère des parties plus éloignées de ses extrémités ou des points d'application des forces qui font fléchir.

Il s'établit ici, dans l'espace, une sorte d'état permanent semblable à celui qui est produit, dans le temps, par l'action continue de causes constantes qui finissent par effacer l'effet des causes initiales d'un grand nombre de phénomènes.

Et l'expérience prouve qu'il ne faut pas, pour cela, se placer à des distances considérables des points d'application; elle montre que la flexion en arc de cercle, par exemple, est produite dans toute la partie intermédiaire C D d'une pièce prismatique A C D B sollicitée latéralement, aux deux parties extrêmes AC, BD, par des forces se réduisant à des couples P, — P et — P, P égaux, contraires et ayant l'un et l'autre leur plan parallèle aux arêtes du prisme. De ce simple fait, qui s'observe pour tous les points, excepté ceux qui sont extrêmement rapprochés de C, D, et où il y a quelques compressions latérales extraordinaires dues à l'action immédiate des forces appliquées, les autres résultats ci-dessus s'ensuivent et peuvent être admis au moins avec une grande approximation.

Et la même chose peut être dite, d'après ce que nous avons vu à l'article précédent, pour le cas d'une flexion inégale ou non circulaire déterminée par des forces ne faisant pas couples.

En conséquence, M étant le moment résultant, constant ou variable, autour du centre de gravité d'une section quelconque ω, de ces forces supposées n'avoir aucune résultante longitudinale (voyez chapitre XII), *si l'on suppose aussi d'abord que le plan de ce moment est parallèle à l'un des axes principaux d'inertie des sections*, on aura (formules 75 et 71, ou 81), l'axe des x passant par leurs centres de gravité,

$$(87) \qquad M = \frac{EI}{\rho}, \quad \frac{du}{dx} = \delta_x = \frac{z}{\rho} = z\frac{M}{EI}.$$

La flexion de l'axe du prisme s'opérera donc alors dans le plan même de la sollicitation, c'est-à-dire dans un plan parallèle à celui du moment M qui le fait fléchir. Le rayon de son cercle osculateur sera $\frac{EI}{M}$, les dilatations des fibres seront $z\frac{M}{EI}$.

Et comme on a $g_{yz} = 0$, *si l'influence des glissements* g_{xy}, g_{xz} *sur la dilatation maximum est supposée négligeable* comme elle l'est le plus souvent (voy. chap. XII), la condition de non-rupture sera (art. 26) que la dilatation δ_x, beaucoup plus grande que celles δ_y, δ_z, ne dépasse pas une limite désignée par $\frac{R}{E}$, ou qu'on ait (form. 47) :

$$(88) \qquad R = \text{ou} > \text{maximum de } z\frac{M}{I}.$$

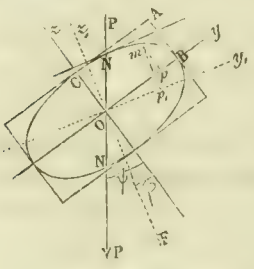
ou, en appelant z' la plus grande ordonnée z du contour des sections,

$$(89) \qquad M = \text{ou} < R\frac{I}{z'}.$$

C'est l'équation depuis longtemps connue de la stabilité de la cohésion ou de résistance à la rupture, *qu'il convient de n'appliquer que dans le cas supposé.*

42. *Cas où le plan de sollicitation à fléchir est oblique par rapport aux axes principaux des sections. — Détermination du plan de flexion effective, et de la courbure prise. — Condition de résistance.* — Mais si le plan de sollicitation n'est pas parallèle à l'un des axes principaux d'inertie des sections, on aura d'autres expressions.

Prenons en effet, avant la flexion, les coordonnées y, z parallèles à ces deux axes principaux, qu'on suppose être les lignes rectangulaires Oy, Oz tracées sur la section ω par son centre de gravité. Appelons



φ l'angle aigu POz que fait le plan de sollicitation PO P avec Oz,

ψ l'angle $zOz_1 = yOy_1$ que fait, aussi avec Oz, le plan inconnu z_1 O F suivant lequel l'axe du prisme se courbe, ou l'angle égal que fait, avec Oy, la ligne Oy_1 tracée sur la section ω, perpendiculairement à ce *plan de flexion* z_1 O F;

z_1 la distance mp_1, à cette ligne Oy_1, du point m de la section dont les coordonnées transversales sont $y = Op$, $z = mp$.

Nous aurons, pour la pression sur la section au point m (formule 73),

$$(90) \qquad p_{xx} = E\frac{z_1}{\rho}, \text{ ou } p_{xx} = \frac{E}{\rho}(z\cos\psi + y\sin\psi).$$

Le moment M doit faire équilibre au moment résultant des forces $p_{xx}\,d\omega$ agissant sur tous les élements $d\omega$ de la section ω. Décomposons-le en deux autres M $\cos\varphi$, M $\sin\varphi$ agissant dans des plans perpendiculaire à Oy et à Oz, et posons les équations d'équilibre de rotation autour de ces deux axes. Nous aurons, en faisant

$$\int z^2\,d\omega = I, \quad \int y^2\,d\omega = I',$$

et en ayant égard à ce que $\int yz\,d\omega = 0$ quand Oy, Oz sont des axes d'inertie,

$$(91)\quad \begin{cases} M\cos\varphi = \int_0^\omega p_{xx} z\, d\omega = \frac{E}{\rho}(\cos\psi \int z^2 d\omega + \sin\psi \int yz\, d\omega) = \frac{E\,I}{\rho}\cos\psi \\ M\sin\varphi = \int_0^\omega p_{xx} y\, d\omega = \frac{E}{\rho}(\cos\psi \int yz\, d\omega + \sin\psi \int y^2 d\omega) = \frac{E\,I'}{\rho}\sin\psi. \end{cases}$$

En divisant ces deux équations membre à membre on obtient une autre équation; et l'on en a une autre encore en ajoutant leurs carrés après les avoir divisées respectivement par I et I'. On trouve ainsi

$$(92)\qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{I}{I'}\operatorname{tang}\varphi;\ \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I^2} + \frac{\sin^2\varphi}{I'^2}}.$$

La première donne la situation du plan de flexion, et la seconde, le rayon de la courbure constante ou variable prise par l'axe du prisme.

Il est facile de voir que si le contour de la section est une ellipse, ou que, quelle que soit sa forme, si l'on trace dans son plan l'ellipse dont les demi-axes OB, OC, portés dans les directions y et z, sont proportionnels aux inverses $\frac{1}{\sqrt{I}}$, $\frac{1}{\sqrt{I'}}$ des racines carrées des moments d'inertie de la section autour des mêmes axes, le plan de la flexion effective OF sera perpendiculaire aux tangentes menées à cette ellipse par les points N, N où elle est coupée par le plan de sollicitation OP, ensorte que la ligne des fibres invariables Oy_1 est le diamètre conjugué à celui NN.

Le prisme fléchit, comme l'on voit, dans un plan faisant un angle $\varphi - \psi$ avec le plan dans lequel il est sollicité à fléchir, et dont il s'écarte plus ou moins en se rapprochant du *plan de plus facile flexion*, c'est-à-dire de Oz si $I < I'$.

Cette déviation $\varphi - \psi$ du plan de flexion est à son maximum quand le plan de sollicitation passe par une des diagonales OA du rectangle circonscrit à l'ellipse; et, alors, la ligne des fibres invariables, ou la direction autour de laquelle la flexion s'effectue, n'est autre chose que l'autre diagonale. La même chose a lieu lorsque le contour de la section est le rectangle lui-même.

La condition de non-rupture est, dans ce cas général de flexion *déviée* (form. 47),

$$\mathrm{R} = \text{ou} > \text{maximum de } \frac{z_1}{\rho}$$

z_1 étant toujours la distance des points de la section à la ligne des fibres invariables Oy_1. Et comme on a (form. 91)

$$z_1 = z\cos\psi + y\sin\psi, \quad \frac{\mathrm{E}\cos\psi}{\rho} = \frac{\mathrm{M}\cos\varphi}{\mathrm{I}}, \quad \frac{\mathrm{E}\sin\psi}{\rho} = \frac{\mathrm{M}\sin\varphi}{\mathrm{I}'},$$

cette condition revient à

$$\text{(93)} \qquad \mathrm{M} = \text{ou} < \text{minimum de } \frac{\mathrm{R}}{z\dfrac{\cos\varphi}{\mathrm{I}} + y\dfrac{\sin\varphi}{\mathrm{I}'}},$$

équation qui se réduit, lorsque la section est un rectangle dont $2b$, $2c$ sont les côtés respectivement parallèles aux y, aux z, à celle-ci, fort différente de celle que l'on trouve pour le même objet dans divers ouvrages où l'on a supposé que le plan de flexion était toujours celui de sollicitation :

$$\text{(94)} \qquad \mathrm{M} = \text{ou} < \frac{4\,\mathrm{R}\,b^2c^2}{3\,(b\cos\varphi + c\sin\varphi)}\,;$$

et, lorsque la section est une ellipse dont b, c sont les demi-axes, à

$$\text{(95)} \qquad \mathrm{M} = \text{ou} < \frac{\mathrm{R}.\,\pi\,b^2c^2}{4\sqrt{b^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi}}.$$

43. *Forme nouvelle prise par le contour des sections d'un prisme lorsqu'il est fléchi.* — Il est intéressant de connaître aussi quelles modifications subit le contour des sections par suite des contractions et dilatations transversales qui accompagnent nécessairement les dilatations et contractions longitudinales des fibres. Les expressions (70) de v et w, ou celles (84) jointes à la première (81), peuvent nous fournir cette connaissance. Elles donnent, pour la section où $x = 0$, en appelant y_1, z_1 les coordonnées nouvelles

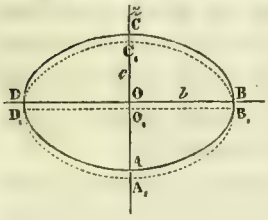
[1] Une partie de ces résultats a été insérée, en 1843, aux *Comptes rendus* (30 octobre et 6 novembre, t. XVII, p. 949 et 1024).

du point quelconque dont y, z étaient les coordonnées primitives,

$$(96) \qquad y_1 - y = -\varepsilon \frac{yz}{\rho}, \quad z_1 - z = \frac{\varepsilon y^2 - \varepsilon' z^2}{2\rho},$$

équations aux seconds membres desquelles l'on n'aurait qu'à ajouter respectivement $-\varepsilon \frac{P_x y}{E}$, $-\varepsilon' \frac{P_x z}{E}$ si (art. 37) le prisme éprouvait, avec la flexion, une traction P_x par unité superficielle de ses bases. En éliminant les coordonnées anciennes y, z au moyen de ces deux équations et de celle donnée du contour ancien de la section, l'on aura, en y_1 et z_1, l'équation du contour nouveau.

Si, par exemple, le contour de la section est une ellipse B C D A



représentée par $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, il faudra, pour obtenir la courbe ponctuée $B_1 C_1 D_1 A_1$ dans laquelle elle se transformera, éliminer y et z entre cette équation et celles (96).

L'élimination de y^2 avec la seconde équation (96) donnera d'abord

$$z = \frac{\rho c^2}{\varepsilon b^2 + \varepsilon' c^2} \left[1 - \sqrt{1 - (\varepsilon b^2 + \varepsilon' c^2) \left(\frac{2 z_1}{\rho c^2} - \frac{\varepsilon b^2}{\rho^2 c^2} \right)} \right]$$

ou, en développant le radical, et effaçant finalement aux dénominateurs le rayon de courbure ρ quand il est à une puissance supérieure à la première

$$z = z_1 + \frac{\varepsilon b^2 + \varepsilon' c^2}{2\rho c^2} z_1^2 - \frac{\varepsilon b^2}{2\rho}; \text{ d'où } y = y_1 \left(1 + \frac{\varepsilon z_1}{\rho} \right),$$

et, en substituant dans l'équation de l'ellipse :

$$\frac{y_1^2}{b^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon z_1}{\rho} \right) + \frac{z_1^2}{c^2} \left(1 + \frac{\varepsilon b^2 + \varepsilon' c^2}{\rho c^2} z_1 \right) = 1 + \frac{\varepsilon b^2}{\rho c^2} z_1.$$

Cette équation de la courbe $B_1 C_1 D_1 A_1$, lorsqu'on a $\varepsilon \frac{b^2}{c^2} + \varepsilon' = 2\varepsilon$ (ce qui comprend le cas plus particulier où la section est un cercle

et où l'élasticité d'extension est la même dans les sens y et z), se réduit, en négligeant toujours $\frac{c^2}{\rho^2}$, à

$$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{\left(z_1 + \frac{c^2\varepsilon'}{2\rho}\right)^2}{c^2} = 1.$$

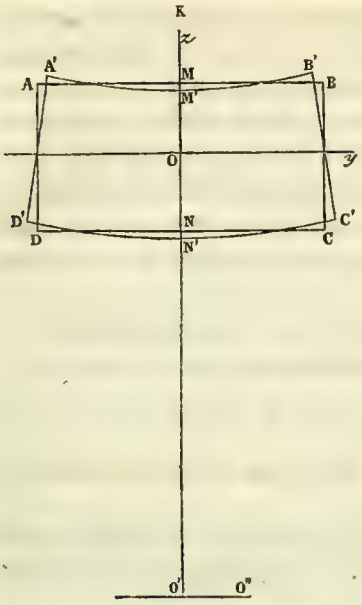
En sorte que la nouvelle courbe $B_1 C_1 D_1 A_1$ est une ellipse égale à l'ancienne A B C D, mais ayant son centre plus bas de $\frac{c^2\varepsilon'}{2\rho}$ (c'est-à-dire du 1/40 du rayon c de la section, si elle est un cercle et si $\varepsilon' = 1/4$, $\frac{c}{\rho} = 1/5$).

Dans la substitution de l'ellipse nouvelle à l'ancienne, le point matériel O, centre de celle-ci, n'a pas changé de place, mais il ne se trouve plus au centre de la section, parce que tous les autres points matériels se sont abaissés, en même temps qu'ils se sont rapprochés ou éloignés de l'axe vertical A C, selon qu'ils se trouvaient au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal B D.

Mais on obtiendra le contour des sections au moins aussi approximativement par une construction géométrique fondée sur cette simple considération, que les fibres, qui n'exercent latéralement les unes sur les autres aucune action puisqu'on a partout $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, doivent toutes se contracter ou se dilater suivant les sens transversaux y et z, dans les mêmes proportions $\pm\frac{\varepsilon z}{\rho}$, $\pm\frac{\varepsilon' z}{\rho}$ que si elles étaient isolées : d'où l'on peut conclure que si, sur Oz, prolongement du rayon de courbure O O', ou sur toute ligne parallèle, l'on prend un point K à une distance

$$O K = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

de la ligne des fibres invariables Oy, *toutes les droites tracées primitivement sur la section parallèlement à* Oy *seront devenues des arcs de cercle ayant ce point* K *pour centre, et toutes les droites tracées parallèlement à* Oz *seront devenues des rayons de ces arcs,* ou des droites *aboutissant en* K.



En effet, en prenant pour exemple une section rectangle A M B C N D dont b, c sont les demi-côtés AM = MB, et OM = ON, si nous portons $MM' = NN' = \frac{\varepsilon' c^2}{2\rho}$, en sorte que (d'après la seconde équation 96 en y faisant $y = 0$, $z = \pm c$, ou d'après l'intégrale $OM' = \int_0^{\pm c} dz \left(1 - \frac{\varepsilon' z}{\rho}\right) = \pm c - \frac{\varepsilon' c^2}{2\rho}$), M' et N' soient, sur N O z, les positions nouvelles des points M, N des côtés A B, D C, et si du point K comme centre nous décrivons des arcs de cercle $M'A' = M'B' = b\left(1 - \frac{\varepsilon c}{\rho}\right)$ et $N'D' = N'C' = b\left(1 + \frac{\varepsilon c}{\rho}\right)$, les lignes de jonction D' A', C' B' de leurs extrémités aboutiront en K en les prolongeant, puisque le rapport $\frac{KN}{KM}$, excessivement peu différent de celui $\frac{KN'}{KM'}$ des rayons de ces arcs, est égal à $\frac{\frac{\rho}{\varepsilon} - c}{\frac{\rho}{\varepsilon} + c}$, ou précisément au rapport des longueurs de ces mêmes arcs. D'où il suit, en faisant successivement le même raisonnement sur les divers éléments rectangles dans lesquels on peut diviser, avant la flexion, soit A B C D, soit *toute autre figure* par des parallèles et des perpendiculaires à la ligne O y des fibres invariables, que le quadrilatère mixtiligne A' M' B' C' N' D' représente la forme nouvelle prise par la section rectangle donnée, et que l'on obtiendra de la même manière, au moyen d'une suite d'arcs de cercle, les divers points du contour nouveau d'une autre section de forme quelconque.

44. *Forme courbe et inclinaison sur l'axe, prises par les sections primitivement planes et normales, lorsque la flexion est inégale ou non-circulaire.* — Indépendamment de la modification de leur contour, le plan même des sections se change en une surface courbe, et s'incline sur l'axe auquel il était normal, lorsque la flexion d'un prisme s'effectue autrement qu'en arc de cercle. Et cette deuxième sorte de changement des sections peut avoir, dans quelques cas, sur les résultats applicables, une influence dont il faille tenir compte.

Il y a en effet, aux divers points d'une section ω du prisme soumis à la flexion inégale, des glissements

$$\gamma_{xz} = \frac{p_{xz}}{e}, \quad \gamma_{xy} = \frac{p_{xy}}{f}$$

qui inclinent diversement, sur les fibres, les divers éléments des sections.

L'on peut prendre à peu près pour une section rectangle, en négligeant les termes peu influents des expressions (86) comme on a dit à la fin de l'article 40

$$\gamma_{xz} = -\frac{3P}{2e\omega}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad \gamma_{xy} = 0. \tag{97}$$

On détermine facilement la forme courbe que ces glissements donnent à la surface de la section ω, en rapportant celle-ci à un plan NN, mené par son centre o normalement à l'axe fléchi, auquel toutes les fibres sont restées sensiblement parallèles, et en menant, dans ce plan, deux axes coordonnés rectangulaires $o\,y'$, $o\,z'$, le premier parallèle aux y. Si l'on appelle u' la perpendiculaire $m\,p$ abaissée d'un point m de la section sur ce plan NoN, comme les coordonnées y', z' du pied p de cette perpendiculaire diffèrent très-peu des coordonnées primitives y, z du même point m, le glissement $\frac{p_{xz}}{e}$ en ce point est exprimé (form. 97) par $\frac{-3P}{2e\omega}\left(1 - \frac{z'^2}{c^2}\right)$. En l'égalant à $\frac{du'}{dz'}$ et intégrant, l'on trouve cette

équation de la surface affectée par les sections ω du prisme rectangle fléchi :

$$u' = -\frac{3\,\mathrm{P}\,c}{2\,e\,\omega}\left(\frac{z'}{c} - \frac{z'^3}{3\,c^3}\right).$$

Cette surface est, comme l'on voit, cylindrique, et coupée par des plans parallèles au plan de flexion $z\,\mathrm{A}\,x$, suivant une parabole du troisième degré $l\,o\,l$, infléchie en *doucine* ou en S, dont les deux moitiés symétriques sont normales en l, l aux deux faces du prisme perpendiculaires au même plan $z\,\mathrm{A}\,x$.

Les sections, d'un bout à l'autre du prisme, prennent sur son axe devenu courbe une inclinaison dont la grandeur, désignée art. 40 par g_o, est celle de $\frac{p_{zz}}{e}$ pour $y = 0$, $z = 0$, ou à peu près :

$$-\frac{3}{2}\frac{\mathrm{P}}{e\omega}.$$

Elle est une fois et demie ce qu'elle serait si les sections s'inclinaient sans se courber sous l'action d'une force transversale P également répartie sur leur surface.

Cette inclinaison peut, dans les prismes courts, amener la rupture par glissement des sections les unes devant les autres, ou (art. 28) des fibres les unes contre les autres (voyez chapitre XII).

On voit, par ce chapitre IV, que la méthode mixte de solution des problèmes de l'équilibre des corps élastiques peut, non-seulement, confirmer des résultats connus, en apprenant à quelles conditions ils sont exacts, mais encore les compléter, et donner sur les circonstances de la flexion des résultats nouveaux.

CHAPITRE V.

DE LA TORSION DES PRISMES. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES GÉNÉRALES.

45. *Énoncé du problème. — Données relatives tant aux déplacements qu'aux forces. — Définition géométrique du mouvement de torsion.* — Pour résoudre le problème de la torsion nous suivrons encore la marche intermédiaire ou semi-inverse des art. 2 et 34.

Nous nous donnerons *une partie des forces* en ce que nous sup-

poserons *que les pressions extérieures sur les faces latérales n'ont que des directions ou normales ou transversales, c'est-à-dire à angle droit sur les arêtes du prisme, en sorte qu'elles n'aient aucune composante dans le sens de ces arêtes.* Ordinairement ces pressions latérales sont nulles, ou bien elles sont constantes et normales aux faces.

Et nous nous donnerons *une partie des déplacements* ou de leurs rapports, en ce que nous supposerons que ces déplacements ont produit une *torsion* autour d'un axe parallèle à ses arêtes, torsion qui consiste *en ce que les déplacements transversaux des divers points appartenant primitivement à une même section quelconque perpendiculaire à l'axe ne diffèrent de ceux des points homologues d'une autre section, que par une rotation d'un même angle pour tous, autour du même axe;* en sorte que les points qui se correspondaient primitivement sur des droites parallèles à l'axe puissent être ramenés à se correspondre encore, en les faisant tourner d'un angle qui est le même pour les points des deux mêmes sections.

Remarquons que cette définition caractéristique que nous donnons de la *torsion* comme modification de l'état d'un prisme n'entraîne nullement la nécessité que les sections, en tournant les unes devant les autres, aient conservé leur forme primitive, ni même qu'elles aient été déformées toutes d'une manière identique. Il suffit que la déformation *transversale* (c'est-à-dire dans un sens perpendiculaire à l'axe) ait été la même pour toutes; du reste, les déplacements longitudinaux, ou parallèles à l'axe, de leurs points correspondants auront pu être inégaux et leurs sections auront pu, par conséquent, prendre des courbures différentes.

Et nous chercherons quelles grandeurs prendront les déplacements et quelles forces de réaction élastique ils développeront dans l'intérieur du corps, afin d'en déduire, réciproquement, quelle torsion est produite par des forces d'une intensité donnée, distribuées convenablement, et quelles limites il convient d'imposer à ces forces pour écarter tout danger de désagrégation de la matière du prisme, ou de disjonction de ses fibres par glissement mutuel.

46. *Notations qui serviront pour la suite (avec celles des art. 4, 6, 8, 11, 15, 18, 21, 22, 24, 27, 30, 36, 40 ci-dessus).* — Nous prendrons l'axe de torsion pour axe des x, et nous le supposerons, ainsi que ceux des y et des z, pris dans des directions rectangulaires telles que les composantes tangentielles de pression p_{xy}, p_{xz} aient des expressions monômes fg_{xy}, eg_{xz} (art. 16).

ω sera (comme aux art. 33, 36, 40) une section transversale quelconque du prisme, primitivement plane et perpendiculaire aux x, et à la distance x de l'origine.

$d\omega$ un de ses éléments superficiels, ayant son centre au point dont les coordonnées transversales sont y et z.

θ la *torsion* rapportée à l'unité de longueur du prisme, *pour la section* ω; ou l'arc, pour un rayon $= 1$, de la rotation qu'a effectuée, devant ω, une autre section qui en est à l'unité de distance; en sorte que θdx soit l'angle dont il faut faire tourner, autour de l'axe des x, tous les points matériels de la section ω, pour les amener, comme nous avons dit à l'article précédent, à correspondre sur des parallèles aux x avec ceux homologues d'une autre section ω' qui en est éloignée de dx sur cet axe.

Nous *regarderons* θ *comme positif lorsque la rotation a lieu de* y *en* z, c'est-à-dire lorsqu'un observateur adossé à l'axe des x, les pieds sur la section ω et la tête placée du côté où la coordonnée x augmente positivement, voit le petit arc de la rotation, devant ω, d'une autre section ω' placée de ce côté par rapport à ω se diriger d'un point du demi-axe positif des y à un point du demi-axe positif des z.

M_x *le moment de torsion*, pour la section ω, ou le moment total, autour de l'axe des x, des actions moléculaires qui s'exercent à travers cette section, ou, ce qui revient au même (art. 9), des pressions qui ont lieu sur ses divers éléments.

r et α seront les coordonnées polaires du point de la section ω dont y, z sont les coordonnées rectangles, en sorte que

$$(98)\quad y = r\cos\alpha,\quad z = r\sin\alpha,\quad r = \sqrt{y^2+z^2},\quad \alpha = \text{arc tang}\,\frac{z}{y}.$$

(99) $I = \int_0^\omega z^2\, d\omega$, $I' = \int_0^\omega y^2\, d\omega$ les moments d'inertie de la section autour des parallèles aux axes des y et des z tracées sur son plan, ordinairement par son centre de gravité.

(100) $J = I + I' = \int_0^\omega r^2\, d\omega$ son moment d'inertie *polaire*, ou autour de l'intersection de ces deux lignes.

$2b$, $2c$ les deux dimensions principales de la section (ou b, c ses demi-axes si c'est une ellipse, et ses demi-côtés si c'est un rectangle), ordinairement dans les sens y et z.

G, comme à l'art. 27, le coefficient d'élasticité de glissement quand il sera égal pour tous les sens perpendiculaires aux x, ou quand on aura (art. 17) $e = f = G$, ou (art. 16) $e''' = f''' = G$.

$\gamma_x = \sqrt{\gamma^2_{xy} + \gamma^2_{xz}}$ le glissement principal (art. 7) ou le plus grand de tous les glissements suivant une parallèle à x menée par le centre de l'élément $d\omega$.

T (comme à l'art. 27), la composante tangentielle de pression qu'il convient de ne pas dépasser, ou la plus grande valeur de $G\gamma_x$ qui ne mette pas la cohésion en péril, quand cette cohésion est, comme l'élasticité de glissement, la même pour tous les sens transversaux.

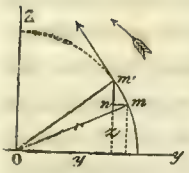
n, n' des nombres entiers quelconques, de 1 à l'infini (art. 61, 65, 66, 90, 91 ci-après);

m, a, A avec ou sans accents ou sous-lettres
λ, μ, μ', γ, γ_1, γ', γ'_1 (art. 84, 88, 112), } divers coefficients

$\pi = 3,14159265...$; $e = 2,7182818...$

47. *Équations caractéristiques de la torsion, ou expression de la donnée relative aux déplacements.* — Les points des deux sections infiniment voisines ω, ω' qui avaient primitivement l'un et l'autre pour coordonnées transversales y et z, ont, après les déplacements, des coordonnées

$$y + v \text{ et } z + w; \quad y + v + \frac{dv}{dx}\, dx \text{ et } z + w + \frac{dw}{dx}\, dx.$$



La situation actuelle du second ne diffère, par hypothèse (article précédent), de celle du premier que par une rotation d'un angle $\theta\, dx$, ou d'un petit arc $\theta r\, dx$. Comme cet arc $m\,m'$ fait, avec les axes des y et des z, des angles dont les cosinus sont respectivement

$$-\frac{z}{r},\quad \frac{y}{r},$$

ses projections $n\,m$, $n\,m'$ sur ces axes sont $-\theta z\, dx$, $\theta y\, dx$. Ce sont les grandeurs des excès $\frac{dv}{dx}dx$, $\frac{dw}{dx}dx$ des coordonnées du point de la deuxième section sur les coordonnées du point correspondant de la première. Donc on a :

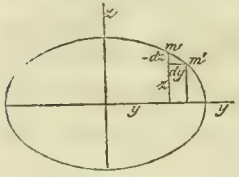
$$\frac{dv}{dx} = -\theta z,\quad \frac{dw}{dx} = \theta y. \tag{101}$$

Ce sont les équations qui expriment notre *donnée sur les déplacements*, et qui *caractérisent le mouvement de torsion* en général. La torsion θ est une quantité, ou constante, ou fonction de x seul[1].

[1] Tous les auteurs, sans exception, font, comme nous, tourner de y en z, de z en x, de x en y, les plans parallèles à ces coordonnées, lorsque les rotations ou les moments qui les produisent doivent être pris positivement. Nos formules sont donc, quant aux signes, en rapport avec ce qui se trouve dans tous les ouvrages.

S'il n'en est pas toujours de même de nos figures, cela tient à ce que les auteurs diffèrent quant à la disposition mutuelle des demi-axes positifs. Tous, il est vrai, quand ils ne considèrent que deux dimensions, ou deux coordonnées x, y, ou y, z, mettent, comme nous, le demi-axe de la première coordonnée à la droite du demi-axe de la seconde en dirigeant celui-ci de bas en haut, d'où il résulte que *la rotation positive* autour de l'origine *s'opère de droite à gauche* pour un observateur ayant les pieds à l'origine et la tête sur le côté positif ou antérieur de l'axe de rotation. Mais, tandis que M. Cauchy conserve cette disposition ou ce sens de la rotation positive en passant au cas général de trois dimensions ou de trois axes (*Application du calcul infinitésimal à la géométrie*, 1826, préliminaires, p. 3, ou *Exercices de mathématiques*, t. I, 1826, p. 67-68), la plupart des autres géomètres prennent alors une disposition ou un sens contraire, et dirigent, ainsi, de gauche à droite les trois rotations positives ou directes. Si ce dernier sens est « celui de la révolution diurne apparente du soleil pour un observateur debout au pôle nord », et si c'est aussi « celui dont la main fait tourner la plupart des instruments de rotation » (M. Poinsot,

48. *Expression de la donnée relative aux forces, c'est-à-dire aux pressions extérieures latérales.* — Quant à notre *donnée sur les forces*, consistant en ce que les pressions extérieures latérales ont des composantes nulles suivant les arêtes du prisme, ou ne produisent aucun frottement longitudinal, on peut l'exprimer, au moyen de la première équation définie générale (35) de l'art. 22, en y faisant $\cos\widehat{\Pi x} = 0$, $\cos\widehat{nx} = 0$, $\frac{\cos nz}{\cos ny} = -\frac{dy}{dz}$. Mais on peut aussi considérer directement qu'un élément de la surface latérale du prisme, ayant pour hauteur dx et pour base l'élément mm' du contour ω, a pour projections respectivement sur des plans perpendiculaires aux x, aux y, aux z



$$\text{zéro}, \quad -dz\,dx, \quad dy\,dx,$$

en sorte que, d'après le premier théorème de M. Cauchy (art. 10), la pression sur cet élément, décomposée parallèlement aux x, est résultante de deux forces

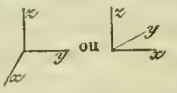
$$-p_{yx}\,dz\,dx, \quad p_{zx}\,dy\,dx,$$

qui s'ajoutent puisqu'elles ont la même direction. Donc, comme cette pression latérale suivant les x est supposée nulle, on a, pour expression de la donnée sur les forces (comme à l'art. 40) :

$$p_{zz}\,dy - p_{xy}\,dz = 0, \tag{102}$$

où dz, dy sont relatifs *au contour des sections*. On obtiendrait

Statique, huitième édition, 1842, art. 60), le sens de droite à gauche est celui de la rotation réelle de la terre et des autres astres ; en sorte que les raisons naturelles se balancent tout au moins. Nous placerons donc, avec M. Cauchy, nos axes coordonnés de cette manière qui conserve, avec trois dimensions, la même disposition mutuelle qu'avec deux, et qui place dans le plan du tableau le plan coordonné yz, ordinairement le premier des trois ; ce qui donne constamment le sens *de droite à gauche* pour le sens *direct ou positif de rotation*.



encore cette équation en considérant qu'à toutes les actions moléculaires traversant l'élément $m\,m'$ de la surface d'une tranche du prisme, répondent des actions moléculaires égales et parallèles, traversant l'une ou l'autre de ses deux projections dy et $-dz$.

49. *Immobilité qu'on peut supposer à l'un des points de l'axe, etc. Réduction au cas des déplacements très-petits.* — Pour tirer de ces équations, combinées avec celles du chapitre 1^er^, la détermination des déplacements, remarquons d'abord :

1° Que nous pouvons toujours attribuer l'immobilité à l'un des points matériels de l'axe de rotation, à celui, par exemple, qui est pris pour origine des coordonnées, ainsi qu'à la direction de cet axe dans l'espace et à celle d'un quelconque des éléments plans qui y passent, par exemple d'un élément passant aussi par l'axe des y.

Cette supposition permise revient à ramener le point, la ligne et la petite surface plane à leurs situations primitives s'ils s'en étaient écartés, par une translation et une rotation générale ne changeant rien ni aux déplacements relatifs, ni aux forces que ces déplacements développent (fin de l'art. 8).

2° Que la torsion θ, bien qu'on la suppose assez petite en chaque endroit pour que les déplacements relatifs ne sortent nulle part sensiblement des limites de l'altération de la contexture, peut cependant produire une rotation d'un angle considérable, s'élevant même à plus d'une circonférence, et, par conséquent, des déplacements transversaux très-grands d'une extrémité à l'autre, si ce prisme a une longueur très-grande par rapport aux dimensions de ses sections; mais que nous n'aurons à calculer que de petits déplacements en ne nous occupant, à la fois, que d'une seule des portions très-courtes dans lesquelles on peut diviser le prisme par la pensée, car on peut placer sur cette portion le point et les éléments immobiles dont nous venons de parler.

De cette manière nous pourrons toujours appliquer les formules générales du chapitre 1^er^, qui supposent ces déplacements très-

petits; sauf, lorsque nous aurons trouvé les déplacements, à cumuler ceux relatifs aux diverses portions, pour avoir les déplacements totaux d'une grandeur quelconque.

50. *Glissements. Moments de torsion. Équations indéfinie et définie.* Or, les relations caractéristiques (101) $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$ introduites dans les formules (11) $\mathfrak{g}_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$, $\mathfrak{g}_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}$ des glissements, et $p_{xy} = \mathrm{f}\,\mathfrak{g}_{xy}$, $p_{xz} = \mathrm{e}\,\mathfrak{g}_{xz}$ des pressions tangentielles réduites à la forme monôme (art. 16) et où nous supprimons les accents, donnent

$$\mathfrak{g}_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z, \quad \mathfrak{g}_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y. \tag{103}$$

$$p_{xy} = \mathrm{f}\left(\frac{du}{dy} - \theta z\right), \quad p_{xz} = \mathrm{e}\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right). \tag{104}$$

Ce que nous avons appelé (art. 46) le moment de torsion, et désigné par M_x, n'est autre chose que la somme des moments, autour de l'axe des x, des composantes de pression, ou, pour mieux dire, de *traction* $p_{xx}\,d\omega$, $p_{xy}\,d\omega$, $p_{xz}\,d\omega$ sur les divers éléments $d\omega$. La première composante a un moment nul puisqu'elle est parallèle à l'axe; les deux autres ont, pour bras de levier, z et y, mais la dernière agit dans un sens opposé à celui dans lequel nous supposons que la torsion s'opère (art. 47). Donc on a :

$$\mathrm{M}_x = \int_0^\omega d\omega\ (p_{xz}\,y - p_{xy}\,z), \tag{105}$$

ou, en substituant (103) et (104) :

$$\mathrm{M}_x = \int_0^\omega d\omega \left[\mathrm{e}\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) y - \mathrm{f}\left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) z\right]. \tag{106}$$

Cette expression se réduirait à

$$\theta\,(\mathrm{e}\int y^2\,d\omega + \mathrm{f}\int z^2\,d\omega) = \theta\,(\mathrm{f}\,\mathrm{I} + \mathrm{e}\,\mathrm{I}'),$$

c'est-à-dire, lorsque $e = f$, au moment d'inertie polaire $J = \int r^2 d\omega$ de la section multiplié par la torsion θ et le coefficient d'élasticité de glissement e si les déplacements longitudinaux u étaient nuls ou constants sur chaque section, *c'est-à-dire si les sections restaient planes et perpendiculaires à l'axe.* C'est ce qu'admettait l'ancienne théorie de la torsion. Mais cela n'est vrai, comme nous verrons, que dans le cas pour lequel Coulomb a établi cette théorie, savoir pour le cylindre à base circulaire. On voit que, pour arriver à la connaissance si importante du moment M_x et des glissements g, *il faut connaître les déplacements longitudinaux u des molécules du prisme tordu.*

Or, les mêmes relations (101) $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$ réduisent l'équation différentielle indéfinie (34) de l'art. 21, la plus générale de celles des cas où p_{xy}, p_{xz} sont réduits à un seul terme, à celle-ci *qui ne contient plus que le déplacement u,* et dont nous supprimons le second membre X comme nous avons dit à ce même article :

$$a\frac{d^2u}{dx^2} + f\frac{d^2u}{dy^2} + e\frac{d^2u}{dz^2} + j\frac{d^2u}{dxdy} + i\frac{d^2u}{dxdz} + (iy - jz)\frac{d\theta}{dx} = 0.$$

Il s'agit de l'intégrer de manière à remplir, pour les points de la surface, la condition (102) $p_{xz}\,dy - p_{xy}\,dz = 0$ qui, par la substitution des valeurs (104) de p_{xy}, p_{xz}, devient :

$$(107) \qquad e\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right)dy - f\left(\frac{du}{dy} - \theta z\right)dz = 0.$$

C'est l'équation définie *à satisfaire pour les points du contour des sections du prisme.*

Nous ne ferons cette intégration que pour le cas, encore très-étendu, dans lequel la déformation opérée, ou la contexture du corps, est telle que

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad j\frac{d^2u}{dxdy} = 0, \quad i\frac{d^2u}{dxdz} = 0,$$

c'est-à-dire le cas dans lequel *la dilatation longitudinale* $\frac{du}{dx}$ *est, ou*

nulle, ou constante par tout le corps, ou bien dans lequel cette dilatation n'étant constante que pour chaque droite matérielle parallèle à l'axe de torsion, il y a un plan principal d'élasticité perpendiculaire au même axe (ce qui donne $i = 0$, $j = 0$).

Nous aurons ainsi, en supposant en outre que la torsion θ est constante d'un bout à l'autre si i et j ne sont pas nuls :

$$f\frac{d^2u}{dy^2} + e\frac{d^2u}{dz^2} = 0. \tag{108}$$

C'est l'équation indéfinie, relative à tous les points du prisme tordu.

Son mode d'intégration dépendra de la forme du contour des sections que nous considérerons successivement.

51. *Simplifications pour les premières solutions qu'on donnera. Égale élasticité de glissement. Nullité des dilatations longitudinale et transversale, et des flexions.* — Mais, pour éviter toute complication de nature à jeter de l'obscurité sur les points délicats que nous aurons à traiter, nous commencerons par supposer que

$$e = f = G,$$

et, par conséquent (art. 17), que l'*élasticité de glissement est la même suivant toutes les directions perpendiculaires à x dans des plans parallèles à cette coordonnée, ou la même, suivant x, dans les mêmes plans;* ce qui n'empêche pas, avons-nous dit, la contexture du corps de pouvoir être, du reste, très-différente dans les sens des x, y, z Nous aurons ainsi, pour l'équation indéfinie à intégrer,

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0, \tag{109}$$

et pour l'équation définie relative aux contours des sections,

$$\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) dy - \left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) dz = 0. \tag{110}$$

Dans le chapitre X, nous verrons quelles modifications faciles doivent être faites aux formules pour embrasser le cas général d'inégale élasticité.

Nous supposerons aussi, dans les chapitres VI, VII, VIII, IX, non par nécessité, mais pour éviter en commençant ce qui pourrait mêler à la torsion des éléments étrangers, qu'il n'y a ni contraction, ni dilatation dans les trois sens x, y, z, ni glissement q_{yz} tendant à ouvrir ou à fermer l'angle droit des lignes tracées sur les sections parallèles aux y et aux z, ou qu'on a

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0,$$

ce qui entraîne l'absence aussi de toute flexion, puisqu'un prisme ne peut fléchir sans qu'il y ait des dilatations $\frac{du}{dx}$, inégales d'un point à l'autre d'une même section.

L'analyse nous apprendra si ces hypothèses sont compatibles avec celle du mouvement de torsion, et quelles forces produisent leur exacte réalisation.

Dans un chapitre spécial (chapitre XII), nous traiterons les cas où il y a des dilatations, des flexions, etc. en même temps qu'une torsion.

CHAPITRE VI.

TORSION D'UN PRISME OU CYLINDRE À BASE ELLIPTIQUE.

52. *Détermination des déplacements longitudinaux.* — Le cas où le prisme a pour section droite une ellipse est le plus simple de tous.

Comme l'équation du contour

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donne

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

la condition définie (110) ou (102) du cas d'égale élasticité transversale est

$$(111) \quad b^2 z\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) + c^2 y\left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) = 0, \text{ pour } \begin{cases} z = \pm c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \\ \text{ou } y = \pm b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}. \end{cases}$$

Voyons si nous pouvons y satisfaire en prenant pour u une expression polynôme entière par rapport à y et z, d'un nombre fini ou infini de termes, c'est-à-dire par :

$$(112)\quad \left\{\begin{array}{l} u = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \text{etc.} \\ \qquad a'_1 z + a'_2 y z + a'_3 y^2 z \\ \qquad\quad + a''_2 z^2 + a''_3 y z^2 \\ \qquad\qquad + a'''_3 z^3 \end{array}\right.$$

où a_1, a'_1,... sont des nombres constants, puisque nous ne supposons aucune dilatation longitudinale. Nous n'ajoutons pas de terme indépendant de y et z parce que (art. 49) l'un des points de l'axe est supposé immobile.

En substituant dans l'équation définie (111) relative aux seuls points du contour, on a celle-ci :

$$\begin{array}{l} c^2 [a_1 y + (a'_2 - \theta) y z + 2 a_2 y^2 + 3 a_3 y^3 + 2 a'_3 y^2 z \\ \qquad + a''_3 y z^2 + \ldots\ldots] + \\ + b^2 [a'_1 z + (a'_2 + \theta) y z + 2 a''_2 z^2 + a'_3 y^2 z + 2 a''_3 y z^2 \\ \qquad - 3 a'''_3 z^3 + \ldots\ldots] = 0, \end{array}$$

à laquelle on peut satisfaire d'une infinité de manières, quel que soit ou y, ou z. On y satisfait, par exemple, en faisant nuls tous les coefficients a, excepté celui a'_2 qui doit être tel que

$$c^2 (a'_2 - \theta) + b^2 (a'_2 + \theta) = 0.$$ [1]

D'où, pour sa valeur

$$a'_2 = - \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta.$$

[1] On peut remarquer que les termes du premier degré $a_1 y$ et $a'_1 z$, s'ils subsistaient, représenteraient des rotations autour des axes des z et des y respectivement. Ils doivent être nuls parce que les équations de condition $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$ sont établies pour la supposition qu'il n'y a de rotation, même générale, qu'autour de l'axe des x.

Or, on reconnaît de suite que l'équation différentielle indéfinie (109) $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$, est satisfaite aussi par la valeur $u = a'_2 yz$, qui en résulte, car elle donne $\frac{d^2u}{dy^2} = 0$, $\frac{d^2u}{dz^2} = 0$. On a donc pour la solution des équations du problème

$$u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\theta yz. \tag{113}$$

53. *Glissements, et moment de torsion.*—Il résulte de cette valeur de u, pour les glissements

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z = -\frac{2b^2\theta z}{b^2 + c^2}, \quad \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y = \frac{2c^2\theta y}{b^2 + c^2}. \tag{114}$$

Et par conséquent, pour le moment de torsion $G\int d\omega\,(\gamma_{xz}\,y - \gamma_{xy}\,z)$ (expressions 105, 106),

$$M_x = 2\,G\theta\,\frac{b^2\int z^2 d\omega + c^2\int y^2 d\omega}{b^2 + c^2}.$$

Comme le moment d'inertie d'un cercle de rayon c autour de son diamètre est moitié du moment d'inertie polaire $\int_0^c r^2 .\, 2\pi r\, dr$, et est, par conséquent, égal à $\frac{\pi c^4}{4}$, l'on a, en multipliant par $\frac{b}{c}$, $\frac{\pi b c^3}{4}$ pour le moment de notre ellipse autour de son axe $2b$, et, par conséquent (art. 46) :

$$I = \int z^2\, d\omega = \pi\,\frac{b\,c^3}{4},\quad I' = \int y^2\, d\omega = \pi\,\frac{b^3 c}{4}. \tag{115}$$

D'où, pour le moment de torsion :

$$M_x = G\theta\,\frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2} = G\theta .\,\frac{4\,I\,I'}{I + I'} = \frac{4\,G\theta}{\frac{1}{I} + \frac{1}{I'}}, \tag{116}$$

ou le coefficient d'élasticité de glissement multiplié par la torsion et par deux fois l'inverse de la demi-somme des inverses des moments d'inertie de la section autour de ses deux axes de figure.

54. *Déplacements transversaux.* — Si l'on veut avoir l'expression des déplacements v, w, on n'a qu'à intégrer $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$ eu égard à ce nous supposons (art. 51) les dilatations transversales nulles ou $\frac{dv}{dy} = 0$, $\frac{dw}{dz} = 0$, ce qui donne, F et f étant deux fonctions arbitraires :

$$v = -\theta x z + \mathrm{F}(z), \quad w = \theta x y + f(y).$$

Et comme on suppose aussi (même art. 51) $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0$, on doit avoir $\mathrm{F}'(z) + f'(y) = 0$ en sorte que les fonctions dérivées de F, f ne peuvent être que deux constantes égales au signe près, d'où, k, k', k'' étant trois constantes,

$$v = -\theta x z - k z + k', \quad w = \theta x y + k y + k''.$$

Mais ces trois constantes doivent être faites nulles, savoir, celles k' et k'' puisque nous supposons (art. 49) immobile l'origine pour laquelle $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; et, également celle k qui représenterait une petite rotation générale autour de l'axe des x, puisque l'on suppose (même art. 49) qu'une portion petite ou grande du plan des xy, près de l'origine, n'a pas tournée.

On a donc pour les déplacements transversaux, d'après toutes nos suppositions ou données :

$$v = -\theta x z, \quad w = \theta x y, \tag{117}$$

ou ce qui résulte de la seule torsion, sans aucun changement *transversal* dans la forme ou les dimensions des sections.

55. *Pressions qui en résultent.* — Avec de pareilles valeurs (113) et (117) des déplacements, on a partout (art. 15) :

$$p_{xx} = 0, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0$$

ou aucune composante normale de pression sur les bases extrêmes ainsi que sur les autres sections droites, et *aucune pression sur les faces latérales*, puisque les trois dernières équations qu'on vient

d'écrire apprennent qu'elles n'ont que des composantes nulles dans les sens perpendiculaires aux x, et que l'équation définie $q_{xz}\,dy - q_{xy}\,dz = 0$, à laquelle satisfont les déplacements, exprime précisément (art. 48) que ces pressions n'ont que des composantes nulles dans le sens des x.

Et comme cette équation définie a pu être satisfaite quels que soient y et z, sans avoir besoin de substituer à l'une de ces coordonnées, z par exemple, sa valeur $\pm c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ en fonction de l'autre tirée de l'équation du contour elliptique de la section, mais en donnant à dz sa valeur $-\frac{c^2 y}{b^2 z}\,dy$ tirée de cette même équation, on voit que la pression est nulle, non-seulement à la surface latérale extérieure, mais aussi, à l'intérieur, sur toutes les surfaces cylindriques ayant même axe, et des bases elliptiques pour lesquelles le rapport $\frac{b}{c}$ des axes soit le même, c'est-à-dire des bases semblables à celles du prisme (voyez le chapitre XI, où nous traiterons des prismes creux).

Mais les composantes tangentielles p_{xy}, p_{xz} de pression dans les sens y, z sur les sections, ou, dans le sens x, sur les faces parallèles à l'axe de rotation, ne sont point nulles. On a (expressions 114)

$$(118)\qquad p_{xy} = -\,G\theta\,\frac{2b^2 z}{b^2+c^2},\quad p_{xz} = G\theta\,\frac{2c^2 y}{b^2+c^2}.$$

Toutes les sections, et *notamment les bases extrêmes*, sont donc sollicitées, dans leur plan, par des forces respectivement parallèles aux y et aux z, et proportionnelles à la fois à leurs bras de levier z, y autour de l'axe, et aux carrés b^2, c^2 des demi-axes parallèles aux directions où elles agissent; forces dont la résultante, en chaque point, est tangente à une ellipse concentrique et semblable à celle du contour.

Telles sont les forces que développent nos déplacements u, v, w.

56. *Solution du problème proposé de la détermination des dépla-*

cements étant données les forces. — Réciproquement, si la surface extérieure d'un prisme ou cylindre elliptique est sollicitée par de pareilles forces supposées données, savoir, forces nulles sur les faces latérales, forces longitudinales ou normales nulles sur les deux bases extrêmes, et forces transversales ou tangentielles distribuées, sur ces mêmes bases, comme on vient de dire pour p_{xy}, p_{xz}, ou représentées par les formules (118), les déplacements u, v, w supposés cherchés seront ceux que donnent les formules (113) et (117) des articles précédents, ou

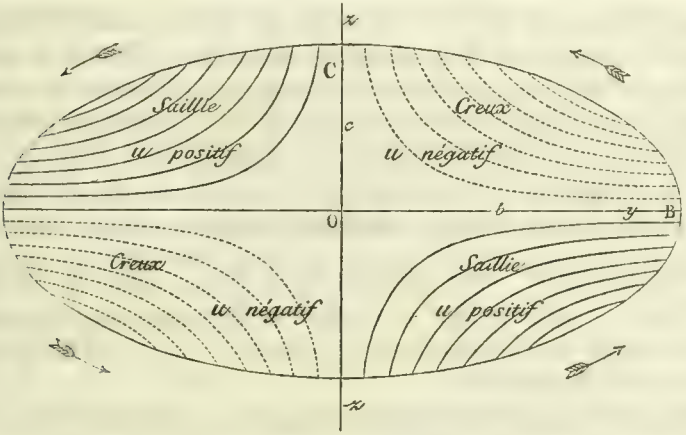
$$(119) \quad u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\,\theta\, yz, \quad v = -\theta\, xz, \quad w = \theta\, xy.$$

En effet, ces formules satisfont, pour le cas e = f, aux équations indéfinies (32) ou (34) de l'art. 21 et à l'équation définie $b^2 z\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) + c^2 y\left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) = 0$ d'un pareil problème. Et elles sont les seules à y satisfaire, car le problème des déplacements est complétement déterminé lorsqu'on donne les forces agissant sur la surface extérieure, en négligeant les effets de la pesanteur et de l'inertie vibratoire qui peuvent solliciter les points de l'intérieur, et lorsqu'on regarde comme immobile un point, une droite matérielle et un élément plan du corps (art. 49), de manière à n'avoir ni translations, ni rotations générales de ses points. On peut s'assurer encore, comme aux art. 30 et 38, de l'unité de la solution, si l'on pose u, v, w égaux aux expressions (113) et (117), plus trois inconnues u', v', w' qui, après substitutions dans les équations, se trouveront être les déplacements des points d'un prisme qui ne serait sollicité par rien, ou pour lequel la torsion θ serait zéro, c'est-à-dire se trouveront avoir des valeurs nulles, en sorte qu'il n'y a rien à ajouter à ces expressions (113) et (117), ou (119), pour avoir u, v, w.

57. *Gauchissement de la section. — Son influence. — Cas de la section circulaire où le gauchissement est nul.* — L'expression (113)

$$u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\,\theta\, yz$$

prouve que la section ω primitivement plane ne reste pas plane. Elle est devenue un *plan gauche* ou paraboloïde hyperbolique, dont le sommet est au centre. Le coefficient de yz peut être regardé comme mesurant le degré de *gauchissement;* il est, comme



l'on voit, proportionnel à la torsion θ, et d'autant plus grand, aussi, que les axes de l'ellipse sont plus inégaux; sans toutefois pouvoir dépasser θ. L'ordonnée u, perpendiculaire au plan primitif de la section, est négative dans la région *soit des y et z positifs, soit des y et z négatifs*, lorsque b est plus grand que c, la torsion ayant lieu (comme nous l'avons supposé) de y en z dans ces deux régions, pour un observateur placé du côté des x positifs. Et *u est positif dans les deux autres régions* ou quarts d'ellipse, en sorte que la section *gauchie* offre deux saillies, figurées par les petites courbes hyperboliques pleines représentant des coupes topographiques par des plans perpendiculaires à l'axe de torsion, et deux creux ou dépressions figurées par les coupes ponctuées (voy. art. 62 la projection verticale ou l'élévation du prisme tordu).

Lorsque

$$b = c,$$

ou que la section est un cercle, l'on a

$$(120)\quad \begin{cases} u = 0,\ g_{xy} = -\theta z,\ g_{xz} = \theta y,\ g_x = \sqrt{g^2_{xy} - g^2_{xz}} = \theta r, \\ M_x = 2\,G\,I\theta = G\,J\theta = G\,\frac{\pi bb'}{2}\,\theta. \end{cases}$$

Le gauchissement est nul, en sorte que les sections circulaires planes restent planes et perpendiculaires à l'axe, comme on pouvait le prévoir, puisque aucune de leurs parties n'a alors de raison de se courber plutôt d'un côté que de l'autre. Les glissements principaux (art. 7) se réduisent aux inclinaisons que prennent, sur des parallèles à l'axe du prisme, les fibres ou files de molécules primitivement droites aussi et parallèles à cet axe, mais devenues des hélices ayant toutes le même pas $\frac{2\pi}{\theta}$. Enfin le moment de torsion (120) est égal au coefficient d'élasticité de glissement multiplié par le moment d'inertie polaire $J = \int r^2\,d\omega$ de la section et par la torsion θ.

Ce résultat, que Coulomb a fait connaître, avait été étendu, par divers auteurs, à des prismes ou cylindres à bases quelconques. Mais la formule de Coulomb $M_x = G\,J\,\theta$ *n'est exacte que pour le cas où il l'a donnée*, où il n'y a aucun *gauchissement*. Pour tout autre cas que $b = c$, et plus généralement pour toute autre section que le cercle, elle donne un moment trop fort. Ainsi pour l'ellipse, comme on a

$$\frac{4\,I\,I'}{I+I'} = \frac{(I+I')^2 - (I'-I)^2}{I+I'} = J - \frac{(I'-I)^2}{J},$$

l'on voit bien que le moment $M_x = G\,\frac{4\,I\,I'}{I+I'}\,\theta$ est toujours moindre que $G\,J\,\theta$, et que si I est très-petit par rapport à I', ou c^4 par rapport à b^4, l'on a sensiblement

$$M_x = 4\,G\,I\theta,$$

valeur qui est très-petite par rapport à celle $G\,(I + I')\,\theta$ de la théorie ancienne dont nous parlons, et qu'il faut abandonner.

Cela vient de ce que, sur la section gauchie, les inclinaisons des fibres devenues hélicoïdales sont, moyennement, bien plus petites que sur une section non gauchie; elles sont même presque nulles aux extrémités du grand axe $2c$ de l'ellipse, s'il est très-grand par rapport au petit axe $2b$, comme nous le verrons art. 61. La résistance à la torsion, due à ces inclinaisons qui déterminent les glissements principaux (art. 7), est donc bien moindre que dans l'ancienne théorie, où l'on ne tenait pas compte du déplacement longitudinal et inégal u, cause du gauchissement [1].

Au reste, l'expression $G J \theta$ de Coulomb relative au cylindre circulaire, comme la nôtre relative au cylindre elliptique, exige, pour être exacte, que les pressions soient appliquées et distribuees sur les bases extrêmes précisément comme sont les pressions intérieures, ou comme nous avons dit pour p_{xy}, p_{xz} (art. 55, 56), car on a, lorsque $b = c$,

$$(121) \qquad p_{xy} = -G\theta z, \quad p_{xz} = G\theta y,$$

ce qui résulte d'ailleurs immédiatement de la forme d'hélice prise par les fibres, et de la proportionnalité de ces pressions aux glissements; en sorte qu'il faut que ces forces, déterminant la torsion du cylindre circulaire, agissent en tous les points de ses bases, et aient des directions tangentes aux divers cercles que l'on peut y tracer concentriquement au contour, et des intensités proportionnelles à leurs rayons [2].

[1] Bien loin que la résistance élastique à une torsion déterminée d'un prisme soit constamment proportionnelle au moment d'inertie polaire de sa section, elle est, *pour même superficie de cette section* ω, ou pour même volume de matière, *en raison inverse de ce moment* J dans les prismes elliptiques; car les expressions $\omega = \pi bc$, $J = \frac{\pi}{4}(bc^3 + b^3c)$, et (116) $M_z = G\theta \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}$ donnent $\frac{M_z}{G\theta} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{\omega^4}{J}$, quelque soit le rapport des axes $2b$, $2c$. Un prisme résiste d'autant moins, à volume égal, que le moment J de sa base est plus grand.

[2] Dans une note sur la torsion des prismes, où l'illustre analyste veut bien citer notre travail dans des termes bienveillants, M. Cauchy (*Comptes rendus*, 20 février 1854, t. XXXVIII, p. 326-332) remarque que lorsque l'axe de torsion ou des x est un *axe d'élasticité*, θ n'a pas besoin d'être constant aux divers points de chaque

58. *Cas de la pratique.* — Ce mode d'application et de distribution, sur les bases extrêmes, dans leur plan, et avec les valeurs (118), des forces produisant la torsion, n'a jamais lieu dans la pratique : et l'on ne sait pas (art. 1[er]), soit qu'on ait un prisme elliptique ou circulaire, déterminer exactement les déplacements lorsque ce mode est différent, par exemple lorsque les forces ap-

section pour que nos suppositions (art. 47) $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$, et (art. 50) $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ reduisent la première des trois équations différentielles indéfinies (32) de l'art. 21 à la forme simple et intégrable $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$: il suffit pour cela, observe-t-il, que θ soit fonction du rayon recteur $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, car la somme des deux derniers termes de cette équation différentielle (32) qui se réduit, pour ce cas d'un axe d'élasticité, à $(e + e')\left(\frac{d^2v}{dx\,dy} + \frac{d^2w}{dx\,dz}\right)$, s'annule évidemment, comme pour $\frac{d\theta}{dy} = 0$, $\frac{d\theta}{dz} = 0$, lorque l'on a seulement $\frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{dy} = \frac{d\theta}{dr}\frac{y}{r}$, et $\frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{dz} = \frac{d\theta}{dr}\frac{z}{r}$.

Nous ne chercherons pas à généraliser nos solutions conformément à cette ingénieuse remarque, ou en supposant θ variable dans le sens transversal : car il est facile de voir que cette variabilité exige l'existence de forces que l'on n'a pas à considérer généralement dans les applications.

En effet, quelle que soit, lorsque θ varie transversalement, la valeur du déplacement u en fonction des coordonnées transversales y et z, si on le suppose toujours le même pour toutes les sections, en sorte que $\frac{du}{dx}$ soit nul, ou si, seulement, $\frac{du}{dx}$ est indépendant de y et z, en sorte que les termes $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, $\frac{d^2u}{dz\,dx}$ disparaissent des seconde et troisième équations différentielles indéfinies (32), l'on trouve facilement que les valeurs (117) $v = -\theta xz$, $w = \theta xy$, avec θ fonction de r, substituées dans ces équations, les réduisent (vu que, art. 18, $e = f$, $b = c = 2d + d'$, $d' = d''$, $e' = f''$) à

$$\frac{v}{r}\left(3\frac{d\theta}{dr} + r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)d = \frac{Y}{z} = \frac{-Z}{y}.$$

D'où il suit que la variabilité de θ avec la distance r à l'axe, ou le glissement supposé, l'un contre l'autre, des divers anneaux dans lesquels on peut diviser chaque section par des cercles ayant leur centre sur l'axe de torsion, exige, ou que les éléments de la matière du prisme soient sollicités par les forces $\sqrt{Y^2 + Z^2}$ agissant toutes tangentiellement à ces cercles, ce qui n'est guère supposable physiquement,

pliquées près des extrémités agissent sur les faces latérales, avec ou sans l'intermédiaire d'autres corps tels que des leviers.

Mais notre solution nous apprend que si les pressions sur deux sections quelconques, extrêmes ou non, sont représentées par les formules (118), elles seront absolument les mêmes sur toutes les sections intermédiaires, et la torsion sera uniforme et représentée

ou qu'on ait

$$3\frac{d\theta}{dr}+r\frac{d^2\theta}{dr^2}=0, \text{ d'où } \theta=\theta_0+\frac{K}{r^2}, \ (\theta_0 \text{ et K désignant deux constantes}):$$

c'est-à-dire exige que la torsion se compose d'une partie constante et d'une partie en raison inverse du carré du rayon vecteur, l'une ou l'autre de ces deux parties pouvant être nulle.

Or si l'on substitue les valeurs $v=-\left(\theta_0+\frac{K}{r^2}\right)xz$, $w=\left(\theta_0+\frac{K}{r^2}\right)xy$ qui en résultent, à la place de ces déplacements transversaux dans les formules (28) des composantes de pression, du cas où x est un axe d'élasticité, en faisant toujours $\frac{du}{dx}=0$, l'on obtient:

$$p_{yy}=-p_{zz}=\frac{4\,d}{r^2}Kxyz, \quad p_{yz}=\frac{2\,d}{r^2}.Kx(z^2-y^2).$$

Substituant dans les seconde et troisième équations *définies* générales (35) qui, pour la surface latérale d'un prisme dont les arêtes sont parallèles aux x (et en considération de ce que $\cos \Pi x=0$), se réduisent à $p_{yy}\sin n z+p_{yz}\cos n z=-\Pi\cos\Pi y$, $p_{yz}\sin n z+p_{zz}\cos n z=-\Pi\sin\Pi y$, elles donnent successivement, si l'on ajoute leurs carrés et si on les divise l'une par l'autre:

$$\Pi=\frac{2\,d}{r^2}Kx, \quad \operatorname{tang}\widehat{\Pi y}=\operatorname{tang}(\widehat{n z}-2.\widehat{rz}).$$

D'où il suit que la surface latérale du prisme devrait être sollicitée, en chacun de ses points, par une force Π qui, rapportée à l'unité superficielle, serait en raison inverse du rayon vecteur r de ce point, et proportionnelle à sa distance x de la section fixe ou d'encastrement; et dont la direction serait déterminée par l'angle $\widehat{\Pi y}=$ angle $\widehat{n z}$ moins deux fois l'angle $\widehat{rz}$; direction qui serait tangente à la base quand celle-ci serait circulaire.

Comme de pareilles actions, s'exerçant avec continuité sur les faces latérales, ne se présentent guère dans la nature, nous continuerons à ne traiter que des problèmes dans lesquels la torsion θ est indépendante de y et z, ou *la même pour tous les points de chaque section.*

par les formules (119), ou (113) et (117). Nous avons donc trouvé un état constant aux divers points du prisme, analogue à l'état *permanent* aux divers instants, qui s'établit après une faible durée dans l'écoulement des fluides sous charge constante, dans l'action des moteurs sur les machines, etc. Cet état-limite se réalise de plus en plus exactement dans les longs prismes, à mesure qu'on s'éloigne davantage de leurs extrémités, comme l'état final ou de permanence auquel nous le comparons se confond de plus en plus avec l'état réel à mesure qu'on s'éloigne d'un instant initial, et se maintient de lui-même s'il est une fois établi.

L'expérience prouve même que, quel que soit ce mode de distribution des forces, cet état constant s'établit déjà très-près de leurs points d'application, pourvu que, vers chaque extrémité, elles fassent couples et soient appliquées à peu près symétriquement de part et d'autre du centre de figure de la section d'un prisme; et l'on reconnaît qu'il se produit, à partir de distances à peine sensibles, une torsion uniforme, changeant en hélices les droites matérielles précédemment parallèles à l'axe. L'identité des effets pour des modes d'application et de distribution très-divers, mais symétriques des forces, prouve que l'influence du mode ne se fait sentir que sur une très-petite étendue, au delà de laquelle la distribution des composantes de pression sur les sections intérieures s'opère à très-peu près comme l'indiquent nos expressions (118) de p_{xy}, p_{xz}; et l'on peut, en exceptant ces points situés proche des extrémités, ou deux portions très-courtes du prisme que l'on peut toujours renforcer, adopter pour la pratique tous les résultats ci-dessus d'une manière aussi approximative qu'on peut le désirer.

C'est ce qu'on fait pour l'*extension* des prismes que tout le monde calcule par l'expression (62) $\partial_x = \frac{P}{E}$ ou en divisant par $E\omega$ la résultante longitudinale $P\omega$ des forces de traction, bien que ces forces ne soient pas distribuées d'une manière égale aux divers points des bases, ainsi que l'exigerait l'exactitude de la solution qu'on adopte ainsi, ni même appliquées à ces bases (art. 33). C'est

ce qu'on fait généralement aussi pour la flexion, dont on regarde les circonstances comme suffisamment bien représentées par les formules (71) et (75), ou (81), $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$, $\vartheta_x = \frac{z}{\rho}$, bien que les forces dont le moment constant ou variable est M ne soient pas appliquées sur les bases extrêmes, les unes normalement et suivant la loi de distribution des composantes $p_{xx} = E\frac{z}{\rho}$, les autres tangentiellement et suivant la loi plus compliquée (art. 40) des composantes p_{xz}, p_{xy}, ou des glissements qui accompagnent la flexion lorsqu'elle est inégale; et bien que, même, ces forces fléchissantes soient appliquées latéralement et non sur les bases.

C'est enfin ce qu'on fait depuis longtemps aussi pour la torsion des cylindres à base circulaire, car l'expression (120) $M_x = GJ\theta$ due à Coulomb, est admise généralement et regardée comme incontestablement vérifiée par l'expérience, quoiqu'elle soit, comme l'on voit, subordonnée à une condition semblable et jamais remplie.

Nos résultats relatifs à la torsion d'un prisme elliptique par des couples quelconques peuvent être adoptés au même titre et avec la même confiance qu'on adopte les formules, soit de l'extension simple, soit de la flexion par des forces latérales, et la formule plus analogue du cas de torsion des cylindres circulaires. Celle relative aux cylindres elliptiques, fondée sur les mêmes principes, a les mêmes raisons de s'étendre au cas d'une application et d'une distribution quelconque des couples qui font tordre, et doit être regardée comme aussi approchée pour la pratique.

La même observation, sur laquelle nous nous étendons ici, sera applicable dans tout le courant de ce mémoire. On y donnera, pour la torsion d'autres prismes, des résultats *analytiquement rigoureux* dans le cas d'une distribution particulière des forces appliquées aux extrémités, et que l'on pourra employer approximativement dans d'autres cas, d'après ce que l'expérience apprend de l'espèce d'indifférence du mode de distribution et d'application de ces forces.

Pour obtenir donc la grandeur de la torsion que font subir à

un prisme elliptique des forces quelconques données, on substituera leur moment à la place de M_x dans l'expression (116), et l'on en tirera θ qui servira à trouver (expr. 114) les grandeurs des glissements et (expr. 119) des déplacements des points.

59. *La torsion ne peut avoir lieu qu'autour de l'axe de figure du prisme.* — Il convient de remarquer que l'axe autour duquel la torsion s'opère passera nécessairement par les centres des sections elliptiques, car l'équilibre des composantes d'action $p_{xy}\,d\omega$, $p_{xz}\,d\omega$ parallèles aux y et aux z sur la section exige, d'après leurs expressions (118), que l'on ait

$$\int z\,d\omega = 0, \quad \int y\,d\omega = 0,$$

ou que l'origine des coordonnées y, z sur chaque section soit bien à son centre de gravité.

60. *Déplacements considérables dus à la torsion.* — Les valeurs (117) $v = -\theta xz$, $w = \theta xy$ ne conviennent que pour des déplacements transversaux v, w très-petits, et, par conséquent pour une portion très-courte du prisme. Mais si nous appelons a la petite longueur de cette portion, mesurée dans le sens x, et si, au bout, nous en imaginons une autre qui ait tourné tout entière de l'angle θa avant d'être tordue, le point M de cette deuxième portion qui avait, avant la rotation θa dont nous parlons, des coordonnées $a + x', y, z$, aura, après, des coordonnées x', y, z si l'on prend une nouvelle origine sur l'axe des x à une distance a de l'ancienne, et de nouveaux axes des y et des z faisant l'angle θa avec les anciens. Comme x' est très-petit, vu que la deuxième portion du prisme est supposée très-courte comme la première, cette deuxième portion venant à être tordue à son tour, les coordonnées du même point M deviendront, toujours par rapport aux nouveaux axes,

$$x' + u, \quad y - \theta x' z, \quad z + \theta x' y.$$

Et, par conséquent, en vertu des formules connues de transformation des coordonnées rectangulaires x, y, z en d'autres qui ont

le même axe des x, les coordonnées de ce point M par rapport aux anciens axes seront

$$a + x' + u;\ (y - \theta x' z)\cos\theta a - (z + \theta x' y)\sin\theta a;$$
$$(z + \theta x' y)\cos\theta a + (y - \theta x' z)\sin\theta a;$$

ou, en remplaçant $\theta x'$ par $\sin\theta . x'$, $a + x'$ par x, et négligeant la différence $1 - \cos\theta x'$ très-petite du second ordre

$$x + u,\quad y\cos\theta x - z\sin\theta x,\quad z\cos\theta x + y\sin\theta x.$$

On trouverait les mêmes expressions pour les coordonnées d'un point M′ d'une troisième portion en transportant de même l'origine au bout de la deuxième portion, ou à une distance $2a$ de l'origine primitive, et rapportant transitoirement ce point M′ à des axes y et z faisant l'angle $2a\theta$ avec les anciens, et ainsi de suite. On a donc, *quelle que soit la grandeur de* x, et, par conséquent, la grandeur des déplacements transversaux v, w, les expressions suivantes (qui ne sont autre chose que la seconde et la troisième des précédentes moins y et z) :

$$(122)\quad v = -z\sin\theta x - y(1 - \cos\theta x),\quad w = y\sin\theta x - z(1 - \cos\theta x).$$

On aurait pu sans doute poser ces expressions plus directement; mais nous avons voulu montrer comment les déplacements considérables peuvent être obtenus en général par une accumulation de ceux qu'on tire des formules qui les supposent très-petits, en transportant convenablement les axes coordonnés (comme on a dit art. 49) dans une suite de petites portions du prisme.

61. *Plus grand glissement. Point dangereux.* — Nous avons dit (art. 24) que l'usage principal de la recherche des déplacements relatifs des points d'un corps solide est la détermination des conditions de sa résistance à la rupture; et (art. 27) que lorsqu'il n'y a, comme dans le cas actuel, aucune dilatation dans une direction x et dans les directions qui lui sont perpendiculaires, il n'est pas nécessaire pour poser ces conditions de rechercher les

dilatations obliques qui résultent de glissements g_{xy}, g_{xz}, et qu'il suffisait d'imposer une limite à ceux-ci, et, même, seulement au glissement principal $g_x = \sqrt{g^2_{xy} + g^2_{xy}}$, quand la contexture du corps est égale autour de l'axe des x comme nous le supposons.

Mais il faut chercher d'abord le point où a lieu le *plus grand glissement principal*, et où, par conséquent, la cohésion court le plus de dangers.

Au point de la section quelconque ω dont les coordonnées sont y, z, le glissement principal g_x, suivant une parallèle à x, est donné (art. 7) d'après les expressions (114) de ses composantes g_{xy}, g_{xz}, par celle

$$(123) \qquad g^2_x = g^2_{xy} + g^2_{xz} = \left(\frac{2\theta}{b^2 + c^2}\right)^2 (b^4 z^2 + c^4 y^2).$$

On voit que dans une suite de points appartenant à une même droite quelconque partant du centre, ou pour lesquels le rapport de z^2 et de y^2 est constant, le plus grand glissement g se trouve à ceux où z^2 et y^2 ont les plus grandes valeurs, et, par conséquent, aux points où cette droite rencontre le contour de la section.

C'est donc sur ce contour elliptique qu'il faut chercher le point *dangereux* (art. 25).

Si l'on met pour z^2 dans l'expression précédente sa valeur $c^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ relative aux points du contour, elle devient

$$(124) \qquad g^2_x = \left(\frac{2\theta c}{b^2 + c^2}\right)^2 [b^4 - (b^2 - c^2) y^2],$$

expression qui, lorsque $b > c$, est la plus grande possible pour $y = 0$, $z = \pm c$, et la plus petite pour $z = 0$, $y = \pm b$.

Les points dangereux, ou de plus grand glissement, sont donc aux extrémités du petit axe. Et c'est aux extrémités du grand axe qu'a lieu, sur le contour de la section, le plus faible glissement ou le moindre péril de rupture ou de désagrégation par torsion.

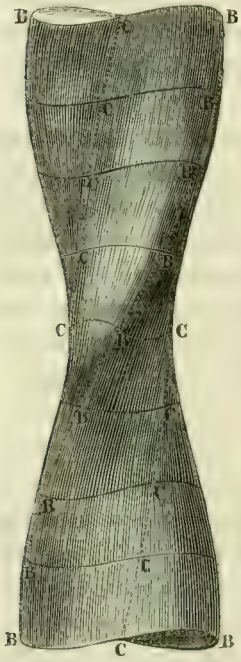
62. *Comparaison avec la théorie ancienne. Explication.* — Ce résultat remarquable est opposé à la théorie ordinaire, d'après

laquelle le glissement et le danger sont les plus grands aux points les plus éloignés de l'axe de torsion.

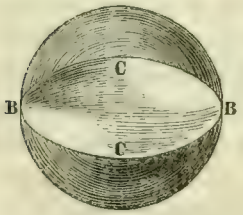
Cela provient, comme nous avons déjà dit, de ce que, dans la théorie ordinaire, les sections étant supposées rester planes et perpendiculaires à l'axe de torsion, le glissement principal, en chacun de leurs points, n'est autre chose que l'inclinaison prise sur cet axe par les fibres ou lignes matérielles qui lui étaient primitivement parallèles et qui, devenues toutes des hélices de même pas, prennent des inclinaisons en raison directe de leur distance à l'axe.

Dans celle qu'on vient d'exposer il n'en est pas de même. Les fibres deviennent bien toujours des hélices, inclinées sur l'axe de la même manière. Mais, vu le *gauchissement*, les éléments des sections et les lignes qui y sont tracées, s'inclinent aussi. Si les deux inclinaisons, en un même point, ont des sens tels qu'elles *conspirent* ou qu'elles s'ajoutent ensemble, le glissement principal, qui résulte de leur composition, sera bien plus grand que lorsque l'une des deux (celle de la section) est nulle : et c'est ce qui arrive aux extrémités du petit axe de l'ellipse. Si, au contraire, les deux inclinaisons composantes se soustraient l'une de l'autre, elles donnent, par leur combinaison, bien que plus grandes l'une et l'autre, un angle de glissement principal beaucoup plus petit : et c'est ce qui arrive aux extrémités du grand axe. Les fibres, en s'inclinant, peuvent être regardées comme exerçant sur les éléments superficiels correspondants des sections une action qui tend à les incliner eux-mêmes, de manière à maintenir la perpendicularité des uns sur les autres en vertu de la résistance des éléments solides à la déformation. Aux points les plus éloignés de l'axe de torsion, ou aux extrémités d'une section supposée très-allongée, les éléments superficiels obéissent à peu près sans opposition à cette action des fibres, en sorte que les éléments et les fibres restent presque perpendiculaires, le glissement principal est presque nul ainsi que la résistance et le danger de rupture ou de désagrégation. Aux points du contour les plus rapprochés de

l'axe il en est autrement : les éléments superficiels, retenus par d'autres éléments qui les précèdent et les suivent, non-seulement ne cèdent pas à la sollicitation des fibres, mais même sont entraînés à s'incliner dans un sens opposé à l'action qu'elles exercent en cet endroit; ce qui produit le maximum de glissement, de résistance et de danger.



L'épure ombrée ci-contre, représentant en projection horizontale et verticale un prisme elliptique auquel on a donné une torsion exagérée, puisqu'on l'a portée à une demi-circonférence sur une longueur égale seulement à π fois, ou 3 fois 1416 le grand axe $2b$ de sa base $\left(\text{en sorte que } \theta = \frac{\pi}{\pi . 2b} = \frac{1}{2b}\right)$ met en lumière cette différence, qu'on aperçoit encore plus clairement sur le modèle en relief septuple qui a été construit. C'est aux points C, C, C ou aux extrémités des petits axes des sections qu'a lieu la plus grande inclinaison de la fibre CCC sur les arcs elliptiques BCB qui lui étaient primitivement perpendiculaires, et c'est aux points B, B, B... que la fibre approche le plus d'être restée à angle droit sur les mêmes arcs, ainsi que sur la surface gauche affectée par la section dont ils forment le contour.



Les deux termes de chacune des expressions (100)

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z, \quad \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y$$

la font voir aussi. Le second terme $-\theta z$ ou θy est la quote-part fournie au glissement par l'inclinaison de la fibre; il est le même quelle que soit la forme de la section, circulaire, elliptique ou autre; le

premier terme est la quote-part due au gauchissement de la section ou à l'inclinaison prise par ses éléments ou par son contour. Aux extrémités du grand axe parallèle aux y, on a $\gamma_{xy} = 0$, et, par conséquent (formules 114)

$$\gamma_x = \gamma_{xz} = \mp \frac{2\,b\,c}{b^2 + c^2}\,\theta\,c$$

c'est le plus petit glissement principal aux points du contour.

Aux extrémités du petit axe supposé parallèle aux z, on a $\gamma_{xz} = 0$, et (mêmes formules)

$$\gamma_x = \gamma_{xz} = \pm \frac{2\,b\,c}{b^2 + c^2}\,\theta\,b \tag{125}$$

c'est *le plus grand glissement sur toute la section.* Le rapport de sa valeur absolue à celle du plus petit est $\frac{b}{c}$.

63. *Condition de non-rupture ou de stabilité de la cohésion.* — C'est ce plus grand glissement principal (125) qu'il faut rendre au plus égal à la limite déterminée par l'expérience et désignée (art. 27) par

$$\frac{T}{G}.$$

L'équation de non-rupture ou de stabilité de la cohésion de notre prisme elliptique est ainsi

$$T \underset{\text{ou} >}{=} G\,\theta.\,\frac{2\,b^2\,c}{b^2 + c^2}. \tag{126}$$

On en déduit le plus grand moment de forces produisant la torsion, auquel il convienne de soumettre le prisme, en éliminant $G\,\theta$ au moyen de l'expression (116) $M_x = G\,\theta\,\frac{\pi\,b^3\,c^3}{b^2 + c^2}$ obtenue art. 53. Il en résulte

$$\text{Limite de } M_x \underset{\text{ou} <}{=} \frac{\pi\,b\,c^2}{2}\,T, \text{ ou } \underset{\text{ou} <}{=} \frac{2\,I}{c}\,T. \tag{127}$$

Le *plus grand moment de torsion* auquel on puisse, sans danger, soumettre un prisme elliptique, est donc *égal au nombre* T par

lequel on évalue la limite spécifique de résistance tangentielle, *multiplié par le double du moment d'inertie de la section autour de son grand axe, divisé par le demi-petit axe.*

D'après la théorie ordinaire qui ne tient pas compte du gauchissement, on a $M_x \underset{\text{ou}<}{=} \frac{J}{b} T$, c'est-à-dire le nombre T multiplié par le moment d'inertie polaire $J = I + I'$, et divisé par le demi-grand axe. Le rapport de l'expression (127) à cette expression inexacte est

$$\frac{2bc}{b^2 + c^2}.$$

Voici les valeurs de ce rapport pour diverses grandeurs de celui $\frac{b}{c}$ du grand au petit axe :

Pour $\frac{b}{c} = 1 \ldots \frac{2bc}{b^2+c^2} = 1$

$2 \ldots 4/5 = 0{,}8$

$3 \ldots 3/5 = 0{,}6$

$5 \ldots 5/13 = 0{,}3846$

très-grand $\ldots \frac{2c}{b}$ = très-petit.

En sorte que, hors le cas d'une section circulaire, la théorie ordinaire donne une fausse sécurité en indiquant comme non dangereux un moment M_x plus fort que celui auquel on peut soumettre le prisme sans mettre en péril la cohésion de sa matière [1].

CHAPITRE VII.

EXPRESSIONS GÉNÉRALES D'INTÉGRALES SATISFAISANT À L'ÉQUATION INDÉFINIE, ET DES GLISSEMENTS ET MOMENTS DE TORSION QUI EN RÉSULTENT.

64. *Expression en série d'exponentielles et de sinus.* — Avant de passer à la solution du problème de la torsion dans des cas moins

[1] Même à égale superficie de la section, ou à égal volume de matière, un prisme elliptique résiste d'autant moins à la rupture par torsion que le rapport de sa plus grande à sa plus petite dimension est plus considérable, car l'équation (127) jointe à $\omega = \pi bc$ donne $\frac{M_x}{T} = \frac{\omega^{3/2}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c}{b}}$.

simples, nous allons donner, sous différentes formes, les intégrales générales de l'équation indéfinie (109)

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0. \tag{128}$$

Commençons par les expressions en série transcendante. De même qu'une équation linéaire différentielle ordinaire en x et y se résout en prenant pour y une somme de termes $C e^{mx}$, on sait que l'on résout une équation aux dérivées partielles comme (128), en posant

$$u = \text{une somme de termes } A\, e^{my}\, e^{m'z},$$

où A, m, m' sont des constantes à déterminer. La substitution de l'un des termes pour u donne $m^2 + m'^2 = 0$, d'où

$$m' = \pm m\sqrt{-1}.$$

En sorte que, le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs possibles de m, A', A'' pour que l'intégrale soit complète, l'on a

$$u = \Sigma\, e^{my}\left[A'(\cos mz + \sqrt{-1}\sin mz) + A''(\cos mz - \sqrt{-1}\sin mz)\right]$$

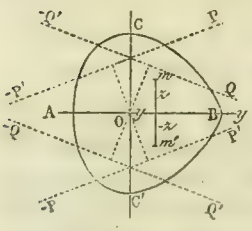
ou en mettant à la place de A', A'' des quantités partie réelles, partie imaginaires, et ne conservant, après les multiplications, que les parties réelles, A'_m, A_m représentant d'autres coefficients :

$$u = \Sigma\, e^{my}\,(A'_m \cos mz + A_m \sin mz), \tag{129}$$

intégrale aussi générale que la précédente.

65. *Cas où la section est symétrique et où les forces sont symétriquement distribuées par rapport à l'un des deux axes des y ou des z, ou par rapport à tous deux.* — Alors on peut simplifier d'avance cette expression de manière à abréger la recherche des valeurs de ses coefficients.

En effet, supposons que la section ACBC′ soit symétrique par rapport à l'axe Oy des y; qu'il en soit de même des forces qui font tordre, en sorte qu'à chaque couple P, — P appliqué dans un plan situé un peu au-dessus, réponde, dans le même plan, un couple Q, — Q de forces égales agissant au bout de bras de levier égaux autour de l'axe O, et faisant le même angle avec Oy; et que, à même distance, de l'autre côté de cette section, il y ait des forces égales P′, — P′, Q′, — Q′ suivant des lignes dont les projections sur ACBC′ soient directement opposées à celles des forces P, — P, Q, — Q. Les points m de la moitié supérieure ACB de la section sont placés par rapport aux premiers couples, agissant par exemple du côté de la section où l'on compte les déplacements u positifs, de la même manière que sont placés les points correspondants m' de sa moitié inférieure AC′B par rapport aux seconds couples, qui agissent du côté des u négatifs.



Si donc (comme nous le supposons, art. 51) ces déplacements longitudinaux des points de la section ne sont dus qu'à la torsion, u doit être le même au signe près, à ces deux points correspondants m et m', dont les coordonnées ne diffèrent que par le signe de celle z.

Donc :

1° S'il y a symétrie par rapport à l'axe des y, l'expression de u doit conserver la même grandeur en changeant de signe lorsqu'on y change z en — z.

Cette condition annule les coefficients A'_m et réduit l'expression (129) à

$$u = \Sigma\, A_m\, e^{my} \sin mz. \tag{130}$$

2° S'il y a symétrie par rapport à l'axe des z seul, u doit encore changer de signe et non de grandeur quand on met — y à la place de y, ce qui exige que pour chaque terme $A_m\, e^{my} \sin mz$ il y ait

un terme $A_{m'} e^{m'y} \sin m' z$ où l'on ait $m' = -m$ et $A'_m = A_m$ de manière à faire ensemble $A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz$, et que pour chaque terme $A'_m e^{my} \cos mz$ il y ait un terme $A'_{m'} e^{m'y} \cos m'z$ dans lequel $m' = -m$ et $A'_{m'} = -A'_m$, en sorte qu'on ait

$$(131) \qquad u = \Sigma (e^{my} - e^{-my}) (A'_m \cos mz + A_m \sin mz).$$

On pourrait prendre aussi $u = \Sigma A_{m''} e^{m''z} \sin m''y$.

3° S'il y a symétrie par rapport aux deux axes à la fois, u doit changer de signe sans changer de grandeur lorsqu'on y met, soit $-y$ pour y, soit $-z$ pour z, et ces expressions doivent avoir la forme

$$(132) \qquad u = \Sigma A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz.$$

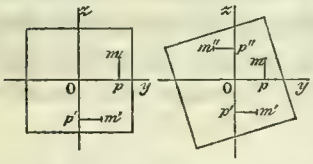
On pourrait, évidemment, poser aussi cette expression

$$(133) \qquad u = \Sigma A_m (e^{mz} - e^{-mz}) \sin my,$$

où les A_m et les m auront généralement d'autres valeurs que dans la précédente.

On peut voir également que :

Si 4° la section, symétrique ou non par rapport aux deux axes des y et des z, est *égale en y et en z*, en sorte qu'elle vienne coïncider avec elle-même lorsqu'on lui fait faire un quart de révolution autour de son centre O où les axes se croisent, comme on voit pour l'une ou l'autre des deux figures ci-contre, et si les forces appliquées observent aussi l'égalité en y et en z, u devra être le même au point m' et au point m si $op' = op$, $p'm' = pm$. Par conséquent l'expression de u ne devra changer ni de grandeur ni de signe lorsqu'on changera



$$y \text{ en } z, \text{ et } z \text{ en } -y; \text{ ou } y \text{ en } -z, z \text{ en } y.$$

66. *Expression polynôme entière. — Sa traduction en coordonnées polaires et son extension à des exposants quelconques.* — Pour

la recherche des lois de la torsion de prismes de forme variée (chapitre IX), nous aurons besoin de considérer un certain nombre d'intégrales particulières de l'équation indéfinie, d'une forme se prêtant facilement au calcul. Posons donc, comme à l'article 52, u égale une expression algébrique polynôme entière, où nous supposerons d'abord que y et z n'aient que des exposants entiers et positifs; substituons-la pour u dans (128) $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$. Si nous égalons à zéro, conformément à la méthode des coefficients indéterminés, ce qui affecte les mêmes puissances de y et z, nous obtiendrons, entre ces coefficients, une suite de relations qui nous permettront d'en réduire le nombre, d'où cette expression polynôme indéfinie

$$
(134)\quad \left\{\begin{aligned}
u = {} & a_0 + a_1 y + a'_1 z + a_2 (y^2 - z^2) + a'_2 . 2yz + a_3 (y^3 - 3yz^2) \\
& + a'_3 (3y^2 z - z^3) + a_4 (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + a'_4 (4y^3 z - 4yz^3) \\
& + a_5 (y^5 - 10y^3 z^2 + 5yz^4) + a'_5 (5y^4 z - 10y^2 z^3 + z^5) \\
& + a_6 (y^6 - 15y^4 z^2 + 15y^2 z^4 - z^6) + a'_6 (6y^5 z - 20y^3 z^3 + 6yz^5) \\
& + a_7 (y^7 - 21y^5 z^2 + 35y^3 z^4 - 7yz^6) \\
& + a'_7 (7y^6 z - 35y^4 z^3 + 21y^2 z^5 - z^7) \\
& + a_8 (y^8 - 28y^6 z^2 + 70y^4 z^4 - 28y^2 z^6 + z^8) \\
& + a'_8 (8y^7 z - 56y^5 z^3 + 56y^3 z^5 - 8yz^7) + \text{etc.}
\end{aligned}\right.
$$

que l'on aurait également obtenue en développant suivant les puissances de z, par le théorème de Taylor, les fonctions arbitraires φ, ψ du second membre de l'équation suivante qui représente, comme l'on sait, l'intégrale générale de l'équation différentielle (128) $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$,

$$
u = \varphi (y + z\sqrt{-1}) + \psi (y - z\sqrt{-1})
$$

et remplaçant, ensuite, $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ par des séries ordonnées suivant les puissances entières de y; ou bien (ce qui est plus simple) en mettant de suite de pareilles séries à la place de φ et ψ dans l'expression précédente de u, et développant par la formule du binôme les puissances de $y \pm z\sqrt{-1}$.

Les coefficients numériques des termes entre parenthèses de l'expression (134) de u sont, comme l'on voit, ceux des puissances d'un binôme, pris, non pas consécutivement, mais de deux en deux.

On en manifeste mieux la loi et l'on donne en même temps à u une forme souvent plus commode et susceptible d'être généralisée, en se servant de coordonnées polaires, ou en faisant (art. 46)

$$y = r\cos\alpha, \quad z = r\sin\alpha. \tag{135}$$

D'où

$$u = \varphi\left[r\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right)\right] + \psi\left[r\left(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha\right)\right],$$

et en remplaçant les fonctions φ, ψ par des développements suivant les puissances *entières ou fractionnaires* n, n_1 de leurs variables, ce qui donne, A_n et A_{n1} étant des coefficients constants, une expression générale de la forme $u = \Sigma A_n r^n (\cos n\alpha + \sqrt{-1}\sin n\alpha) + \Sigma A_{n1} r^{n_1} (\cos n_1\alpha - \sqrt{-1}\sin n_1\alpha)$.

Les imaginaires disparaissent si les exposants sont les mêmes dans les deux Σ et si l'on fait $A_n + A_{n1} = a_{n'}$, $(A_n - A_{n1})\sqrt{-1} = a_{n'}$, ce qui donne $u = \Sigma (a_n r^n \cos n\alpha + a_{n'} r^n \sin n\alpha)$. Mais nous pouvons faire n différent dans les deux termes entre parenthèses, puisqu'un certain nombre de coefficients a peuvent être nuls. Nous avons ainsi cette valeur générale :

$$\left\{\begin{array}{l} u = \Sigma a_n r^n \cos n\alpha + \Sigma a_{n'} r^{n'} \sin n'\alpha \\ \text{où l'on a} \\ r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctang}\dfrac{z}{y}, \quad \text{ou } y = r\cos\alpha,\ z = r\sin\alpha. \end{array}\right. \tag{136}$$

Elle revient identiquement à celle (134) *dans le cas particulier où l'on ne donne aux exposants* n, n' *que des valeurs entières et positives*, en remplaçant les cosinus et sinus de multiples, tels que $\cos n\alpha$ et $\sin n'\alpha$ par les développements connus que l'on obtient en les

assimilant à la partie réelle et au coefficient de $\sqrt{-1}$ de la partie imaginaire du développement de $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n$. [1].

Il en résulte :

$$(137)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dy} = a_1 + 2a_2 y + 2a'_2 z + 3a_3(y^2 - z^2) \\ \quad + 3a'_3 \cdot 2yz + 4a_4(y^3 - 3yz^2) + 4a'_4(3y^2 z - z^3) \\ \quad + 5a_5(y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + 5a'_5(4y^3 z - 4yz^3) + \dots \\ \dfrac{du}{dz} = a'_1 - 2a_2 z + 2a'_2 y - 3a_3 \cdot 2yz + 3a'_3(y^2 - z^2) \\ \quad - 4a_4(3y^2 z - z^3) + 4a'_4(y^3 - 3yz^2) \\ \quad - 5a_5(4y^3 z - 4yz^3) + 5a'_5(y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + \dots \end{cases}$$

ou (en observant que $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{du}{dr}\dfrac{dr}{dy} + \dfrac{du}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{dy} = \dfrac{du}{dr}\cos\alpha - \dfrac{du}{rd\alpha}\sin\alpha$, $\dfrac{du}{dz} = \dfrac{du}{dr}\sin\alpha + \dfrac{du}{rd\alpha}\cos\alpha$) :

$$(138)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dy} = \Sigma\, n a_n r^{n-1}\cos(n-1)\alpha + \Sigma\, n' a_{n'} r^{n'-1}\sin(n'-1)\alpha \\ \dfrac{d\xi}{dz} = -\Sigma\, n a_n r^{n-1}\sin(n-1)\alpha + \Sigma\, n' a_{n'} r^{n'-1}\cos(n'-1)\alpha. \end{cases}$$

Et, en substituant dans l'expression (103) $M_x = \int_0^\omega d\omega \left[e\left(\dfrac{du}{dz} + \theta y\right) y - f\left(\dfrac{du}{dy} - \theta z\right) z \right]$ pour $e = f = G$ on a :

[1] Il est facile de voir que si l'on change les variables indépendantes y et z pour celles r et α, l'on a

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r} = \sin\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dy} = -\frac{z}{r^2} = -\frac{\sin\alpha}{r}, \quad \frac{d\alpha}{dz} = \frac{y}{r^2} = \frac{\cos\alpha}{r},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\cos\alpha - \frac{du}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{r}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\cos\alpha + \frac{du}{d\alpha}\frac{\cos\alpha}{r},$$

et l'équation indéfinie $\dfrac{d^2 u}{dy^2} + \dfrac{d^2 u}{dz^2} = 0$ devient

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d^2 u}{r^2 d\alpha^2} + \frac{du}{r\,d\alpha} = 0.$$

Or cette équation différentielle est bien satisfaite par la valeur (136) de u en r et α.

$$(139)\quad \left\{\begin{array}{l} M_z = G\theta\int_0^\omega (y^2+z^2)\,d\omega - G\int_0^\omega d\omega\,[a_1 z - a'_1 y + 2a_2 \cdot 2yz \\ -2a'_2(y^2-z^2) + 3a_3(3y^2 z - z^3) + 3a'_3(y^3 - 3yz^2) \\ +4a_4(4y^3 z - 4yz^3) - 4a'_4(y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + \ldots] \end{array}\right.$$

ou, plus généralement

$$(140)\quad M_x = G\theta\int r^2\,d\omega - G\sum n\,a_n\int d\omega\cdot r^n \sin n\alpha + G\sum n'\,a_{n'}\int d\omega\cdot r^{n'}\cos n'\alpha.$$

67. *Termes de la série qui disparaissent quand la section est symétrique. Termes qui disparaissent quand elle est égale dans les deux sens y et z.* — D'après ce que nous avons établi à l'art. 65 :

1° Si la section est symétrique par rapport à l'axe des y, u doit rester le même au signe près en changeant z en $-z$, ou α en $-\alpha$. Il faut donc faire alors dans l'expression (134) de u en série entière par rapport aux coordonnées ordinaires :

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = 0\ldots\ldots$$

Et réduire celle (136) en coordonnées polaires à

$$u = \Sigma\, a_{n'}\, r^{n'} \sin n'\alpha;$$

2° Si elle est symétrique par rapport à l'axe des z seul, u doit rester le même au signe près en changeant y en $-y$, ou α en $\pi - \alpha$. Il faut donc faire dans l'expression entière (134)

$$a_0 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad a_4 = 0\ldots\ldots$$
$$a'_1 = 0, \qquad a'_3 = 0, \qquad a'_5 = 0\ldots\ldots$$

Et réduire celle plus générale (136) aux termes où n est entier et impair, n' entier et pair, vu que $\sin(n\pi - n\alpha) = -(-1)^n \sin n\alpha$, $\cos(n\pi - n\alpha) = (-1)^n \cos\alpha$. Du reste n et n' peuvent être positifs ou négatifs;

3° Si elle est symétrique par rapport aux deux axes des y et des z à la fois, on réduira l'expression (134) aux termes affectés de

$$a'_2,\ a'_4,\ a'_6,\ a'_8\ldots\ldots$$

c'est-à-dire à

$$(141)\quad \begin{cases} u = a'_2 . 2yz + a'_4 (4y^3 z - 4yz^3) + a'_6 (6y^5 z - 20y^3 z^3 + 6yz^5) \\ \quad + a'_8 (8y^7 z - 56y^5 z^3 + 56y^3 z^5 - 8yz^7) + \ldots\ldots \end{cases}$$

et l'expression en coordonnées polaires (136) à ne contenir que les termes où se trouvent des valeurs paires de n', ou à

$$(142)\quad \begin{cases} u = (a'_2 r^2 - a''_2 r^{-2}) \sin 2\alpha + (a'_4 r^4 - a''_4 r^{-4}) \sin 4\alpha \\ \quad + (a'_6 r^6 - a''_6 r^{-6}) \sin 6\alpha + \ldots\ldots ; \end{cases}$$

4° Enfin si, *outre la symétrie*, la section doit avoir l'*égalité* par rapport aux deux axes, il faut que l'expression (141) de u conserve sa grandeur et son signe en changeant y en z, z en $-y$, ce qui la réduit aux termes affectés de a'_4, a'_8, a'_{12}, ... ou à

$$(143)\quad \begin{cases} u = a'_4 (4y^3 z - 4yz^3) + a'_8 (8y^7 z - 56y^5 z^3 + 56y^3 z^5 - 8yz^7) \\ \quad + a'_{12} (12y^{11} z - 220y^9 z^3 + 792y^7 z^5 - 792y^5 z^7 \\ \quad + 220y^3 z^9 - 12yz^{11}) + a'_{16} (16y^{15} z - 560y^{13} z^3 \\ \quad + 4368y^{11} z^5 - 11440y^9 z^7 + 11440y^7 z^9 - 4368y^5 z^{11} \\ \quad + 560y^3 z^{13} - 16yz^{15}) + \ldots\ldots \end{cases}$$

Et l'expression plus générale (136) ou (142) doit conserver sa grandeur et son signe quand on met $\frac{\pi}{2} + \alpha$ à la place de α, ce qui la réduit à ne plus contenir que les termes où il se trouve pour n' des multiples de 4, ou à

$$(144)\quad \begin{cases} u = \left(a'_4 r^4 - \frac{a''_4}{r^4}\right) \sin 4\alpha + \left(a'_8 r^8 - \frac{a''_8}{r^8}\right) \sin 8\alpha \\ \quad + \left(a'_{12} r^{12} - \frac{a''_{12}}{r^{12}}\right) \sin 12\alpha + \ldots \end{cases}$$

CHAPITRE VIII.

TORSION D'UN PRISME À BASE RECTANGLE.

68. *État de la question.* — La question de la torsion d'un prisme à base rectangle a été traitée par M. Cauchy, en 1829 —

1830[1]. Il cherche les déplacements sans supposer de prime abord qu'ils produisent une torsion; mais il regarde comme très-petites les dimensions $2b$, $2c$ de la base, de manière à pouvoir effacer, à différentes époques du calcul, dans les séries entières par lesquelles il représente les déplacements et les pressions intérieures, les carrés et les puissances supérieures des coordonnées transversales y et z. Nous avons reproduit, ailleurs[2], son ingénieuse analyse, dont les résultats interprétés géométriquement nous ont fait apercevoir le *gauchissement* des sections, et ont été le point de départ de nos recherches; et qui donne pour le moment de torsion

$$M_x = \frac{16}{3}\,\frac{b^3c^3}{\frac{b^2}{f}+\frac{c^2}{e}}\,\theta,$$

expression identique avec celle (116) $\dfrac{4G\theta}{\frac{1}{I}+\frac{1}{I'}}$ que nous avons trouvée (art. 53) pour le prisme elliptique lorsqu'on fait $e=f=G$ et qu'on y introduit les moments d'inertie, puisqu'on a pour le rectangle

$$(145)\qquad I=\int z^2\,d\omega=\frac{4}{3}\,bc^3,\quad I'=\int y^2\,d\omega=\frac{4}{3}\,cb^3.$$

La même analyse donne (toujours en s'en tenant aux premiers termes des développements)[4], $\dfrac{d^2u}{dy\,dz}=-\dfrac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\,\theta$, d'où l'on peut tirer la valeur $u=-\dfrac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\,\theta\,y\,z$, aussi semblable à celle que nous avons trouvée pour l'ellipse.

M. Cauchy ne donne ses résultats que comme approximatifs. Cependant nous verrons (art. 74 et 86) que l'expression précédente du moment de torsion M_x, vérifiée par les expériences de

[1] *Exercices de mathématiques*, quatrième volume. *De la torsion et des vibrations tournantes d'une verge rectangulaire.*

[2] *Comptes rendus de l'Académie*, 20 novembre 1843, t. XVII, p. 1180.

[3] *Exercices de mathématiques*, t. IV, p. 59, formule (105).

[4] Même tome IV, pages 50 (la 2e de ce folio) et 55, formules (55) et (81).

Savart sur des prismes très-plats, peut être regardée comme exacte lorsque l'une des dimensions de la base est très-grande par rapport à l'autre, et que l'on peut encore s'en servir pour les autres cas en l'affectant d'un coefficient numérique qui ne varie qu'entre 0,84 et 1 (voyez art. 85).

Ce qui nous a fait chercher, avec persévérance, une expression qui fût exacte pour un rapport quelconque de ces deux dimensions, c'est que, d'après le second des deux théorèmes fondamentaux de la théorie des pressions, dus au même illustre géomètre (art. 10), et qui s'exprime par $p_{xy}=p_{yx}$, $p_{xz}=p_{zx}$, la nullité supposée des composantes p_{yx}, p_{zx}, dans le sens longitudinal x, des pressions sur les faces extérieures latérales, perpendiculaires respectivement aux y et aux z, entraîne, aux endroits où elles se coupent, la nullité simultanée des deux composantes transversales p_{xy}, p_{xz} de la pression supportée par la section orthogonale du prisme : d'où il suit qu'à ces angles (comme généralement à tous les angles saillants, même non droits, que peuvent offrir les sections droites des prismes) la pression ne peut agir que normalement à la section, en sorte qu'*il n'y a, en ces points, aucun glissement* q_x, *et la section a dû se ployer de manière à rester normale aux quatre arêtes saillantes devenues courbes.* Or c'est c'est ce qu'on ne trouve pas avec l'expression $u = -\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\theta yz$ qui place précisément les plus grands glissements aux quatre angles des sections rectangulaires; d'où nous avons dû conclure qu'à l'espèce de gauchissement qu'elle indique, il faut en ajouter une autre, qui se fait sentir surtout vers les angles des sections, et qui subsiste quand $b = c$ [1].

69. *Équations indéfinie et définies.* — Nous avons donc, après nous être placé dans le cas général d'une torsion, ou *nous être donné* (art. 2) les relations (101) $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$ entre les

[1] *Comptes rendus*, 22 février 1847, t. XXIV, p. 263.

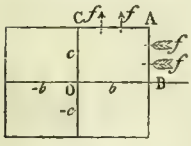
déplacements, ainsi que celle $\frac{du}{dx} = 0$ (art. 51), ce qui réduit toujours la première équation indéfinie à

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0; \tag{146}$$

nous avons, dis-je, cherché à l'intégrer exactement [1] pour les *données sur les forces* consistant à supposer que les composantes longitudinales de pression sont nulles sur les faces latérales, en remarquant que l'équation définie (110) $\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) dy - \left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) dz = 0$, qui l'exprime pour un contour quelconque, se partage naturellement en deux autres pour le contour discontinu du rectangle, savoir :

$$(147)\quad \begin{cases} \frac{du}{dy} = \theta z \text{ pour } y = \pm b \text{ quel que soit } z \text{ entre } -c \text{ et } +c \\ \frac{du}{dz} = -\theta y \text{ pour } z = \pm c \text{ quel que soit } y \text{ entre } -b \text{ et } +b. \end{cases}$$

On peut voir que le problème exprimé par les équations (146) et (147) est le même que celui de la détermination des températures permanentes qui seraient prises dans notre prisme rectangle ou dans une de ses tranches, d'épaisseur finie ou infiniment petite si, les deux bases étant imperméables à la chaleur, les faces latérales laissaient passer normalement des flux de chaleur entrante et de chaleur sortante ff, ff, proportionnels aux distances $y = Bf$, $z = Cf$ des points d'entrée ou de sortie aux lignes B, C qui occupent le milieu de ces faces.



Nous devons à M. Wantzel de nous avoir fait remarquer que la seconde des deux conditions définies se simplifie en faisant

$$u = -\theta yz + u'; \tag{148}$$

[1] *Comptes rendus*, 22 mars 1847, t. XXIV, p. 487.

de sorte que, l'équation indéfinie conservant toujours la même forme

$$\frac{d^2 u'}{dy^2} + \frac{d^2 u'}{dz^2} = 0,$$

les équations définies sont

$\frac{du'}{dy} = 2\theta z$ pour $y = \pm b$ et toute valeur de z entre $-c$ et $+c$,

$\frac{du'}{dz} = 0$ pour $z = \pm c$ et toute valeur de y entre $-b$ et $+b$.

Et l'intégration, moyennant cette transformation, peut s'effectuer par des procédés connus.

70. *Solution de ces équations.* — Comme on ne peut y satisfaire exactement ainsi qu'on le fait dans le cas de l'ellipse avec une expression algébrique, nous avons dû employer la série transcendante (132 art. 65) relative au cas de symétrie par rapport à chacun des deux axes y et z

$$u' = \Sigma A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz.$$

Pour que la seconde condition définie $\frac{du'}{dz} = 0$ soit satisfaite pour tous les termes, il faut que

$$\cos mc = 0,$$

ou que, n étant un nombre entier quelconque qu'il suffit de faire > 0, l'on ait

$$mc = \frac{2n-1}{2}\pi.$$

Il en résulte

$$(149)\quad u' = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_m \left(e^{\frac{(2n-1)\pi y}{2c}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2c}}\right) \sin \frac{2n-1}{2}\pi \frac{z}{c}.$$

Il reste à déterminer la suite des coefficients A_m de manière que pour $y = \pm b$ l'on ait $\frac{du'}{dy} = 2\theta z$, c'est-à-dire de manière que

$$\sum \frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{c} A_m \left(e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}\right) \sin \frac{2n-1}{2}\pi \frac{z}{c} = 2\theta z,$$

ou qu'en faisant, pour abréger

$$(150)\quad \frac{A_m}{2\theta c}\cdot\frac{2n-1}{2}\pi\left(e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}+e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}\right)=A_n$$

les nombres A_n soient tels qu'on ait

$$(151)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\frac{2n-1}{2c}\pi z = z,$$

quel que soit z entre les limites $z=\pm c$.

L'on sait qu'il faut, pour cela, donner en général à ces nombres les valeurs exprimées par la formule

$$(152)\quad A_n=\frac{2}{c}\int_0^c z\,\sin\left(\frac{2n-1}{2c}\pi z\right)dz.^{1}$$

Mais comme nous voulons rendre élémentaire notre théorie de la torsion, nous allons chercher ces valeurs par la méthode simple qu'ont employée Lagrange[2] à propos du problème des cordes vibrantes, puis Euler[3] et Fourier[4] à d'autres occasions, pour exprimer une fonction quelconque en série périodique. L'équation (151) développée étant

$$(153)\quad z=A_1\sin\frac{\pi z}{2c}+A_2\sin\frac{3\pi z}{2c}+\ldots+A_n\sin\frac{(2n-1)\pi z}{2c}+\ldots$$

multiplions tous ses termes par $dz\sin\frac{2n-1}{2c}\pi z$ et intégrons-les

[1] Formule $\varphi(x)=\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\int_0^l\varphi(x').\sin\frac{2i-1}{2l}\pi x'.dx'\right)\sin\frac{2i-1}{2l}\pi x$ du bas de la page 649, art. 326, de la seconde édition de la *Mécanique* de M. Poisson.

[2] *Mélanges de Turin*, t. III (1762-63), p. 251. *Application aux cordes sonores.*

[3] *Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cujusdam anguli progredientibus*, 1777, imprimé au tome XI (1798), des *Nova acta acad. Petropolitanæ.*

[4] *Théorie de la chaleur.*

entre les limites o et c. Comme on a en général

$$\int dx \sin kx \sin k'x = \int dx \frac{\cos(k-k')x - \cos(k+k')x}{2} =$$
$$= \frac{\sin(k-k')x}{2(k-k')} - \frac{\sin(k+k')x}{2(k+k')} + \text{constante},$$

et $\int dx \sin^2 kx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2k} \sin kx \cos kx + \text{constante}$,

l'on trouve, si n' est un nombre différent de n :

$$\int_0^c dz. \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} \sin \frac{(2n'-1)\pi z}{2c} = 0;$$

en sorte que la multiplication et l'intégration entre $z = 0$ et $z = c$ annule tous les termes du second membre, excepté le $n^{ième}$ qui devient

$$A_n \int_0^{2c} dz. \sin^2 \frac{(2n-1)\pi z}{2c} z = A_n \frac{c}{2}.$$

Et l'on a bien, pour le coefficient inconnu A_n de ce terme général, l'expression (152) $A_n = \frac{2}{c} \int_0^c z\,dz \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c}$.

Or, pour calculer l'intégrale définie que cette valeur de A_n renferme, on a

$$\int z\,dz \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} = -z \frac{2c}{(2n-1)\pi} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2c} +$$
$$+ \left(\frac{2c}{(2n-1)\pi}\right)^2 \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} + \text{const.},$$

expression qui s'annule à sa limite inférieure $z = 0$ et se réduit à $\left(\frac{2c}{(2n-1)\pi}\right)^2 (-1)^{n-1}$ à la limite supérieure $z = c$.

Donc on a

$$(154) \qquad A_n = \frac{8c(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

ou (équation 151 — 153)

$$(155)\ z = \frac{8c}{\pi^2} \Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} = \frac{8c}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi z}{2c} - \frac{1}{9} \sin 3 \frac{\pi z}{2c} + \ldots\right).$$

Egalant cette valeur (154) de A_n à l'expression (150) qu'elle désigne, et tirant A_m pour le mettre dans l'expression (149) de l'inconnue u', puis enfin, ajoutant $-\theta yz$ pour avoir $u = -\theta yz + u'$ on obtient pour l'intégrale complète de l'équation $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$ satisfaisant aux conditions $\frac{du}{dy} = \theta z$ sur les côtés $2c$ et $\frac{du}{dz} = -\theta y$ sur les côtés $2b$ de la section rectangle, et, par conséquent à à toutes les conditions de la question, la première des deux expressions suivantes :

$$(156)\quad u =$$

$$= \theta bc\left[-\frac{y}{b}\frac{z}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{c}{b}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi y}{2c}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2c}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}} \sin\frac{(2n-1)\pi z}{2c}\right]$$

$$= \theta bc\left[\frac{y}{b}\frac{z}{c} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{b}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi z}{2b}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi z}{2b}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi c}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}} \sin\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\right],$$

dont la seconde eût été obtenue évidemment si, au lieu de $u = -\theta yz + u'$ on avait fait $u = \theta yz + u'$, ce qui eût changé les équations définies (147) en $\frac{du'}{dy} = 0$, $\frac{du'}{dz} = -2\theta y$, et si l'on eût procédé de même en se servant, au lieu de (132) de l'expression (133) $u' = \Sigma A_m (e^{mz} - e^{-mz}) \sin my$. Quoique très-différentes en apparence, ces deux expressions, lorsqu'on en calcule les valeurs numériques particulières, donnent les mêmes nombres, en sorte qu'elles sont, par le fait, identiques.

Et, malgré leur forme, chacune des deux est symétrique en y et z, ou conserve la même valeur quand on y change y en z et en même temps b en c, et réciproquement, pourvu qu'on change aussi θ en $-\theta$.

On peut, en désignant par *sih* et *coh* les sinus et cosinus *hyperboliques* de M. Gudermann, en sorte qu'on ait, en général

$\operatorname{sih} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{coh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, écrire ainsi ces expressions

$$(157)\quad \begin{cases} u = -\theta y z + \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{\theta c^2}{2} \sum \dfrac{(-1)^{n-1} \operatorname{sih} \frac{(2n-1)\pi y}{2c} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c}}{(2n-1)^3 \operatorname{coh} \frac{2n-1)\pi b}{2c}} \\ \quad = \theta y z - \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{\theta b^2}{2} \sum \dfrac{(-1)^{n-1} \operatorname{sih} \frac{(2n-1)\pi z}{2b} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b}}{(2n-1)^3 \operatorname{coh} \frac{(2n-1)\pi c}{2b}}. \end{cases}$$

71. *Glissements. Vérification.* — En différentiant par rapport à y et par rapport à z les expressions (156) et (157) de u, on peut voir facilement qu'elles satisfont l'une et l'autre à l'équation indéfinie $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$, et l'on obtient pour chacun des glissements $\mathfrak{g}_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z$ et $\mathfrak{g}_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y$ deux expressions, savoir :

$$(158)\quad \begin{cases} \mathfrak{g}_{xy} = -\theta c \left\{ 2\frac{z}{c} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \dfrac{e^{\frac{2(n-1)\pi y}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2c}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} \right. \\ \quad = -\theta c \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{b}{c} \sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \dfrac{e^{\frac{(2n-1)\pi z}{2b}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi z}{2b}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi c}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b}; \end{cases}$$

$$(159)\quad \begin{cases} \mathfrak{g}_{xz} = \theta b \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{c}{b} \sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \dfrac{e^{\frac{(2n-1)\pi y}{2c}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2c}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2c} \\ \quad = \theta b \left\{ 2\frac{y}{b} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \dfrac{e^{\frac{(2n-1)\pi z}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi z}{2b}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi c}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b}. \right. \end{cases}$$

Quand on fait $y = \pm b$, la seconde expression du glissement g_{xy} s'anéantit évidemment, et la première devient

$$-2\theta z + \theta \frac{16c}{\pi^2} \Sigma \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c},$$

expression qui est nulle aussi, puisque, d'après l'égalité (155), le second terme a la même valeur que le premier.

La première condition, d'avoir $g_{xy} = 0$ pour $y = \pm b$, quel que soit z, est donc satisfaite [1].

Quand on fait $z = \pm c$, la première expression (159) du glissement g_{xz} s'anéantit évidemment, et la seconde s'anéantit aussi au moyen de la même égalité (155). La seconde condition définie (147) est donc satisfaite aussi, et les expressions (156) (157) données pour u résolvent la question posée.

72. *Pressions tangentielles. — Moment de torsion. — Pressions normales.* — Il en résulte :

$$(160)\quad \begin{cases} p_{xy} = \text{G multiplié par l'une des expressions (158) de } g_{xy} \\ \qquad\qquad \text{de l'article précédent,} \\ p_{xz} = \text{G multiplié par l'une des expressions (159) de } g_{xz}. \end{cases}$$

D'où, pour le moment de torsion $\int_{-b}^{b} dy \int_{-c}^{c} dz\,(p_{xz}y - p_{xy}z)$ en se servant d'abord de la première expression (158) et aussi de la première (159), et eu égard à ce que

$$\int_{-c}^{c} dz \cos\frac{2n-1}{2c}\pi z = \frac{2}{\frac{2n-1}{2c}\pi} \sin\frac{2n-1}{2}\pi = \frac{4c(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi};$$

$$\int_{-c}^{c} z\,dz \sin\frac{2n-1}{2c}\pi z = \frac{8c^2(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi^2}; \quad \int_{-b}^{b} e^{\pm my}\,dy = \frac{1}{m}\left(e^{mb} - e^{-mb}\right);$$

$$\int_{-b}^{b} y\,dy\, e^{\pm my} = \pm\frac{b}{m}\left(e^{mb} + e^{-mb}\right) \mp \frac{1}{m^2}\left(e^{mb} - e^{-mb}\right);$$

[1] Au moins dans l'étendue des côtés $2c$ du rectangle, ou entre les limites $z = \pm c$, car, entre autres preuves, on fait voir (Navier, *Résumé des leçons d'a-*

l'expression suivante :

$$M_x = G\theta\left[\frac{8\,b\,c^3}{3}+\frac{256\,b\,c^3}{\pi^4}\Sigma\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1024}{\pi^5}c^4\sum\frac{1}{(2n-1)^5}\frac{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}-e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}+e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}}\right].$$

Or on a comme l'on sait, et comme on peut le vérifier numériquement,

$$\Sigma\frac{1}{(2n-1)^4} = 1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots\ldots = \frac{\pi^4}{96}\cdot$$

Le second terme entre crochets est donc égal au premier et peut lui être réuni, en sorte que l'on a la première des deux expressions suivantes : la deuxième aurait été évidemment obtenue si l'on eût pris pour q_{xy}, q_{xz} leurs secondes expressions (158) (159)

$$(161)\quad\begin{cases} M_x = G\theta bc^3\left\{\frac{16}{3}-\left(\frac{4}{\pi}\right)^5\frac{c}{b}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\frac{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}-e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}+e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}}\right\} \\ \quad = G\theta b^3c\left\{\frac{16}{3}-\left(\frac{4}{\pi}\right)^5\frac{b}{c}\sum\frac{1}{(2n-1)^5}\frac{e^{\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}-e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}+e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}}\right\}. \end{cases}$$

Ces deux expressions doivent être identiques; cela prouve simplement qu'en général les deux expressions analytiques suivantes

nalyse, 1840, n° 496) que les séries du genre de celle qui est dans le second membre de l'égalité (155) sont convergentes pour les valeurs positives de z entre o et c, en sorte qu'entre ces limites, ce second membre a bien, numériquement, les valeurs du premier, ce dont on peut, au reste, s'assurer en donnant diverses grandeurs au rapport $\frac{z}{c}$.

[1] Lacroix, *Calcul différentiel et intégral*, 1818, troisième volume, n°s 1005 et 1184, ou bien n° 1183.

ne changent pas de grandeur lorsqu'on y met $\frac{1}{t}$ au lieu de t [1] (la première a été obtenue en remplaçant $\frac{b}{c}$ par t dans l'accolade de la première expression de M_x multipliée par $\left(\frac{\pi}{4}\right)^5$; et la deuxième, en mettant $t\sqrt{-1}$ au lieu de t, et $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots$ au lieu de $\frac{\pi^4}{96}$):

$$\frac{\pi^5}{192\,t} - \frac{1}{t^2}\left(\frac{e^{\frac{\pi t}{2}} - e^{-\frac{\pi t}{2}}}{e^{\frac{\pi t}{2}} + e^{-\frac{\pi t}{2}}} + \frac{1}{3^5}\,\frac{e^{3\frac{\pi t}{2}} - e^{-3\frac{\pi t}{2}}}{e^{3\frac{\pi t}{2}} + e^{-3\frac{\pi t}{2}}} + \ldots\ldots\right)$$

et

$$\frac{\tang\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi t}{2}}{t^2} + \frac{\tang 3\frac{\pi t}{2} - 3\frac{\pi t}{2}}{3^5\,t^2} + \frac{\tang 5\frac{\pi t}{2} - 5\frac{\pi t}{2}}{5^5\,t^2} + \ldots\ldots$$

Seulement, celle-ci change de signe.

Quant aux autres composantes de pressions, si, aux données de l'art. 69 du commencement de ce chapitre sur les déplacements, l'on ajoute celles de l'art. 51, relatif aux simplifications générales des premières solutions que nous donnons, en sorte qu'on ait:

$$(162)\quad \begin{cases} \text{non-seulement } \frac{dv}{dx} = -\theta z,\ \frac{dw}{dx} = \theta y,\ \frac{du}{dx} = 0, \\ \text{mais aussi} \qquad \frac{dv}{dy} = 0,\ \frac{dw}{dz} = 0,\ \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0, \end{cases}$$

toutes ces autres composantes de pressions sont nulles, ou l'on a

$$(163)\qquad p_{xx} = 0,\ p_{yy} = 0,\ p_{zz} = 0,\ p_{yz} = 0,$$

c'est-à-dire des pressions absolument nulles sur les faces latérales, et, sur les bases, nulles seulement dans le sens longitudinal ou normal.

[1] M. Cauchy le prouve directement, par le calcul des Résidus, dans des passages des tomes I et II des *Exercices de mathématiques*, relatifs aux formules qu'il appelle *réciproques*.

73. *Problème des déplacements quand les forces sont données. — Cas de la pratique.* — Réciproquement si, le prisme étant toujours supposé n'être soumis à l'intérieur à aucune force non réciproque, telle que la pesanteur, ses diverses faces supportent des pressions données, ayant précisément les valeurs que nous venons d'énumérer (valeurs toutes nulles, disons-nous, excepté les pressions tangentielles (160) sur les bases), le déplacement u sera exprimé par la formule trigonométrique (156) ou (157) et les déplacements v, w auront des valeurs telles que leurs différences premières aient celles (162).

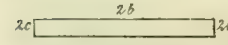
En effet, ces valeurs u, v, w satisfont à toutes les conditions indéfinies et définies d'un pareil problème, et on verra qu'elles sont les seules à y satisfaire en raisonnant comme aux art. 56, 38, 30.

Nous n'avons pas besoin de répéter, non plus, ce que nous avons dit art. 58, 41 et 33 sur la possibilité d'appliquer à la pratique ces résultats relatifs à la torsion des prismes rectangles, avec autant de sécurité qu'on y applique les formules connues (art. 58, 36, 41, 30) relatives à la torsion des cylindres circulaires, ou à la flexion et même à l'extension simple des prismes quelconques.

En substituant donc à M_x dans l'équation (161) le moment des forces qui font tordre en agissant d'une manière symétrique, et du reste quelconque, sur le prisme, soit directement, soit par l'intermédiaire d'autres pièces solides, on en tirera la torsion θ qui a lieu sur toute sa longueur (excepté sur des parties extrêmement courtes vers les extrémités) et, par suite, les déplacements et les glissements qui en résultent.

74. *Premier exemple. Cas où l'un des côtés du rectangle est très-grand par rapport à l'autre.* — Nous allons particulariser ces résultats pour en tirer des règles et des tables usuelles.

Supposons d'abord que le prisme soit très-plat, ou que l'un des côtés, $2b$, de sa base, soit très-grand par rapport à l'autre $2c$. Alors, dans la première des deux expressions (161) du moment de torsion M_x, les expo-



sants de $e = 2{,}718\ldots$ sont considérables, et les exponentielles où ils se trouvent affectés du signe — peuvent être effacées, ce qui réduit cette expression à

$$M_x = G\theta bc^3\left[\frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{c}{b}\sum \frac{1}{(2n-1)^5}\right] = \frac{16}{3} G\theta bc^3\left(1 - 0{,}630249\,\frac{c}{b}\right)$$

ou, si l'on néglige le second terme entre parenthèses, affecté de $\frac{c}{b}$

$$M_x = \frac{16}{3} G\theta bc^3. \qquad (164)$$

On l'obtient également de la seconde des mêmes expressions générales (161) de M_x; car, comme les exposants $\frac{(2n-1)\pi c}{2b}$ sont alors très-petits (au moins dans les premiers termes du Σ qui sont les plus influents), on peut développer la fraction $\frac{e^+ - e^-}{e^+ + e^-}$ suivant leurs puissances, au moyen du développement des exponentielles suivi d'une division algébrique, ce qui donne pour cette fraction

$$\frac{2n-1}{2b}\pi c - \frac{1}{3}\left(\frac{2n-1}{2b}\pi c\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{2n-1}{2b}\pi c\right)^5 - \ldots$$

en sorte qu'en négligeant les puissances cinquième et au-dessus l'on a $M_x = G\theta b^3 c\left[\frac{16}{3} - 2\left(\frac{4}{\pi}\right)^4 \sum \frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{8}{3}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{c^2}{b^2}\sum \frac{1}{(2n-1)^2}\right]$, expression qui, en se rappelant que les deux Σ ont respectivement pour valeurs $\frac{1}{96}\pi^4$ et $\frac{1}{8}\pi^2$, se réduit bien à $\frac{16}{3} G\theta bc^3$.

Si l'on cherchait à obtenir de même une expression approchée du déplacement longitudinal u, la première formule (156) donnerait, en négligeant la série Σ parce qu'elle est affectée du rapport $\frac{c}{b}$ supposé petit, $u = -\theta yz$. Et l'on obtiendrait la même chose de la deuxième formule (156) en développant les quatre exponentielles et ne conservant que les deux premiers

termes de chaque développement, car il en résulterait $u = \theta z \left[y - \frac{16\,b}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \right]$, où le second terme entre crochets est égal à $-2y$ d'après l'égalité (155).

Mais cette approximation $u = -\theta yz$, tout en donnant une idée de la forme de la surface, ne suffit pas pour avoir les glissements en ses différents points, car il en résulterait $g_{xy} = \frac{du}{dy} = -\theta z = -2\theta z$ et $g_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y = 0$, qui, substitués dans (105) $M_x = \int_{-b}^{b} dy \int_{-c}^{c} dz \,(G g_{xz} y - G g_{xy} z)$, donneraient $\frac{8}{3} G\theta bc^3$ ou une valeur deux fois trop faible; ce qui vient de ce que les $G g_{xz}$ ont des bras de levier y beaucoup plus longs que ceux z des $G g_{xy}$, en sorte que, malgré la petitesse relative des glissements g_{xz}, on ne peut pas les faire $= 0$ sans une erreur considérable.

On retrouve la vraie grandeur (164) $\frac{16}{3} G\theta bc^3$ du moment total pour le cas dont nous occupons si l'on prend, un peu plus approximativement, $u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta yz$, c'est-à-dire si l'on suppose que la surface courbe affectée par la section rectangle du prisme après une torsion θ est la même que celle qui serait affectée par la section du cylindre elliptique inscrit (art. 52, 57). En effet, cette expression de u, qui se réduit à $u = -\theta yz$ lorsqu'on efface c^2 devant b^2, donne, en le conservant provisoirement, $g_{xy} = \frac{-2b^2\theta z}{b^2+c^2}$, $g_{xz} = \frac{2c^2\theta y}{b^2+c^2}$, comme à l'art. 53, d'où

$$(165) \qquad M_x = 2G\theta \frac{c^2 \int y^2 d\omega + b^2 \int z^2 d\omega}{b^2 + c^2} = \frac{16}{3} G\theta \frac{b^3 c^3}{b^2 + c^2},$$

qui revient bien à $\frac{16}{3} G\theta bc^3$ en négligeant finalement c^2 au dénominateur. Mais il est bon d'observer que les expressions de g_{xy}, g_{xz} que nous venons d'écrire sont toujours en défaut vers les quatre angles, car pour $y = \pm b$, $z = \pm c$ elles ne donnent pas des glissements nuls comme les formules exactes (158), (159).

L'expression (164) du moment peut, au reste, être écrite, vu que

le moment d'inertie $I = \int z^2 d\omega = \frac{4}{3} b c^3$:

$$M_x = 4 G I \theta. \tag{166}$$

Elle est absolument la même que celle (116) (art. 53) relative à l'ellipse quand $\frac{1}{I'}$ est négligeable au dénominateur devant $\frac{1}{I}$.

Elle est la même aussi que celle qui a été donnée par M. Cauchy, pour une section rectangle (art. 68).

Le résultat de l'analyse de M. Cauchy est donc exact par les sections rectangles très-allongées, ou pour les prismes plats [1]. Et nous verrons qu'il s'applique à tous les prismes rectangles, moyennant qu'on l'affecte de coefficients numériques compris entre 0,84 et l'unité.

[1] On arrive promptement à la formule de M. Cauchy en partant de nos équations

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad \frac{du}{dy} - \theta z = 0 \text{ pour } y = \pm b, \quad \frac{du}{dz} + \theta y = 0 \text{ pour } z = \pm c,$$

et en cherchant à y satisfaire par une série entière comme celles qu'il a essayées et qui, pour vérifier d'abord l'équation indéfinie, devra, vu la symétrie de la section, être celle (141) de l'art. 67,

$$u = a'_2 . 2yz + a'_4 (4y^3 z - 4yz^3) + \ldots\ldots$$

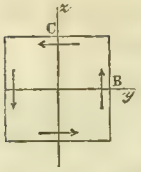
En faisant la substitution de cette série pour u dans les deux équations définies, et égalant à zéro les sommes de termes affectés des mêmes puissances, soit de z, soit de y, on obtient cette suite d'équations de condition pour déterminer les coefficients a

$$\begin{gathered} 2a'_2 - \theta + 12 a'_4 b^2 + 30 a'_6 b^4 + \ldots\ldots = 0; \\ 2a'_2 + \theta - 12 a'_4 c^2 + 30 a'_6 c^4 - \ldots\ldots = 0; \\ a'_4 + 15 a'_6 b^2 + \ldots\ldots = 0; \quad a'_4 - 15 a'_6 c^2 + \ldots\ldots = 0. \end{gathered}$$

Si l'on efface, des deux premières, les quatrièmes puissances de b et de c que M. Cauchy supposait très-petits, et si l'on élimine a'_4 entre elles, on en tire $2a'_2 = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\theta$, valeur qui, substituée dans l'expression de u réduite à son premier terme par la suppression de ceux du quatrième ordre et au-dessus, donne bien

$$u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\theta y z,$$

ou cette expression approchée (art. 68) qui se réduit à $u = -\theta yz$ lorsque c^2 est négligeable devant b^2.



75. *Second exemple. Prisme à base carrée.* — Supposons en second lieu que

$$b = c,$$

les expressions (156) deviennent :

$$(167)\quad u = -\theta yz + \frac{1}{2}\theta b^2\left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \frac{e^{\frac{2n-1}{2b}\pi y} - e^{-\frac{2n-1}{2b}\pi y}}{e^{\frac{2n-1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n-1}{2}\pi}} \sin\frac{2n-1}{2b}\pi z$$

$$= \theta yz - \frac{1}{2}\theta b^2\left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \frac{e^{\frac{2n-1}{2b}\pi z} - e^{-\frac{2n-1}{2b}\pi z}}{e^{\frac{2n-1}{2}\pi} + e^{-\frac{2n-1}{2}\pi}} \sin\frac{2n-1}{2b}\pi y$$

Nous avons, en nous aidant de la table des sinus et cosinus hyperboliques de M. Gudermann[1], calculé les valeurs de ces deux expressions pour des valeurs de $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{b}$ croissant de dixième en dixième. On les a trouvées concordantes. Il suffit de prendre trois, quatre, six et huit termes des séries jusqu'à $\frac{y}{b} = 0,9$ inclusivement par la première formule, et $\frac{z}{b} = 0,9$ par la seconde; et, quant aux valeurs répondant à $\frac{y}{b}$ ou $\frac{z}{b} = 1$, on simplifie le calcul de leurs termes plus nombreux en remplaçant $\frac{e^{+}-e^{-}}{e^{+}+e^{-}}$ par l'unité passé le troisième.

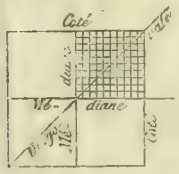
Voici le tableau des résultats :

[1] *Theorie der Potenzial, oder cyklisch-hyperbolischen Functionen*, von Dr C. Gudermann. Imprimé à part du Journal de Crelle, t. VI, VII, VIII, IX. Il appelle sinus et cosinus hyperboliques de x, comme nous avons dit, les fonctions $\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

PRISME A BASE CARRÉE ($b = c$). VALEURS DE $\frac{u}{\theta b^3}$.

POUR	$\frac{y}{b} = -0,1$	$\frac{y}{b} = 0$	$= 0,1$	$= 0,2$	$= 0,3$	$= 0,4$	$= 0,5$	$= 0,6$	$= 0,7$	$= 0,8$	$= 0,9$	$= 1,0$
Pour		Demi-médiane.			Demi-côté b.						Demi-côté $c = b$.	
$\frac{z}{b} = 1$	0,03477	0	— 0,03477	— 0,06788	— 0,09756	— 0,12193	— 0,13894	— 0,14617	— 0,14075	— 0,11884	— 0,07555	0
$= 0,9$	0,02562	0	— 0,02562	— 0,04959	— 0,07019	— 0,08560	— 0,09379	— 0,09344	— 0,07883	— 0,04949	0	0,07555
$= 0,8$	0,01810	0	— 0,01810	— 0,03464	— 0,04798	— 0,05642	— 0,05809	— 0,05090	— 0,03345	0	0,04949	0,11884
$= 0,7$	0,01214	0	— 0,01214	— 0,02286	— 0,03065	— 0,03399	— 0,03122	— 0,02054	0	0,03345	0,07883	0,14075
$= 0,6$	0,00762	0	— 0,00762	— 0,01398	— 0,01778	— 0,01765	— 0,01222	0	0,02054	0,05090	0,09344	0,14617
$= 0,5$	0,00437	0	— 0,00437	— 0,00766	— 0,00878	— 0,00661	0	0,01222	0,03122	0,05809	0,09379	0,13894
$= 0,4$	0,00219	0	— 0,00219	— 0,00350	— 0,00307	0	0,00661	0,01765	0,03399	0,05642	0,08560	0,12193
$= 0,3$	0,00088	0	— 0,00088	— 0,00110	0	0,00307	0,00878	0,01778	0,03065	0,04798	0,07019	0,09756
$= 0,2$	0,00022	0	— 0,00022	0	0,00110	0,00350	0,00766	0,01398	0,02286	0,03464	0,04959	0,06788
$= 0,1$	0	0	0	0,00022	0,00088	0,00219	0,00437	0,00762	0,01214	0,01810	0,02562	0,03477
$\frac{z}{b} = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		Centre.			Demi-diagonale.							
$= -0,1$	0	0	0	— 0,00022	— 0,00088	— 0,00219	— 0,00437	— 0,00762	— 0,01214	— 0,01810	— 0,02562	— 0,03477
$= -0,2$	— 0,00022	0	0,00022	0	— 0,00110	— 0,00350	— 0,00766	— 0,01398	— 0,02286	— 0,03464	— 0,04959	— 0,06788
$= -0,3$	— 0,00088	0	0,00088	0,00110	0	— 0,00307	— 0,00878	— 0,01778	— 0,03065	— 0,04798	— 0,07019	— 0,09756

Excepté la première colonne et les trois dernières lignes des valeurs de $\frac{u}{\theta b^2}$, mises comme amorces des trois autres quarts, ce tableau ne comprend que les points du *quart de section* divisé ci-contre en petits carreaux, et pour lequel y et z sont positifs. L'inspection seule des expressions (167) de u prouve que l'on a les mêmes valeurs dans la région des y et z négatifs, et des valeurs égales au signe près dans les deux autres régions ou quarts de section.



On voit que l'ordonnée u est nulle, non-seulement sur les deux *médianes* du carré (ce qui s'aperçoit facilement par les expressions (167), car elles s'annulent pour $y = 0$ ou $z = 0$), mais encore *sur les deux diagonales*, qui restent, par conséquent, ainsi que les médianes, dans le plan primitif de la section, tandis que tout le reste chemine en deçà ou au delà.

Cela montre que les expressions (167) s'annulent pour $y = z$, ou que l'on a en général (en faisant $\frac{\pi y}{2b} = t$)

$$\frac{\pi t^3}{8} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} \sin t - \frac{1}{3^3} \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}} \sin 3t + \frac{1}{5^3} \frac{e^{5t} - e^{-5t}}{e^{\frac{5\pi}{2}} + e^{-\frac{5\pi}{2}}} \sin 5t - \text{etc.} \quad [1]$$

Et il en devait être ainsi; car si le prisme dont les deux dimensions transversales sont égales est sollicité à la torsion par des couples de forces appliqués symétriquement à ses deux extrémités, il n'y a aucune raison pour que les diagonales des sections se dé-

[1] Cette égalité, en supposant t très-petit, et développant les exponentielles et les sinus, donne celle :

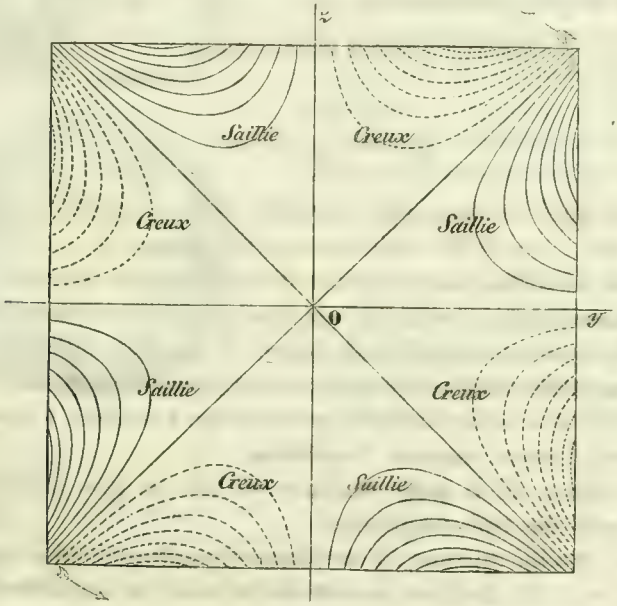
$$\frac{\pi}{16} = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{3} \frac{1}{e^{3\frac{\pi}{2}} + e^{-5\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{5} \frac{1}{e^{5\frac{\pi}{2}} + e^{-5\frac{\pi}{2}}} - \text{etc.},$$

qui se trouve démontrée autrement à la page 267 du second volume (1827) des *Exercices de mathématiques* de M. Cauchy.

placent plutôt du côté de l'une des extrémités que du côté de l'autre.

Cette considération explique aussi pourquoi, de part et d'autre des diagonales, comme de part et d'autre des médianes, les ordonnées u symétriquement placées sont égales au signe près; ainsi que le montre, au reste, l'égalité des deux expressions (167) de u, dont chacune ne fait que changer de signe sans changer de grandeur quand on y remplace y par z et réciproquement.

76. *Surface courbe affectée par ses sections après la torsion. — Coupes. — Relief. — Expériences à l'appui.* — La surface courbe affectée par la section se partage, comme on voit, en huit parties symétriques; dont quatre faisant saillie sur le plan primitif de la section; et quatre faisant creux ou dépression superposable à la saillie voisine en la faisant tourner de deux angles droits autour d'une des demi-diagonales ou d'une des demi-médianes.



Nos valeurs numériques de $\frac{u}{\theta b^2}$ donnent le moyen de tracer par points des coupes de la section, par des plans parallèles à l'axe de torsion, et aussi aux z ou aux y. Nous avons déduit graphiquement, de leurs intersections avec des lignes parallèles aux z ou aux y, des coupes *topographiques* perpendiculaires aux x, espacées de deux en deux centièmes de θb^2, ce qui fait, jusqu'aux plus grandes valeurs $\pm$ 0,146 θb^2 de u, sept coupes pour les saillies et autant pour les creux. Ce sont ces coupes que nous avons tracées à la figure du bas de la page précédente.

Si la rotation était d'un sens opposé à celui qu'indiquent les flèches, les parties creuses seraient saillantes, et réciproquement.

En supposant, par exemple, qu'un prisme de deux décimètres de côté, ou pour lequel

$$b = c = 0^{m},10,$$

soit tordu de manière que

$$\theta = 5; \text{ ou que le pas des hélices soit } = \frac{2\pi}{5} = 1^{m},2566,$$

l'on a

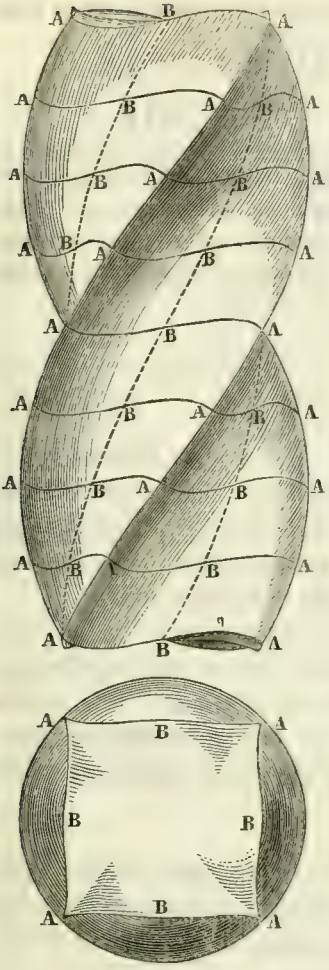
$$\frac{u}{\theta b^2} = \frac{u}{0,05} = 20\ u,$$

en sorte que les coupes pour lesquelles $\pm u = 0,02\ \theta b^2$; $0,04\ \theta b^2$; $0,06\ \theta b^2$..... $0,14\ \theta b^2$ sont faites par des plans à 1, 2, 3... 7 millimètres au-dessus ou au-dessous du plan primitif des sections.

Nous avons pu construire, en conséquence, en collant les unes sur les autres des feuilles de carton n° 9, d'un millimètre d'épaisseur, taillées suivant le patron des coupes relevées sur l'épure, le relief de la surface ondulée produite par la torsion. On pourrait se servir d'autres moyens d'exécution.

Le dessin de la page suivante en offre le plan et l'élévation à l'échelle des trois vingtièmes.

Une pareille torsion (d'une demi-circonférence pour une longueur $\pi = 3,1416$ fois le côté de la base) est considérable, et



telle que les secondes puissances des dilatations et glissements cesseraient d'être négligeables, ainsi que les différences de dilatation des diverses *fibres*, et que les lois que nous venons de trouver cesseraient de s'observer exactement. Mais cette exagération est sans inconvénient quand il ne s'agit que de rendre les formes très-visibles.

L'expérience, au reste, donne des résultats généraux conformes à ceux de notre analyse. Que l'on torde un prisme de caoutchouc, à base carrée, et l'on verra les lignes primitivement droites et perpendiculaires aux arêtes, tracées sur ses faces, devenir des courbes en S ou en doucine comme celles ABA qui résultent des calculs et tracés ci-dessus.

77. *Moment de torsion du prisme carré.* — Dans ce même cas $b = c$, les deux expressions (161) du moment de torsion deviennent :

$$(168)\quad M_x = G b^4 \theta \left\{ \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{3^5} \frac{e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}}}{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}} + \frac{1}{5^5} \frac{e^{\frac{5\pi}{2}} - e^{-\frac{5\pi}{2}}}{e^{\frac{5\pi}{2}} + e^{-\frac{5\pi}{2}}} + \dots \right) \right\}.$$

On trouve en calculant la série, qui est très-convergente, et se rappelant que le moment d'inertie polaire $J = I + I' = \frac{8}{3} b^4$:

$$M_x = 2{,}249233\ G b^4 \theta = 0{,}843462\ G J \theta.$$

D'après la théorie ordinaire, et même d'après celle plus approchée qui attribue à la section rectangulaire primitivement plane (art. 68) une forme paraboloïdale, la section carrée resterait plane et le moment de torsion serait $G J \theta$ pour le prisme carré comme pour le prisme ou cylindre circulaire.

On voit qu'il faut multiplier par

$$0{,}843462$$

cette formule usitée $G J \theta$; *en sorte que pour donner la même torsion à deux barres de même matière, l'une ronde, l'autre carrée, dont les sections ont le même moment d'inertie polaire* $J = \int r^2 d\omega$, *il faut que les forces appliquées à la barre carrée ne soient (pour même bras de levier) que les 0,843 des forces appliquées à la barre ronde.*

Cette moindre résistance des barres carrées à la torsion vient naturellement de ce que leurs sections, comme toutes celles qui ont des angles saillants, ploient vers ces angles (art. 68), tandis que les sections circulaires n'ont aucune raison de subir une semblable inflexion, lorsque l'élasticité de glissement est la même dans tous les sens transversaux.

78. *Expériences à l'appui.* — Elle est confirmée par les expériences de Duleau[1] et de Savart[2] dont voici les résultats. Nous en avons déduit, comme l'on voit, les valeurs du coefficient d'élasticité de glissement G pour chaque pièce.

[1] *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, brochure in-4°, 1820.

[2] *Annales de chimie et de physique*, t. XLI, 1829, p. 373. *Essai sur la réaction de torsion des verges rigides.*

EXPÉRIENCES DE DULEAU

(DONNANT LES ANGLES DES TORSIONS PRODUITES PAR UN POIDS DE 10 KILOGRAMMES AGISSANT À L'EXTRÉMITÉ D'UN BRAS DE LEVIER DE $0^m,32$) [1].

N°s des expériences.	DÉSIGNATION DES FERS.	LONGUEUR de la partie tordue.	DIAMÈTRE des fers ronds et côté des fers carrés (calculés par le poids).	ANGLE dont a tourné l'une des extrémités devant l'autre retenue fixe.	$\frac{M_x}{J\theta} = G$ pour les barres rondes seulement.	$\frac{M_x}{0{,}843462\,J\theta} = G$ pour les barres carrées.	VALEURS moyennes partielles du coefficient G.	OBSERVATIONS.
	FERS RONDS.			Degrés sexagésimaux.				
86	Fer rond du Périgord, tel qu'il sort des forges.	2,81	0,0152	13,4	7 336 700 000			Les diamètres mesurés ont été 0,0142, Exp. 86, 0,0197, Exp. 87.
87	*Idem*.....	3,17	0,0196	6	6 685 800 000			
91	*Idem*.....	3,19	0,02205	3,32	7 590 900 000		Fers ronds du Périgord.	
92	*Idem*.....	2,89	0,02303	3	6 395 500 000		6 577 070 000	
94	*Idem*.....	2,94	0,0265	1,82	6 117 400 000			
95	*Idem*.....	3,35	0,02673	1,87	6 553 600 000			
97	*Idem*.....	2,92	0,03572	0,625	5 359 600 000			
89	Fer rond de l'Ariége...	3,57	0,02149	4,8	6 512 600 009		Fer rond de l'Ariége.	
90	*Idem*.....	2,89	0,02151	4,5	5 602 700 000		6 058 270 000	
96	*Idem*.....	2,77	0,02682	1,65	6 059 500 000			
88	Fer rond anglais *Dawlays*.....	2,40	0,01983	4	7 246 600 000		Fer rond anglais.	
93	Fer rond anglais.....	3,24	0,02352	2 34	8 449 900 000		7 848 250 000	
	MOYENNES GÉNÉRALES pour les fers ronds....	.....	.....	.....	6 659 230 000			
	FERS CARRÉS.							
100	Fer carré du Périgord, tel qu'il sort des forges.	2,52	0,02035	3,08	5 248 300 000	6 222 400 000	Fer carré du Périgord.	Les côtés mesurés ont été 0,020. Exp. 98 et 99.
101	*Idem*.....	3,39	0,03260	0,62	5 325 500 000	6 313 900 000	6 268 150 000	
98	Fer carré anglais C 2..	4,12	0,01846	6,5	6 004 600 000	7 119 000 000	Fer carré anglais.	
99	Même pièce.....	2,52	0,01846	4	5 968 100 000	7 075 700 000	7 097 350 000	
	MOYENNES GÉNÉRALES pour les fers carrés....	.....	.....	.....	5 636 625 000	6 682 750 000		

[1] Ainsi l'on a constamment pour ces expériences $M_x = 3{,}2$. On voit, dans l'ouvrage de Duleau, un bras de levier de 0,31 seulement pour l'expérience 86; mais la comparaison avec les résultats de son calcul prouve qu'il faut lire 0,32.

Les moments d'inertie pour les barres rondes s'obtiennent en multipliant par

On voit bien, par ces expériences, que l'on ne peut pas prendre $GJ\theta$ pour le moment de torsion M_x des barres carrées comme des barres rondes, car les valeurs de $\frac{M_x}{J\theta}$ sont très-sensiblement inférieures pour les barres carrées; et, même, le rapport des moyennes générales 5 636 625 000 et 6 659 230 000, est

$$0{,}84644,$$

c'est-à-dire à très-peu près celui 0,843462 que fournit l'analyse ci-dessus.

Et, en tenant compte de ce rapport, ou en comparant les valeurs du coefficient d'élasticité G obtenues par $G = \frac{M_x}{J\theta}$ pour les barres rondes et $G = \frac{M_x}{0{,}843462\, J\theta}$ pour les barres carrées, on voit que l'on a des nombres fort peu différents, et dont les inégalités restent au-dessous de celles qu'offrent entre elles les expériences sur des barres de même forme.

$\frac{\pi}{32}$ les quatrièmes puissances des diamètres, et, pour les barres carrées, en prenant le 1/6^e des quatrièmes puissances des côtés. La torsion θ s'obtient en multipliant par $\frac{2\pi}{360}$ le nombre de degrés sexagésimaux, divisé par la longueur de la partie tordue de la barre.

Ce n'est que pour les deux premières expériences (n^{os} 86 et 87) que Duleau donne le détail de la suite des angles de torsion obtenus en appliquant différents poids. Ayant reconnu la proportionnalité des uns aux autres, il ne donne, en général, que l'angle réduit, pour un poids de 10 kilogrammes.

Ce n'est, non plus, que pour les barres de ces deux expériences, et aussi des expériences 98 et 99, qu'il donne les dimensions transversales *mesurées*. Il paraît n'avoir de confiance que dans les dimensions calculées d'après le poids, sans doute à cause des irrégularités des surfaces, ou du manque de moyens de mesurage très-précis : aussi il s'est dispensé du mesurage pour les autres barres, et nous avons dû, comme lui, ne nous servir pour nos calculs comparatifs que des dimensions qu'il dit avoir déduites des poids.

Au reste, on peut vérifier que les valeurs de $\frac{M_x}{J\theta}$ que nous donnons sont proportionnelles aux coefficients que Duleau déduit de ses expériences (et qui sont rapportés aux *Leçons* de Navier), excepté pour les expériences n^{os} 91 et 101 où l'on a

Ces expériences peuvent donc être regardées comme confirmant notre théorie, en mettant en lumière l'infériorité de résistance qu'elle révèle pour les barres carrées à égal moment d'inertie de la section.

On trouve même une infériorité encore plus marquée, si, au lieu de se servir des *moyennes générales*, l'on compare les *moyennes particlles* relatives aux fers ronds et aux fers carrés des mêmes pays; car on voit que, malgré la division par 0,843462, les valeurs de G obtenues des expériences sur les barres carrées, soit avec le fer du Périgord, soit avec le fer anglais, sont encore au-dessous des valeurs fournies par les expériences sur les barres rondes. Avec les fers anglais, le rapport des valeurs moyennes de $\frac{M_x}{J\theta}$ ne serait même que de $\frac{\frac{1}{2}(60046 + 59681)}{\frac{1}{2}(72466 + 84499)} = 0{,}763$. Mais ce nombre peut être regardé comme trop faible, car il doit y avoir dans les fers d'Angleterre des variations de qualité non moins nombreuses que dans les fers de France; or, d'après la colonne d'observations du

imprimé 11,99, tandis qu'il devait y avoir 12,99; et 15,40, tandis qu'il devait y avoir 15,49.

Ces coefficients, que Duleau appelle H pour les fers ronds, et M pour les fers carrés, ont les valeurs suivantes, en appelant (aussi avec lui) L la longueur de la partie tordue de la barre, D son diamètre si elle est ronde, C son côté si elle est carrée, g le nombre de degré sexagésimaux dont une des extrémités a tourné (il met quelquefois G), enfin K et S le poids qui fait tordre, et son bras de levier

$$H = \frac{LKS}{gD^4},\quad M = \frac{DKS}{gC^4}.$$

Dans ces formules de Duleau, il faut exprimer en *millimètres*, pour avoir ses nombres, non-seulement les dimensions transversales D et C comme il le dit, mais encore la longueur L et le bras de levier S, *quoiqu'il dise qu'il faille les exprimer en mètres.* Il en résulte qu'il faut multiplier ceux H par $\frac{(1000)^3}{\frac{\pi}{32}\cdot\frac{2\pi}{360}} = 583610100$ et ceux M par $\frac{(1000)^3}{\frac{1}{6}\cdot\frac{2\pi}{360}} = 343\,774000$, pour avoir nos nombres $\frac{M_x}{J\theta}$.

Nous avons cru nécessaire de donner ces détails, sans lesquels la lecture du livre de Duleau offre quelque embarras.

tableau de Duleau, le fer de l'expérience 88 était, comme celui des expériences 98 et 99, « très-doux à froid, cassant à chaud, étampé ou laminé, paraissant d'une densité moindre que le fer forgé ordinaire », en sorte que ces deux fers peuvent être comparables : mais il n'en est nullement de même à l'égard du fer anglais de l'expérience 93, et l'on voit même, par le chiffre qu'il donne pour $\frac{M_x}{J\theta}$, bien plus élevé que pour tous les autres échantillons, qu'il est d'une qualité exceptionnelle. Or, en excluant l'expérience 93 de la comparaison des fers ronds et des fers carrés anglais, il reste le rapport

$$\frac{\frac{1}{2}(60046 + 59681)}{72466} = 0{,}8261$$

qui n'est toujours pas au-dessus du rapport théorique, et qui en diffère fort peu.

EXPÉRIENCES DE SAVART

(DONNANT LES POIDS AGISSANT AU BOUT D'UN BRAS DE LEVIER DE $0^m{,}11$, QUI FONT TOURNER DE 1/400 DE CIRCONFÉRENCE L'UNE DES DEUX EXTRÉMITÉS DE DIVERSES VERGES DEVANT LEUR AUTRE EXTRÉMITÉ RESTÉE FIXE)[1].

DÉSIGNATION.	LONGUEURS des verges.	DIAMÈTRES des verges rondes et côté des verges carrées.	EFFORT faisant tourner de 1/100 d'angle droit.	$\frac{M_x}{J\theta} = G$ pour les verges rondes seulement.	$\frac{M_x}{0{,}843462\ J\theta} = G$ pour les verges carrées.
		Diamètre.	Kilog.		
Cuivre tiré à la filière, roud.	0,649	$0^m{,}0024$	0,00297	4 144 200 000	
Idem	*Idem.*	0 ,00458	0,04117	4 131 500 000	
Idem	*Idem.*	0 ,00691	0,207	4 203 200 000	
Idem	*Idem.*	0 ,00904	0,580	4 020 400 000	
MOYENNE				4 174 825 000	
		Côté.			
Cuivre tiré à la filière, carré.	0,649	0,00468	0,0595		4 009 900 000
Idem	*Idem.*	0,00566	0,1275		4 016 500 000
Idem	*Idem.*	0,00918	0,880		4 006 000 000
Idem	0,6567	0,00566	0,126		4 016 300 000
MOYENNE					4 012 180 000
		Diamètre.			
Laiton tiré à la filière, rond.	0,649	0,00672	0,160	3 632 100 000	
		Côté.			
Laiton tiré à la filière, carré.	1,302	0,00572	0,101		6 119 300 000

[1] En sorte que la torsion θ s'obtient en divisant $\frac{1}{400}\ 2\pi$ par la longueur des

On voit que les valeurs de G fournies par les expériences sur les tiges de cuivre carrées en divisant $\frac{M_x}{J\theta}$ par notre coefficient théorique 0,843462 sont sensiblement égales à celles fournies par les expériences sur les tiges rondes du même métal; et, comme dans les expériences de Duleau, l'infériorité de résistance des tiges carrées est plus marquée même que l'analyse ne l'indique, car le rapport des moyennes de $\frac{M_x}{J\theta}$ n'est que 0,810603; ce qui s'expliquerait facilement (comme on verra au chapitre neuvième) si les faces avaient une légère concavité.

Quant aux deux expériences sur le laiton, nous aurions pu les omettre; car la première attribue à cet alliage *moins de résistance* qu'au cuivre, et la seconde, *énormément plus*, en sorte que celle-ci donnerait, pour la résistance comparée des deux sortes de matière, et indépendamment de nos formules, un rapport presque double de celui que donne l'autre; ce qui dénote ou quelque erreur, ou quelque circonstance tout à fait anormale.

79. *Autre mode de calcul du rapport numérique entre la résistance des prismes carrés et celle des cylindres circulaires, pour même moment d'inertie de leurs bases.* — Bien que l'exactitude de la méthode connue d'intégration dont nous nous sommes servi pour trouver une solution de l'équation indéfinie $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$ qui satisfasse aux équations indéfinies $\frac{du}{dy} = \theta z$ pour $y = \pm b$ et $\frac{du}{dz} = -\theta y$ pour $z = \pm c$, soit hors de doute, il peut être intéressant de montrer qu'on arrive à très-peu près au même résultat numérique $M_x = 0{,}8435\ GJ\theta$ qu'elle a donné (art. 77) en opérant d'une manière toute différente, savoir, en cherchant à satisfaire approxi-

verges. Savart, comme Duleau, après avoir reconnu que l'angle de torsion, pour chaque verge, est proportionnel au poids qui le détermine, se dispense de présenter le détail de toutes ses expériences, et donne seulement, pour la plupart d'entre elles, après un calcul de proportion, le poids capable de faire tourner d'un degré centésimal.

mativement à ces équations par une expression entière en y, z, d'un nombre limité de termes, pris de plus en plus grand.

Cette expression, vu la forme symétrique du carré et son égalité dans les deux sens, ne peut être que celle (143) de l'art. 67, chapitre VII :

$$(169)\ u=a'_4(4y^3z-4yz^3)+a'_8(8y^7z-56y^5z^3+56y^3z^5-8yz^7)+\ldots$$

Si nous la différentions pour substituer dans $\mathfrak{g}_{xy}=\frac{du}{dy}-\theta z$, et si nous faisons

$$(170)\ldots\quad a'_4=\frac{A_4\theta}{4b^2},\ a'_8=\frac{A_8\theta}{8b^6},\ a'_{12}=\frac{A_{12}\theta}{12b^{10}},\ a'_{16}=\frac{A_{16}\theta}{16b^{14}},\ \text{etc.}$$

Nous avons, en divisant par θ :

$$(171)\quad \frac{1}{\theta}\mathfrak{g}_{xy}=z+\frac{A_4}{b^2}(3y^2z-z^3)+\frac{A_8}{b^6}(7y^6z-35y^4z^3+21y^2z^5-z^7)+$$
$$+\frac{A_{12}}{b^{10}}(11y^{10}z-165y^8z^3+462y^6z^5-330y^4z^7+55y^2z^9-z^{11})+\ldots$$

Ce glissement doit s'annuler pour $y^2=b^2$: on a donc, pour la première équation définie, en divisant par z

$$(172)\quad \left\{\begin{aligned}0=(-1&+3A_4+7A_8+11A_{12}+15A_{16}+\ldots)\\ &-\tfrac{z^2}{b^2}(A_4+35A_8+165A_{12}+455A_{16}+\ldots)\\ &+\tfrac{z^4}{b^4}(21A_8+462A_{12}+3003A_{16}+\ldots)\\ &-\tfrac{z^6}{b^6}(A_8+330A_{12}+6435A_{16}+\ldots)\\ &+\tfrac{z^8}{b^8}(55A_{12}+5005A_{16}+\ldots)\\ &-\tfrac{z^{10}}{b^{10}}(A_{12}+1365A_{16}+\ldots)\\ &+\tfrac{z^{12}}{b^{12}}(105A_{16}+\ldots)\\ &-\tfrac{z^{14}}{b^{14}}(A_{16}+\ldots)\\ &+\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Cette équation devant se vérifier quel que soit z, égalons à zéro les parenthèses qui affectent z^0, z^2, z^4, z^6, etc. Nous aurons des

équations que nous pouvons écrire ainsi, en mettant pour les coefficients numériques les expressions fractionnaires qu'ils reçoivent d'abord lorsqu'on construit les développements des puissances entières impaires d'un binôme, et en faisant disparaître les dénominateurs

$$
\left\{
\begin{array}{r}
(173)\\
-1+3\,A_4+\quad 7\,A_6+\quad 11\,A_{12}+\quad 15\,A_{16}+\ldots=0,\\
1.2.3\,A_4+5.6.7\,A_8+\quad 9.10.11\,A_{12}+\quad 13.14.15\,A_{16}+\ldots=0,\\
3.4.5.6.7\,A_8+\quad 7.8.9.10.11\,A_{12}+\quad 11.12.13.14.15\,A_{16}+\ldots=0,\\
1.2.3.4.5.6.7\,A_8+5.6.7.8.9.10.11\,A_{12}+\quad 9.10.11.12.13.14.15\,A_{16}+\ldots=0,\\
3.4.5.6.7.8.9.10.11\,A_{12}+\quad 7.8.9.10.11.12.13.14.15\,A_{16}+\ldots=0,\\
1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11\,A_{12}+5.6.7.8\ldots\ldots\ldots\ldots 15\,A_{16}+\ldots=0,\\
3.4.5.6\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 15\,A_{16}+\ldots=0,\\
1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 15\,A_{16}+\ldots=0,\\
\text{etc.}
\end{array}
\right.
$$

En substituant de même la série (169) à la place de u dans la seconde équation définie $q_{xz}=\frac{du}{dz}+\theta y=0$ pour $z^2=c^2$, *on aurait les mêmes équations* (173) à cause de l'égalité de la section dans les deux sens y et z.

Nous ne nous arrêterons pas à chercher, comme a fait Fourier pour un autre cas de solutions d'équations du premier degré en nombre infini[1], si l'on peut trouver une expression générale des coefficients A propres à satisfaire les équations (173), ou exprimer u en série convergente suivant les puissances entières de $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{b}$ (ce qui paraît peu probable). Nous nous contenterons de tirer successivement une inconnue A_4 de la première de ces équations réduite à deux termes, puis deux inconnues A_4, A_8 des deux premières, puis trois inconnues des trois premières, etc., en supposant nulles toutes les autres inconnues.

Nous aurons ainsi, en mettant ces valeurs numériques de A_4, A_8...

[1] *Théorie de la chaleur*, chap. III, art. 208.

dans les valeurs (170) $a'_4 = \frac{\theta}{4b^3} A_4$, etc. :

(174)

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Avec 1 eq}^{\text{n}}.\ a'_4 = \quad \frac{1}{3}\frac{\theta}{4b^3} \\
\text{2 eq}^{\text{ns}}.\ a'_4 = \quad \frac{5}{14}\frac{\theta}{4b^2},\ a'_8 = \quad \frac{-1}{98}\frac{\theta}{8b^6} \\
\text{3 eq}^{\text{ns}}.\ a'_4 = \quad \frac{55}{152}\frac{\theta}{4b^2},\ a'_8 = \quad \frac{-1}{76}\frac{\theta}{8b^6},\ a'_{12} = \quad \frac{1}{1672}\frac{\theta}{12b^{12}} \\
\text{4 eq}^{\text{ns}}.\ a'_4 = \frac{54665}{150448}\frac{\theta}{4b^2},\ a'_8 = \frac{-2145}{150448}\frac{\theta}{8b^6},\ a'_{12} = \frac{143}{150448}\frac{\theta}{12b^{12}},\ a'_{16} = \frac{7}{150448}\frac{\theta}{16b^{18}}.
\end{array}\right.$$

Valeurs qui sont à substituer dans (169) $u = a'_4 (4y^3z - 4yz^3)$ + etc., ou dans (144) moins les termes à exposants négatifs :

(175)... $u = a'_4 r^4 \sin 4\alpha + a'_8 r^8 \sin 8\alpha + a_{12} r^{12} \sin 12\alpha + a'_{16} r^{16} \sin 16\alpha$.

80. *Suite. Expression générale entière du moment de torsion pour le prisme rectangle.* — D'un autre côté, l'expression (139) $M_x = G\theta \int (y^2+z^2)\, d\omega - G \int d\omega \,[a_1 z - a'_1 y + 2a_2 . 2yz - 2a'_2 (y^2 - z^2) + \ldots]$ pour le cas général du rectangle, en ayant égard à ce que

(176) $$\left\{\int_{-b}^{b} dy \int_{-c}^{c} dz . y^m z^{m'} = \frac{4\, b^{m+1}\, c^{m'+1}}{(m+1)(m'+1)} \text{ quand } m \text{ et } m' \text{ sont pairs tous deux et} = 0 \text{ dans tout autre cas,}\right.$$

donne

(177) $$\left\{\begin{array}{l}
M_x = \frac{4}{3} G\theta (b^3 c + b c^3) + 4G \left\{ \frac{2a'_2}{3.4} (4b^3 c - 4bc^3) + \right. \\
\quad + \frac{4a'_4}{5.6} (6b^5 c - 20 b^3 c^3 + 6bc^5) + \\
\quad + \frac{6a'_6}{7.8} (8b^7 c - 56 b^5 c^3 + 56 b^3 c^5 - 8bc^7) + \ldots \left.\right\}
\end{array}\right.$$

ou

$$(178)\quad \begin{cases} M_x = \frac{2}{3} G\theta r_1^4 \sin 2\alpha_1 + 4G\left(\frac{2a'_2}{3.4} r_1^4 \sin 4\alpha_1 + \frac{4a'_4}{5.6} r_1^6 \sin 6\alpha_1 \right. \\ \qquad \left. + \frac{6a'_6}{7.8} r_1^8 \sin 8\alpha_1 + \frac{8a'^8}{9.10} r_1^{10} \sin 10\alpha_1 + \dots \right) \\ \text{En faisant } \sqrt{b^2 + c^2} = r_1, \text{ arctang } \frac{c}{b} = \alpha_1, \\ \qquad b = r_1 \cos\alpha_1, \; c = r_1 \sin\alpha_1. \end{cases}$$

Dans notre cas de la section carrée $b = c$, $r_1^2 = 2b^2$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ cette expression se réduit à

$$(179)\quad \begin{cases} M_x = \frac{8}{3} G b^4 \theta + 8 G b^2 \left(- \frac{4a'_4}{5.6} \cdot 2^2 b^4 + \frac{8a'_8}{9.10} 2^4 b^8 \right. \\ \qquad \left. - \frac{12a'_{12}}{13.14} 2^6 b^{12} + \frac{16a'_{16}}{17.18} 2^8 b^{16} - \dots \right) \end{cases}$$

Si nous substituons pour a'_4, a'_8, a'_{12}, a'_{16} les valeurs (174) que nous venons de trouver, nous obtenons, eu égard à ce que $\frac{8}{3} G b^4 \theta = GJ\theta$,

1re approximation $M_x =$	$\frac{13}{15} GJ\theta$	$= 0{,}86667\ GJ\theta$
2e	$\frac{208}{245}$	$= 0{,}84898$
3e	$\frac{967247}{1\,141\,140}$	$= 0{,}84760$
4e (avec 4 coefficients a')...	$\frac{45\,435\,238}{53\,709\,936}$	$= 0{,}84594\ GJ\theta.$

On voit que l'on approche beaucoup, et de plus en plus, du rapport trouvé précédemment 0,8435 de la résistance des prismes carrés et des prismes circulaires pour même moment d'inertie J de la base, même torsion θ et même moment d'élasticité de glissement G [1].

[1] Feu Wantzel m'a indiqué un moyen d'obtenir des approximations plus promptes.

81. *Glissements relatifs des fibres d'un prisme à section carrée.* — Nous avons calculé g_{xy}, g_{xz} aux divers points du contour des sections au moyen des formules trigonométriques (158) et (159) en remarquant, pour abréger le calcul des termes des séries, que les exponentielles à exposants négatifs peuvent être effacées devant celles à exposants positifs pour peu que le multiple de π dépasse 2 ou 2,5. Mais comme nous n'avions besoin, à l'égard des points de l'intérieur, que d'une approximation pour nous rendre compte de la marche de ces quantités g, sauf vérification analytique ultérieure de leurs lois les plus essentielles, nous avons provisoirement obtenu par interpolation, au moyen des valeurs numériques de $\frac{u}{\theta b^2}$ (tableau de l'art. 75), celles des $\frac{du}{dy}$ et $\frac{du}{dz}$, en substituant une suite d'arcs de parabole aux coupes, par des plans perpendiculaires aux z et aux y, de la surface dont y, z, u sont les coordonnées (nous interpolions par une parabole du troisième degré aux points d'inflexion).

Voici les tableaux des résultats obtenus, en se bornant au quart de section répondant aux y et z positifs, parce que g_{xy} reste le même au signe près quand on change z en $-z$, et g_{xz} quand on change y en $-y$:

Il consiste, après avoir remplacé y^2 par b^2, g_{xy} par zéro dans l'équation (171), à y mettre $b\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ pour z, ce qui lui donne la forme $-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = A_4\frac{\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha} + A_8\frac{\sin 7\alpha}{\cos^7\alpha} + A_{12}\frac{\sin 11\alpha}{\cos^{11}\alpha} + \ldots$, et à faire successivement sur α des hypothèses annulant un terme quelconque au delà duquel on n'en écrit plus. Par exemple si l'on fait $\alpha = \frac{\pi}{15}$, $\alpha = \frac{2\pi}{15}$, $\alpha = \frac{3\pi}{15}$, on annule le terme $A_{16}\frac{\sin 15\alpha}{\cos^{16}\alpha}$, et l'on a, en A_4, A_8, A_{12}, trois équations du premier degré qui donnent, pour ces trois inconnues, $A_4 = 0{,}36454$, $A_8 = 0{,}01521$, $A_{12} = 0{,}001298$; d'où $M_x = 0{,}8447\ GJ\theta$, en sorte que le résultat auquel on arrive ainsi avec trois coefficients est plus approché que celui que nous avons obtenu d'une autre manière avec quatre.

VALEURS DE $\frac{-\vartheta_{xy}}{\theta c}$ POUR LE 1/4 DE SECTION DU PRISME CARRÉ.

POUR $\frac{y}{b}=0$	$\frac{y}{b}=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$=1,0$
Pour	Demi-côté b.									Angle.
$\frac{z}{c}=1,0$ 1,35063	1,34225	1,31686	1,27351	1,21060	1,12553	1,01435	0,87075	0,68377	0,43015	0
$=0,9$ 1,159	1,151	1,123	1,080	1,018	0,934	0,825	0,685	0,506	0,275	0
$=0,8$ 0,984	0,976	0,949	0,909	0,851	0,772	0,672	0,546	0,390	0,205	0
$=0,7$ 0,840	0,817	0,793	0,756	0,703	0,633	0,544	0,435	0,306	0,158	0
$=0,6$ 0,678	0,672	0,651	0,618	0,572	0,512	0,436	0,346	0,241	0,124	0
$=0,5$ 0,546	0,540	0,522	0,495	0,456	0,406	0,344	0,271	0,187	0,096	0
$=0,4$ 0,423	0,419	0,404	0,383	0,352	0,312	0,263	0,206	0,142	0,072	0
$=0,3$ 0,310	0,307	0,296	0,279	0,256	0,226	0,191	0,149	0,102	0,052	0
$=0,2$ 0,203	0,201	0,193	0,183	0,167	0,148	0,124	0,097	0,066	0,034	0
$=0,1$ 0,100	0,099	0,096	0,090	0,083	0,073	0,061	0,048	0,033	0,017	0
$\frac{z}{c}=0$ 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Centre.	Demi-médiane.									

Demi-médiane. — Demi-côté $c=b$.

VALEURS DE $\frac{\vartheta_{xz}}{\theta b}$ POUR LE MÊME 1/4 DE SECTION.

POUR $\frac{y}{b}=0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$=1,0$
Pour	Demi-côté b.									Angle.
$\frac{z}{c}=1,0$ 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$=0,9$ 0	0,017	0,034	0,052	0,072	0,096	0,124	0,158	0,205	0,275	0,43015
$=0,8$ 0	0,033	0,066	0,102	0,142	0,187	0,241	0,306	0,390	0,506	0,68377
$=0,7$ 0	0,048	0,097	0,149	0,206	0,271	0,346	0,435	0,546	0,685	0,87075
$=0,6$ 0	0,061	0,124	0,191	0,263	0,344	0,436	0,544	0,672	0,825	1,01435
$=0,5$ 0	0,073	0,148	0,226	0,312	0,406	0,512	0,633	0,772	0,934	1,12553
$=0,4$ 0	0,083	0,167	0,256	0,352	0,456	0,572	0,703	0,851	1,018	1,21060
$=0,3$ 0	0,090	0,183	0,279	0,383	0,495	0,618	0,756	0,909	1,080	1,27351
$=0,2$ 0	0,096	0,193	0,296	0,404	0,522	0,651	0,793	0,949	1,123	1,31686
$=0,1$ 0	0,099	0,201	0,307	0,419	0,540	0,672	0,817	0,976	1,151	1,34225
$\frac{z}{c}=0$ 0	0,100	0,203	0,310	0,423	0,546	0,678	0,840	0,984	1,159	1,35063
Centre.	Demi-médiane.									

Demi-médiane. — Demi-côté $c=b$.

Les valeurs des g_{xz} sont les mêmes, comme l'on voit, au signe près (vu que $b = c$), que celles des g_{xy}, en sorte que, par exemple, pour $\frac{y}{b} = 0{,}3$, $\frac{z}{c} = 0{,}7$, la valeur de g_{xz} est la même que celle de $-g_{xy}$ pour $\frac{y}{b} = 0{,}7$, $\frac{z}{c} = 0{,}3$.

Au contour, l'un des deux glissements g_{xy}, g_{xz} a des valeurs nulles, et l'autre ses plus grandes valeurs. C'est ce qu'on pouvait voir d'après la deuxième expression (158) de g_{xy} et la première (159) de g_{xz}, car (et cela a lieu même lorsque les côtés $2b$, $2c$ ne sont pas égaux) la valeur numérique de g_{xy} augmente évidemment, et d'une manière indéfinie, avec z pour même valeur de y, et celle de g_{xz} augmente aussi avec y pour même valeur de z.

Formons maintenant, avec ces tableaux, *celui des glissements principaux résultants* $g_x = \sqrt{g^2_{xy} + g^2_{xz}}$.

VALEURS DE $\frac{1}{\theta b} g_x = \frac{1}{\theta b} \sqrt{g^2_{xy} + g^2_{xy}}$

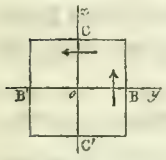
POUR LE 1/4 DE SECTION DU PRISME CARRÉ.

POUR	$\frac{y}{b} = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$= 1{,}0$	
l'eur	Demi-médiane.	Demi-côté b.									Angle.	
$= 1{,}0$	1,3506	1,3423	1,3169	1,2735	1,2106	1,1255	1,0144	0,8707	0,6838	0,4302	0	
$= 0{,}9$	1,159	1,151	1,123	1,081	1,021	0,939	0,834	0,702	0,546	0,389	0,4302	
$= 0{,}8$	0,984	0,977	0,952	0,914	0,862	0,795	0,713	0,625	0,552	0,546	0,6838	
$= 0{,}7$	0,840	0,818	0,798	0,770	0,732	0,688	0,644	0,615	0,625	0,702	0,8707	
$= 0{,}6$	0,678	0,677	0,662	0,647	0,630	0,616	0,617	0,644	0,713	0,834	1,0144	
$= 0{,}5$	0,546	0,545	0,542	0,544	0,552	0,574	0,616	0,688	0,795	0,939	1,1255	
$= 0{,}4$	0,421	0,427	0,438	0,460	0,497	0,552	0,630	0,732	0,862	1,021	1,2106	
$= 0{,}3$	0,310	0,319	0,347	0,395	0,460	0,544	0,647	0,770	0,914	1,081	1,2735	
$= 0{,}2$	0,203	0,220	0,273	0,347	0,438	0,542	0,662	0,798	0,952	1,123	1,3169	
$= 0{,}1$	0,100	0,140	0,212	0,319	0,427	0,545	0,677	0,818	0,977	1,151	1,3423	
$= 0$	0	0,100	0,203	0,310	0,423	0,546	0,678	0,840	0,984	1,159	1,3506	
	Centre.	Demi-médiane.										

Ainsi qu'on pouvait le prévoir, les glissements résultants g_x ont, comme leurs composants g_{xy}, g_{xz}, leurs plus grandes valeurs au contour de la section, ce que nous avons reconnu également (art. 61) pour le prisme elliptique.

82. *Points dangereux. Plus grand glissement.* — Nous pouvons donc admettre, avec tout le monde, que c'est sur le contour de la section qu'il faut chercher *le point dangereux* (art. 25), qui est celui de plus grand glissement lorsque la contexture du prisme est égale autour de l'axe des x.

Ceci admis, il est bien facile de reconnaître où se trouve ce point. Le tableau précédent montre qu'il répond également au point C pour lequel $y = 0$, $z = c = b$, et au point B pour lequel $z = 0$, $y = b$. Et l'analyse le prouve également; car, sur le côté dont fait partie le point C par exemple, l'on a $g_{xz} = 0$, $g_x = -g_{xy}$; or, en différentiant par rapport à y la seconde expression (158) de g_{xy}, on reconnaît que la plus grande valeur de $-g_{xy}$ pour z constant répond bien à $y = 0$. De même, la première expression (159) de g_{xz} montre que le plus grand glissement pour y constant répond à $z = 0$.



C'est donc aux extrémités C, C', B, B' *des médianes de la section, ou au milieu de ses côtés, que se trouvent les* POINTS DANGEREUX ou pour lesquels le glissement est le plus considérable.

La théorie nouvelle donne donc, pour la base carrée comme pour la base elliptique, un résultat tout opposé à la théorie ancienne.

D'après celle-ci, les points les plus exposés de toute la section étaient les plus éloignés de l'axe de torsion, c'est-à-dire les quatre angles; et les points du contour les moins exposés étaient les plus proches, c'est-à-dire les milieux des côtés.

D'après celle-là, les angles de la section *ne courent aucun danger* (au moins tant que subsistent les lois des déplacements, art. 5 et 24, sur lesquelles se basent les formules) : les arêtes y restent

normales à la section devenue courbe (art. 68), et le glissement y est nul dans tous les sens. Et les points le plus en péril sont ceux au milieu des côtés, c'est-à-dire précisément *les points du contour les plus rapprochés de l'axe.*

C'est, en effet, en ces derniers points que malgré une moindre inclinaison, sur l'axe de torsion, des fibres devenues hélicoïdales, ces fibres s'inclinent le plus sur la normale à la section, vu l'inclinaison prise en sens contraire par cette normale sur le même axe; comme on l'aperçoit très-bien sur le modèle en relief, de 20 centimètres de côté, dont on a parlé art. 76, ou sur l'épure ombrée de ce même article, qui en offre le plan et l'élévation à l'échelle des 0,15, en considérant les rencontres B, B, B des hélices ponctuées BBB... avec les lignes ABA qui représentent les côtés des sections devenues courbes.

Ce plus grand glissement est donné par l'expression suivante :

$$(180)\quad \left\{\begin{array}{l} \mp g_{xy}\,(\text{pour } y=0, z=\pm c) = \pm g_{xz}\,(\text{pour } y=\pm b, z=0) \\ = 2\,\theta b - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \theta b \left(\frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} + \frac{2\cdot\frac{1}{3^2}}{e^{3\frac{\pi}{2}} + e^{-3\frac{\pi}{2}}} + \frac{2\cdot\frac{1}{5^2}}{e^{5\frac{\pi}{2}} + e^{-5\frac{\pi}{2}}} + \ldots \right) \\ = 1{,}350630.\ b\theta. \end{array}\right.$$

83. *Condition de non-rupture du prisme carré. Confirmation expérimentale.* — Pour poser l'équation ou plutôt l'inégalité comme celle (53) de l'art. 27,

$$T = \text{ou} > \text{maximum de } G g_x,$$

exprimant que la matière du prisme ne se désagrégera pas sous l'action des forces qui le tordent et dont le moment est M_x, on voit que nous n'avons qu'à écrire, $\frac{T}{G}$ étant la limite à imposer au glissement principal (art. 27 et 63), ou ce qui revient au même, T celle que ne doit pas dépasser la composante tangentielle de pression par unité superficielle :

$$T \underset{\text{ou}>}{=} 1{,}35063.\ G\theta b,$$

d'où, en éliminant $G\theta$ avec (168) $M_x = 0{,}843462\ G\theta J$:

$$M_x = \text{ou} < \frac{0{,}843462}{1{,}35063}\frac{J}{b}T = 0{,}62450\frac{J}{b}T = 1{,}66532\,T b^3.\ ^1.$$

D'après la théorie ancienne qui ne tient pas compte du gauchissement, ou qui suppose que les sections carrées restent planes comme les sections circulaires, le plus grand glissement aurait lieu aux quatre angles; d'où $T = \text{ou} > G\theta b\sqrt{2}$, et, par suite, en éliminant $G\theta$ avec $M_x = G\theta J$, la condition $M_x = \text{ou} < 0{,}7071\frac{J}{b}T = 1{,}8876\ T b^3$. Cette théorie donnait donc, pour le moment de torsion, une limite trop élevée.

La seule confirmation expérimentale concluante que l'on puisse donner d'une formule de *résistance à la rupture éloignée*, établie comme le font aujourd'hui généralement les constructeurs et comme il a été dit art. 24 et 27, c'est-à-dire une formule ne faisant qu'imposer une limite à la plus grande dilatation ou au plus grand glissement, consiste à reconnaître si cette dilatation ou ce glissement maximum a bien lieu, d'après l'expérience, là où le place la théorie sur laquelle elle se fonde, et prend des valeurs qui y sont conformes, *tant que l'on ne dépasse pas la limite en question* qui doit, avons-nous dit, être fort resserrée.

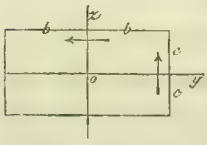
Les expériences de *rupture immédiate*, bien qu'utiles, ne fournissent, comme l'on sait, qu'une confirmation secondaire, et l'on ne peut, de leur défaut d'accord avec une formule de ce genre, rien inférer contre l'exactitude de celle-ci, puisqu'elles font acquérir aux déplacements des grandeurs qui dépassent énormément les limites où il convient de les renfermer, et telles que leurs lois changent tout à fait.

[1] Comme on a, lorsque la section ω est circulaire et d'un rayon r (art. 63, form. 127), $M_x = T\frac{\pi r^3}{2}$ ou $M_x = T\frac{\omega^{3/2}}{2\sqrt{\pi}}$ pour la limite à imposer au moment de la torsion, le moment de la résistance à la rupture d'un prisme carré n'est, *à égale superficie de la section* ou *à égale quantité de matière*, que les 0,7379 de ce qu'il serait si la base était circulaire, bien que (toujours à égale superficie), le moment d'inertie polaire de la section carrée soit 1^fois^,04712 plus fort, et que la distance du point le plus éloigné soit plus considérable dans la proportion de 1,253 à 1.

La première sorte de confirmation ne manque pas à nos formules, car l'expérience du prisme de caoutchouc (art. 76) montre bien *que c'est au milieu des faces latérales* que la fibre prend la plus forte inclinaison sur les éléments superficiels de section qu'elle rencontre, et que, par conséquent (art. 27), les éléments de volume éprouvent, au plus haut degré, cette déformation qui est reconnue la cause des ruptures quand elle devient forte.

Quant aux expériences de rupture immédiate par torsion, quelques-unes y sont aussi conformes, car on observe pour les barres carrées en bois ou en fer, que les bords n'éclatent pas comme dans la rupture par flexion, mais que les fibres se séparent en glissant l'une devant l'autre, ou que le solide *se fend* en divers endroits (fin de l'art. 28), tantôt auprès des rives, mais tantôt aussi vers le milieu des faces latérales. Et, avec des matières grenues, telles que la pierre calcaire, la brique crue, le plâtre, M. Vicat[1] a reconnu que lorsque le prisme carré à une longueur d'au moins deux fois son épaisseur, le moment des forces qui font rompre est moindre que lorsque le prisme est *infiniment court*, c'est-à-dire sollicité à tordre dans le plan même de son encastrement : ce qui prouve bien que la résistance est plus petite quand la section de rupture a la faculté de s'infléchir ou de *gauchir*, que lorsqu'elle est forcée, par exception, de rester plane, comme on supposait qu'elle faisait toujours dans la théorie ancienne.

84. *Cas d'un rapport quelconque des deux dimensions de la base. Calcul des u pour* $\frac{b}{c} = 2$. *Limite des cas où la section gauchie se partage en quatre ou en huit parties.* — Lorsque les côtés $2b$, $2c$ de la base ne sont pas égaux, les expressions générales (156) de u en série d'exponentielles et de sinus, qui s'annulent toujours pour $z = 0$ ou $y = 0$, et qui changent de signe sans changer de valeur absolue soit avec y soit avec z, prou-



[1] *Recherches expérimentales sur la rupture*, etc., *Annales des ponts et chaussées*, 1833, 2e semestre, p. 228-234.

vent que les deux *médianes oy, oz* restent encore dans le plan primitif de la section, et que la surface de la section *gauchie* se compose, comme dans le cas de l'ellipse, de quatre parties symétriques, deux en saillie et deux en creux.

Mais u ne s'annule pas pour $\frac{z}{y} = \frac{\pm c}{b}$, en sorte que les diagonales ne restent pas, comme les médianes, dans le plan où se trouvait la section avant la torsion.

C'est au reste ce que montre le tableau suivant relatif au cas

$$\frac{b}{c} = 2,$$

et dont les chiffres sont également donnés par l'une ou l'autre des deux expressions (156).

PRISME A BASE RECTANGLE. VALEURS DE $\frac{u}{\theta bc}$,

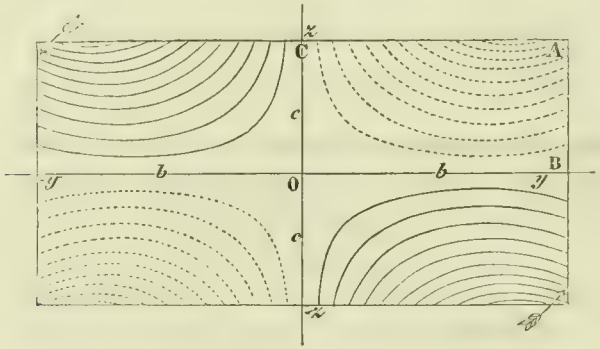
LORSQUE $\frac{b}{c} = 2$ OU LORSQU'UN DES CÔTÉS EST DOUBLE DE L'AUTRE.

POUR	$\frac{y}{b} = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$= 1,0$
Pour		Demi-côté.									Angle.
$\frac{z}{c} = 1$	0	0,08578	0,17014	0,25153	0,32806	0,39738	0,45634	0,50060	0,52392	0,51657	0,45917
$= 0,9$	0	0,07596	0,15051	0,22213	0,28895	0,34867	0,39815	0,43317	0,44765	0,43242	0,37197
$= 0,8$	0	0,06648	0,13161	0,19391	0,25161	0,30247	0,34354	0,37081	0,37869	0,35926	0,30175
$= 0,7$	0	0,05733	0,11340	0,16683	0,21595	0,25870	0,29233	0,31323	0,31647	0,29560	0,24325
$= 0,6$	0	0,04850	0,09586	0,14081	0,18188	0,21718	0,24428	0,26002	0,26024	0,23989	0,19388
$= 0,5$	0	0,03995	0,07890	0,11576	0,14923	0,17768	0,19905	0,21065	0,20914	0,19065	0,15166
$= 0,4$	0	0,03165	0,06247	0,09155	0,11782	0,13995	0,15624	0,16456	0,16229	0,14660	0,11504
$= 0,3$	0	0,02355	0,04646	0,06803	0,08744	0,10366	0,11541	0,12110	0,11881	0,10655	0,08269
$= 0,2$	0	0,01561	0,03079	0,04505	0,05784	0,06848	0,07609	0,07962	0,07783	0,06943	0,05346
$= 0,1$	0	0,00778	0,01533	0,02243	0,02879	0,03405	0,03779	0,03949	0,03850	0,03424	0,02622
$\frac{z}{c} = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Centre de la section.	Demi-médiane.									

Demi-médiane. — Demi-côté.

Si, des coupes perpendiculaires aux z et aux y que l'on peut construire immédiatement avec des ordonnées proportionnelles aux nombres des lignes horizontales et des colonnes verticales de ce tableau, l'on déduit, par interpolation graphique, des coupes perpendiculaires aux x faites de 4 en 4 centièmes de $0\,b\,c$ (ce qui répond à des valeurs de u croissant de millimètre en millimètre lorsque les côtés $2\,b$, $2\,c$ de la base sont respectivement de 2 et de 1 décimètre et que l'on a, comme à l'art. 54, $\theta = 5$, ou le pas des hélices $= \frac{2\pi}{5} = 1^{m},2566$), on a la figure ci-dessous (qui est à l'échelle des deux cinquièmes), et l'on peut facilement construire un relief de la surface courbe dans laquelle la section rectangulaire primitivement plane s'est transformée (voyez 2e figure de l'article 88).

On voit que, pour $\frac{b}{c} = 2$, chacun des quatre quarts de la sec-



tion devenue courbe est, ou entièrement en saillie ou entièrement en creux, tandis que pour $\frac{b}{c} = 1$ chacun des quatre quarts avait une partie saillante et une partie creuse, et le plan primitif coupait la section en huit parties.

Pour savoir quelle est la valeur du rapport $\frac{b}{c}$ au-dessous de laquelle il y a une pareille division en huit parties, il faut chercher celle pour laquelle on a justement $\frac{du}{dz} = 0$ au point B qui répond

à $z = 0$, $y = b$; car, quand ce coefficient différentiel devient positif, il se forme une saillie entre OB et A (1re fig., art. 76). Or, en ajoutant $-\theta y$ à g_{xz} on a $\frac{du}{dz}$, et en prenant la deuxième expression (159) de g_{xz} (comme la plus convergente), on obtient, en égalant à zéro après avoir fait $z = 0$, $y = b$, l'équation

$$\frac{2}{e^{\frac{\pi c}{2b}} + e^{-\frac{\pi c}{2b}}} + \frac{1}{3^2}\frac{2}{e^{\frac{3\pi c}{2b}} + e^{-\frac{3\pi c}{2b}}} + \frac{1}{5^2}\frac{2}{e^{\frac{5\pi c}{2b}} + e^{-\frac{5\pi c}{2b}}} + \ldots = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

qui, résolue numériquement, donne

$$\frac{b}{c} = 1{,}4513.$$

Selon donc que le rapport $\frac{b}{c}$ des dimensions sera plus grand ou plus petit que 1,4513, la section sera partagée par son plan primitif en quatre parties ou en huit.

85. *Moment de torsion pour les prismes rectangles.* — On en calcule facilement la valeur pour diverses grandeurs du rapport $\frac{b}{c}$ des côtés, au moyen des expressions (161) de M_x. La première peut être écrite, en ayant égard à ce que la valeur connue de $\Sigma \frac{1}{(2n-1)^5} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \ldots$ est $\frac{31}{32}.1{,}0369277551 = \frac{31}{32}\frac{\pi^5}{295{,}125}$ dont le produit par $\left(\frac{4}{\pi}\right)^5$ est 3,361327, et à ce que nous désignons par tah la tangente hyperbolique $\left(\text{en sorte que } \operatorname{tah} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$:

$$(181)\quad \begin{cases} M_x = G\theta b c^3 \left\{ \frac{16}{3} - 3{,}361327\,\frac{c}{b} + \right. \\ \left. + \frac{c}{b}\left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \left(\frac{1 - \operatorname{tah}\frac{\pi b}{2c}}{1} + \frac{1 - \operatorname{tah}\frac{3\pi b}{2c}}{243} + \frac{1 - \operatorname{tah}\frac{5\pi b}{2c}}{3125} + \text{etc.} \right) \right\}. \end{cases}$$

Sous cette forme elle est, lorsque $\frac{b}{c} > 1$, plus convergente que la seconde expression (161) transformée de même, et il suffit de

prendre deux termes du développement entre parenthèses, ou trois au plus.

Il en résulte ces expressions :

$$(182)\quad M_x = G\theta bc^3\left(\frac{16}{3} - \lambda\frac{c}{b}\right),\quad M_x = \mu G\theta bc^3,\ \left(\text{où } \mu = \frac{16}{3} - \lambda\frac{c}{b}\right)$$

λ et μ étant des coefficients numériques donnés, pour les diverses valeurs de $\frac{b}{c}$ de 1 à l'infini, par la table que l'on trouvera à la fin du Mémoire.

Les coefficients μ varient de 2,249 à 5,333 $= \frac{16}{3}$. Ceux λ ne varient qu'entre 3,084 et 3,36, de $\frac{b}{c} = 1$ à $\frac{b}{c} = 2{,}50$, et ils conservent, à très-peu près, la valeur constante 3,36 au delà de $\frac{b}{c} = 2{,}50$.

On peut, en deçà, ou pour des valeurs de $\frac{b}{c}$ moindres, se servir d'une autre formule dont le coefficient μ' est très-peu variable jusqu'à $\frac{b}{c} = 2$: c'est

$$(183)\qquad M_x = \mu'.G\theta\,\frac{\frac{16}{3}b^3c^3}{b^2+c^2},$$

c'est-à-dire la formule de M. Cauchy (art. 68), affectée de ce coefficient μ' dont on voit aussi les valeurs numériques à la table finale. Il diffère peu de 0,85, jusqu'à $\frac{b}{c} = 2$, mais, au delà, il augmente jusqu'à l'unité[1].

86. *Comparaison aux expériences.* — Comparons les résultats

[1] Si l'on se servait de la formule de l'ancienne théorie $M_x = G\theta J = G\theta.\frac{4bc}{3}(b^2+c^2)$, il faudrait l'affecter de coefficients excessivement variables, de 0,843 à zéro. Le moment de torsion M_x est si loin d'être proportionnel au moment d'inertie polaire J qu'il varie dans un sens inverse, à égale superficie ω de la section, car on a $M_x = G\theta.\frac{\mu'}{36}\frac{\omega^3}{J}$.

Si l'on essayait de construire une valeur algébrique de M_x avec l'expression en-

de l'application de cette expression (182) $\mu G \theta b c^3$ à ceux des expériences de Duleau et Savart pour les barres rectangulaires, en déterminant le coefficient G qui résulte de chacune de ces expériences.

EXPÉRIENCES DE DULEAU SUR LA TORSION DES BARRES RECTANGULAIRES (VOIR ART. 78 CI-DESSUS).

N°s des expériences.	DÉSIGNATION.	LONGUEUR.	LARGEUR (mesurée) $2b$.	ÉPAISSEUR (calculée par le poids) $2c$.	RAPPORT $\frac{b}{c}$.	ANGLE dont a tourné une des extrémités sous l'effort d'un poids de 10 kil. avec un bras de levier de $0^m,32$.	COEFFICIENT μ de la 3e colonne de la table finale pour chaque valeur $\frac{b}{c}$.	VALEURS de G, ou quotients de $M_z = 3,2$ par $\theta b c^3$ et par ce coefficient. μ
			mètre.	mètre.		Degrés sexagésim.		
102	Fer plat anglais.....	2,91	0,034	0,00856	3,97	11,40	4,486	7 840 800 000
103	Même pièce.....	1,55	0,034	0,00856	3,97	5,62	4,486	8 452 100 000
104	Fer plat du Périgord.	2,91	0,034	0,01045	3,25	7,2	4,293	7 109 800 000
105	Fer anglais marqué B.	1,45	0,0678	0,01474	4,60	0,85	4,601	5 006 200 000

On voit que si l'on excepte la dernière expérience, où la torsion opérée a été extrêmement faible, et qui paraîtra toujours

tière approchées $u = a'_2 . 2yz + a'_4 (4y^3 z - 4yz^3)$ de la note de l'art. 74 en faisant $a'_2 = -\frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2}\theta$, $a'_4 = \frac{\theta}{6(b^2+c^2)}$, on trouverait $\frac{16}{3} G\theta \frac{b^3 c^3}{b^2 + c^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{b^2}{10\,c^2} + \frac{c^2}{10\,b^2}\right)$ qu'il faudrait multiplier par des coefficients de 0,973 à zéro, en sorte qu'elle ne peut être d'aucun secours.

Pour pouvoir exprimer le moment de torsion M_z par une formule à coefficients constants, d'une forme simple, il faut avoir recours à l'empirisme et se contenter d'à peu près. J'ai reconnu que l'on a approximativement $\lambda = \frac{3,36}{1 + 0,09\left(\frac{c}{b}\right)^4}$ ou, un peu moins exactement, mais plus simplement :

$$\lambda = 3,36\left(1 - \frac{1}{12}\frac{c^4}{b^4}\right) = 0,28\left(12 - \frac{c^4}{b^4}\right),$$

d'où l'on tire, en substituant dans $\mu = \frac{16}{3} - \lambda \frac{c}{b}$:

anormale, de quelque formule qu'on se serve pour la représenter, les coefficients d'élasticité de glissement obtenus pour les fers rectangulaires, en se servant de la formule et des coefficients numériques μ de l'article précédent, sont comparables à ceux obtenus des expériences du même auteur (art. 78), relatives aux fers ronds et aux fers carrés de même provenance. C'est tout ce que nous pouvions attendre d'une pareille vérification expérimentale, faite avec des fers laminés ou forgés dont les élasticités ne pouvaient être exactement égales, et devaient même varier en divers sens et aux divers points de la section pour une même barre.

A cet égard, Savart était si persuadé de la perturbation notable que les différences inévitables d'élasticité des barres de diverses grosseurs et de diverses formes pouvaient apporter dans les comparaisons relatives à l'influence des dimensions transversales inégales, qu'il rejeta l'emploi des verges métalliques pour de semblables comparaisons. Il s'arrêta à employer *du plâtre*, qu'il regardait, d'après ses expériences sur les vibrations sonores, comme jouissant de l'égalité d'élasticité en tous sens, et comme étant seul propre, par conséquent, à donner des résultats concluants, malgré la petitesse des angles de torsion que les limites fort resserrées de la stabilité de sa contexture permettent d'obtenir.

Après avoir fait une première expérience sur une verge de cette matière, il en réduisit les dimensions transversales en l'usant et il la soumit de nouveau à la torsion. Il fit la même chose pour des règles de bois de chêne, mais en exprimant l'opinion que les expériences auxquelles on les emploie ne sont bien comparables que lorsque le rapport des deux dimensions transversales est le même après leur diminution qu'avant.

Pour $\frac{b}{c} = 1$ 1,10 1,25 1,50 2,00 3 5 10 50

$\mu = 2{,}253$; $2{,}453$; $2{,}737$; $3{,}130$; $3{,}662$; $4{,}214$; $4{,}661$; $4{,}997$; $5{,}266$;

valeurs assez rapprochées de celles du tableau de la fin du Mémoire pour que la formule empirique $M_t = G\,\theta\,b\,c^3\left[\frac{16}{3} - 3{,}36\,\frac{c}{b}\left(1 - \frac{1}{12}\,\frac{c^4}{b^4}\right)\right]$ réponde aux besoins de la pratique.

Enfin il essaya des lames de verre, mais très-minces comparativement à leur largeur.

Voici le tableau de ses expériences[1] :

EXPÉRIENCES DE SAVART SUR LA TORSION DES VERGES RECTANGULAIRES (VOIR ART. 78 CI-DESSUS).

DÉSIGNATION.	LONGUEUR.	LARGEUR $2b$.	ÉPAISSEUR $2c$.	RAPPORTS $\frac{b}{c}$.	EFFORT qui, appliqué au bout d'un bras de levier de $0^m,11$, fait tourner une extrémité de 1/100 d'angle droit.	COEFFICIENT μ de la 3e colonne de la table finale pour chaque valeur de $\frac{b}{c}$.	VALEURS de G ou du quotient du moment M_2 de l'effort, par ce coefficient μ et par $\theta b c^3$
	mètre.				kil.		
Plâtre	0,3743	0,0271	0,00698	3,88	0,120	4,466	122 680 000
Idem	*Idem.*	0,01721	0,00519	3,31	0,0303	4,312	122 830 000
Chêne	0,5235	0,046634	0,01059	4,40	0,3550	4,568	82 267 000
Idem (même règle diminuée)	*Idem.*	0,023317	0,005295	4,40	0,022	4,568	81 591 000
Chêne	0,5764	0,096	0,00537	17,90	0,105	5,130	177 210 000
Idem (même règle amincie)	*Idem.*	*Idem.*	0,00254	37,80	0,0114	5,225	179 150 000
Idem	*Idem.*	*Idem.*	0,0017	56,50	0,00393	5,270	203 630 000
Verre à vitre	0,63	0,0544	0,00156	34,87	0,07	5,215	4 586 000 000
Idem	0,315	0,0544	*Idem.*	34,87	0,140	5,215	4 586 000 000
Idem	*Idem.*	0,02546	*Idem.*	16,82	0,068	5,112	4 818 000 000

Les deux expériences sur le plâtre, faites avec des verges où le rapport des dimensions transversales a été successivement 3,9 et 3,3 offrent, dans leur comparaison, un résultat pleinement confirmatif de la théorie ci-dessus.

La comparaison des deux premières expériences sur le chêne prouve seulement que les résistances, pour des sections rectangulaires semblables, varient comme les quatrièmes puissances de

[1] Nous nous dispensons d'en rapporter deux autres qu'il fit avec des lames d'acier et de laiton laminé ou étiré, mais sans accorder aucune confiance aux conclusions qu'on essayerait d'en tirer de la même manière.

leurs dimensions homologues; et la comparaison des deux premières expériences sur le verre prouve seulement que l'angle de rotation, pour même effort et même section, est proportionnel à la longueur de la lame.

Mais la troisième et la quatrième expérience sur le chêne vérifient la loi théorique relative aux lames minces ou aux sections très-allongées. Et la même vérification se rencontre dans la comparaison des deux premières expériences sur le verre à la troisième expérience sur la même matière.

On ne peut inférer de la cinquième expérience sur le chêne, comparée aux deux précédentes, rien de contraire à cette même loi; car lorsqu'une règle d'une matière aussi fibreuse et aussi peu homogène a été réduite, par un rabotage nécessairement accompagné de compression, à une épaisseur d'environ un millimètre et demi, l'on conçoit très-bien que la résistance spécifique au glissement mutuel de ses fibres ait pu changer très-sensiblement. Et l'on ne doit pas s'étonner davantage d'avoir trouvé un coefficient de résistance très-différent avec le prisme des deux premières expériences sur le chêne et avec la règle des trois dernières, lorsqu'on applique une formule où l'on suppose que les élasticités sont égales dans les deux sens transversaux, faute de savoir quel est leur rapport, dont la connaissance eût permis de se servir des formules plus générales que nous donnerons plus loin (chapitre X) pour le cas d'inégale élasticité.

87. *Glissements relatifs des fibres, quand les sections sont rectangulaires. Plus grands glissements pour des points de chacun de leurs côtés.* — Si nous calculons comme pour le prisme carré (art 81) les glissements g_{xy}, g_{xz} aux divers points de la section rectangle pour laquelle $\frac{b}{c} = 2$, c'est-à-dire exactement par les formules (158), (159) pour les points du contour, et approximativement au moyen des valeurs de u du tableau de l'art. 84 pour les points de l'intérieur, nous obtenons les nombres consignés aux deux tableaux suivants :

VALEURS DE $\frac{\vartheta_{xy}}{\theta c}$ AUX DIVERS POINTS DU QUART DE SECTION DU PRISME RECTANGLE POUR LEQUEL $b = 2c$ OU DONT LA BASE A L'UNE DES DIMENSIONS DOUBLE DE L'AUTRE.

POUR $\frac{y}{b} = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Pour	Demi-côté b.									Angle.
$\frac{x}{c} = 1,0$ — 1,86012	1,85315	1,83153	1,79306	1,73377	1,64744	1,52457	1,35044	1,10044	0,72477	0
$= 0,9$ — 1,662	1,655	1,631	1,592	1,533	1,446	1,323	1,148	0,896	0,521	0
$= 0,8$ — 1,467	1,460	1,437	1,400	1,343	1,260	1,142	0,976	0,742	0,415	0
$= 0,7$ — 1,275	1,269	1,248	1,213	1,159	1,082	0,973	0,821	0,612	0,334	0
$= 0,6$ — 1,087	1,081	1,062	1,030	1,932	0,912	0,814	0,680	0,499	0,268	0
$= 0,5$ — 0,901	0,896	0,879	0,852	0,810	0,749	0,665	0,550	0,400	0,213	0
$= 0,4$ — 0,718	0,714	0,700	0,677	0,642	0,592	0,523	0,430	0,310	0,164	0
$= 0,3$ — 0,537	0,533	0,522	0,505	0,478	0,440	0,387	0,317	0,227	0,119	0
$= 0,2$ — 0,357	0,355	0,347	0,335	0,317	0,291	0,256	0,209	0,149	0,078	0
$= 0,1$ — 0,179	0,177	0,173	0,167	0,158	0,145	0,127	0,104	0,074	0,039	0
0 — 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Centre de la section.	Demi-médiane.									

Demi-médiane. — Demi-côté c.

VALEURS DE $\frac{\vartheta_{xz}}{\theta b}$ AUX MÊMES POINTS.

POUR $\frac{y}{b} = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Pour	Demi-côté b.									Angle.
$\frac{x}{c} = 1,0$ — 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$= 0,9$ — 0	0,0035	0,007	0,012	0,018	0,025	0,036	0,051	0,074	0,113	0,22509
$= 0,8$ — 0	0,007	0,014	0,024	0,035	0,050	0,071	0,100	0,144	0,216	0,36172
$= 0,7$ — 0	0,010	0,021	0,035	0,051	0,074	0,104	0,146	0,208	0,303	0,46451
$= 0,6$ — 0	0,013	0,027	0,045	0,066	0,095	0,134	0,187	0,263	0,375	0,54488
$= 0,5$ — 0	0,016	0,033	0,054	0,080	0,114	0,160	0,223	0,310	0,434	0,60812
$= 0,4$ — 0	0,018	0,038	0,061	0,091	0,130	0,182	0,252	0,348	0,480	0,65717
$= 0,3$ — 0	0,020	0,042	0,067	0,100	0,143	0,199	0,275	0,378	0,514	0,69391
$= 0,2$ — 0	0,021	0,044	0,072	0,107	0,152	0,212	0,292	0,399	0,538	0,71943
$= 0,1$ — 0	0,022	0,046	0,075	0,111	0,159	0,220	0,303	0,412	0,554	0,73446
0 — 0	0,022	0,047	0,076	0,112	0,160	0,223	0,306	0,416	0,559	0,73945
Centre.	Demi-médiane.									

Demi-médiane. — Demi-côté c.

Ainsi que nous l'avions remarqué (art. 81) pour le prisme carré $\frac{b}{c} = 1$, et ainsi qu'il résulte des expressions en série (118) et (159) de g_{xy} et g_{xz} (*id.*), c'est sur les côtés du contour rectangle de la section que se trouvent les plus grandes valeurs de celui des deux glissements qui n'est pas nul.

Si nous multiplions par $2 = \frac{b}{c}$ les nombres du premier tableau, et si nous ajoutons leurs carrés à ceux des nombres du deuxième, nous aurons, en extrayant la racine, les nombres suivants, proportionnels aux glissements résultants $g_x = \sqrt{g^2_{xy} + g^2_{xz}}$.

VALEURS DE $\frac{1}{\theta c} g_x = \frac{1}{\theta c} \sqrt{g^2_{xy} + g^2_{xz}}$

AUX POINTS DU QUART DE SECTION DE *idem*.

POUR $\frac{y}{b} = 0$		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$= 1,0$
Pour		Demi-côté b.									Angle.
$\frac{z}{c} = 1,0$	1,8601	1,8532	1,8315	1,7931	1,7338	1,6474	1,5246	1,3504	1,1004	0,7248	0
0,9	1,662	1,655	1,631	1,592	1,533	1,447	1,324	1,152	0,908	0,569	0,4502
0,8	1,467	1,460	1,437	1,401	1,344	1,264	1,150	0,996	0,796	0,599	0,7234
0,7	1,275	1,269	1,248	1,215	1,164	1,092	0,995	0,871	0,740	0,692	0,9290
0,6	1,087	1,082	1,063	1,034	0,941	0,932	0,857	0,776	0,726	0,797	1,0898
0,5	0,901	0,897	0,882	0,858	0,825	0,783	0,738	0,708	0,738	0,893	1,2162
0,4	0,718	0,715	0,704	0,688	0,667	0,647	0,637	0,663	0,763	0,973	1,3143
0,3	0,537	0,534	0,529	0,523	0,518	0,524	0,556	0,635	0,789	1,037	1,3878
0,2	0,357	0,357	0,358	0,365	0,382	0,421	0,495	0,620	0,811	1,075	1,4389
0,1	0,179	0,182	0,196	0,224	0,273	0,348	0,459	0,615	0,827	1,111	1,4689
$\frac{z}{c} = 0$	0	0,045	0,094	0,152	0,225	0,320	0,446	0,613	0,833	1,118	1,4789
	Centre.	Demi-médiane.									

Demi-médiane. — Demi-côté c.

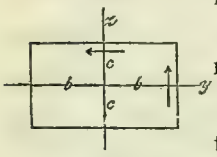
On voit que l'on peut admettre avec tout le monde que le point du plus grand glissement doit être cherché sur le contour de la section.

Et, sur chacun des côtés $2b$, $2c$ de ce contour, il doit être

pris au milieu, comme le montrent, non-seulement les chiffres, mais encore l'analyse *pour un rapport quelconque entre* b *et* c, puisque g_x se réduit à $-g_{xy}$ sur le côté $2b$, et à g_{xz} sur le côté $2c$, et que la première expression (159) de g_{xz}, différentiée après qu'on y a fait $y=b$, donne bien le maximum pour $z=0$.

88. *Point dangereux ou de plus grand glissement. — Expériences.* — Mais lequel est le plus grand, du glissement au milieu du grand côté $2b$ ou du glissement au milieu du petit côté $2c$?

Le calcul numérique nous apprend que c'est le glissement au milieu de $2b$ ou du plus grand côté.



Et l'analyse peut nous le prouver généralement.

En effet, en désignant toujours par *tah* une tangente hyperbolique $\frac{e^+-e^-}{e^++e^-}$ nous avons respectivement pour ces deux glissements (form. 158, 159):

$$(184)\quad -g_{xy}(\text{pour } y=0,\ z=c)=\theta b\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\Sigma\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\operatorname{tah}\frac{2n-1}{2}\pi\,\frac{c}{b},$$

$$(185)\quad g_{xz}(\text{pour } y=b,\ z=0)=\theta c\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\Sigma\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\operatorname{tah}\frac{2n-1}{2}\pi\,\frac{b}{c}.$$

Le quotient du premier par le second peut être écrit:

$$(186)\quad \frac{\frac{b}{c}\operatorname{tah}\frac{\pi}{2}\frac{c}{b}-\frac{1}{9}\frac{b}{c}\operatorname{tah}\frac{3\pi}{2}\frac{c}{b}+\frac{1}{25}\frac{b}{c}\operatorname{tah}\frac{5\pi}{2}\frac{c}{b}-\ldots}{\operatorname{tah}\frac{\pi}{2}\frac{b}{c}-\frac{1}{9}\operatorname{tah}\frac{3\pi}{2}\frac{b}{c}+\frac{1}{25}\operatorname{tah}\frac{5\pi}{2}\frac{b}{c}-\ldots}$$

Or, il est facile de voir que ce rapport, qui est $=1$ lorsque $\frac{b}{c}=1$, est toujours plus grand que 1 lorsque $\frac{b}{c}>1$.

En effet, en donnant à $\frac{b}{c}$ des valeurs croissantes, on a:

$$\text{Pour } \frac{b}{c} = 1{,}05, \quad \frac{0{,}9501 - 0{,}1166 + 0{,}040 - \ldots}{0{,}9285 - 0{,}1111 + 0{,}040 - \ldots}$$

$$1{,}10, \quad \frac{0{,}980 - 0{,}1220 + 0{,}040 - \ldots}{0{,}939 - 0{,}1111 + 0{,}040 - \ldots}$$

$$1{,}20, \quad \frac{1{,}040 - 0{,}1332 + 0{,}040 - \ldots}{0{,}955 - 0{,}1111 + 0{,}040 - \ldots}$$

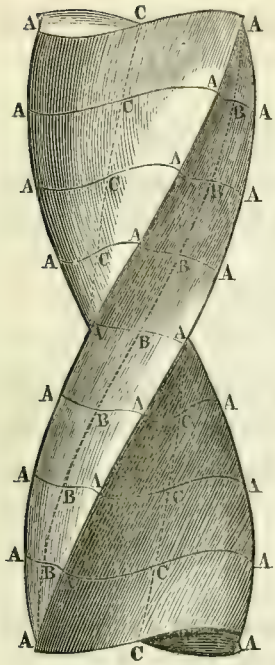
$$1{,}30, \quad \frac{1{,}083 - 0{,}1442 + 0{,}040 - \ldots}{0{,}967 - 0{,}1111 + 0{,}040 - \ldots}$$

valeurs qui excèdent toutes l'unité puisque chacun des termes du numérateur excède le terme correspondant du dénominateur, bien que lui devenant sensiblement égal passé le second; et valeurs qui croissent évidemment avec $\frac{b}{c}$. Il reste donc à s'assurer que la supériorité du numérateur sur le dénominateur se conserve lorsque $\frac{b}{c}$ est très-peu au-dessus de 1. Il suffit pour cela de comparer leurs premiers termes, qui surpassent toujours beaucoup les autres, ou de voir si $\frac{\left(\frac{b}{c}\right) \operatorname{tah} \frac{\frac{1}{2}\pi}{\left(\frac{b}{c}\right)}}{\operatorname{tah} \frac{1}{2}\pi \left(\frac{b}{c}\right)}$ dont la valeur $= 1$ lorsque $\frac{b}{c} = 1$, a un coefficient différentiel positif par rapport à la variable $\frac{b}{c}$, pour $\frac{b}{c} = 1$. Or, ce coefficient différentiel est

$$1 - \frac{4\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = 0{,}45595.$$

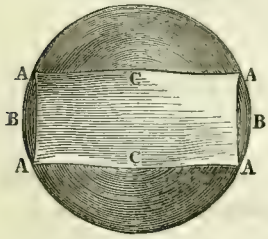
Le glissement principal des fibres, au milieu du plus grand côté, excède donc toujours le glissement principal au milieu du plus petit.

Donc, *c'est aux extrémités de la petite médiane du rectangle, ou au milieu de ses deux plus grands côtés, c'est-à-dire aux points du contour les plus rapprochés de l'axe de torsion, que se trouve le plus grand danger de rupture.*



C'est ce qu'on voit très-bien sur la figure ci-contre qui représente (voy. art. 84) en plan et en élévation le relief d'un prisme à base rectangle de 30 millimètres sur 15, auquel on a donné une torsion exagérée, savoir, d'une demi-circonférence pour $3^{\text{fois}},14159$ le grand côté de la base. Les fibres CCCC... ont acquis une inclinaison très-prononcée sur les grands côtés infléchis ACA, tandis que les fibres BBB... sont restées presque normales aux petits côtés ABA.

C'est ce que montre aussi l'expérience de la torsion d'un prisme rectangulaire de caoutchouc; car on aperçoit bien que c'est au milieu des grands côtés qu'a lieu le plus grand glissement, cause de rupture par torsion des matières plus solides et plus *sèches* que le caoutchouc. Et l'observation de l'état où la rupture amène celles-ci n'y contredit nullement, comme on a dit art. 83 pour le prisme carré.



89. *Équation de non-rupture ou de stabilité de la cohésion du prisme tordu. — Plus grands glissements.* — L'équation générale de non-rupture par glissement, du cas où les parallèles à x sont axes de symétrie en tous sens (art. 27, formule 53), revient à :

(187) $\mathrm{T} = \text{ou} > \mathrm{G} \times$ (le plus grand glissement principal g_x).

Nous avons trouvé (art. 82 et 87) ce plus grand glissement, pris positivement, égal à $1{,}3506\ \theta c$ lorsque $\frac{b}{c} = 1$ et à $1{,}8601\ \theta c$

lorsque $\frac{b}{c} = 2$. En appelant γ son coefficient numérique, ou en posant (article précédent),

$$(188) \qquad \gamma = \frac{\text{Max. de } q_x}{\theta c} = \frac{-q_{xy}}{\theta c} \text{ (pour } y = 0,\ z = c),$$

la première expression (158) de q_{xy}, qui contient une série plus convergente que la formule (142) déduite de la deuxième, donne

$$\gamma = 2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2 \left(e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}} + e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}}\right)}.$$

Les valeurs de γ, calculées par cette formule, varient de 1,35 à 2. On les trouve à la table de la fin du Mémoire, pour les diverses grandeurs de $\frac{b}{c}$, qu'il faut prendre dans la colonne de cette table intitulée

$$\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} \text{ ou } \frac{b}{c},$$

car elle est applicable aussi au cas où le coefficient d'élasticité de glissement n'a pas la même grandeur dans les sens y et z.

Si, de l'équation de non-rupture qui en résulte,

$$T = \text{ou} > G\gamma\theta c,$$

nous éliminons $G\theta c$ au moyen de l'expression (182) trouvée art. 85,

$$M_x = \mu G \theta b c^3,$$

nous avons pour la limite à imposer au moment M_x des forces produisant la torsion pour ne pas compromettre la cohésion,

$$(189) \qquad \lim M_x = \frac{\mu}{\gamma} b c^2 T.$$

Le rapport $\frac{\mu}{\gamma}$ varie entre 1,665 et 2,667. Ses valeurs se trouvent à la même table de la fin du Mémoire. On peut observer que l'expression précédente peut s'écrire

$$\lim M_x = \frac{3}{8}\frac{\mu}{\gamma}\cdot\frac{2I}{c} T,$$

et est la même que pour un prisme elliptique (art. 63, expr. 127), mais avec un coefficient $\frac{3\mu}{8\gamma}$ qui varie entre 0,6245 et 1 [1].

[1] Navier a tiré de l'analyse de M. Cauchy l'expression suivante de la limite à imposer au moment de torsion (*Résumé des leçons sur l'application de la mécanique*, art. 167, 2e édition, p. 108) :

$$\lim M_z = \frac{8}{3}\frac{b^2c^2T}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

en considérant que, d'après cette analyse (art. 68 et note de l'art. 74 ci-dessus), l'on a $\frac{d^2u}{dydz} = -\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\theta$, d'où $g_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z = \frac{-2b^2\theta z}{b^2+c^2}$, $g_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y = \frac{2c^2\theta y}{b^2+c^2}$, et, par suite, pour la plus grande valeur de $G\sqrt{g^2_{xy}+g^2_{xy}}$,

$$G g_x = G\frac{2\theta bc}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

ce qui donne bien pour $M_z = \frac{16}{3} G \frac{b^3c^3}{b^2+c^2}\theta$ (art. 68) la valeur de lim M_z ci-dessus quand on élimine $G\theta$ en égalant, à T, celle de $G g_x$ que l'on vient d'écrire.

Mais cette valeur de lim M_z suppose que la section se gauchit en paraboloïde hyperbolique et que, par suite, le plus grand glissement g_x a lieu pour $y = \pm b$, $z = \pm c$ ou aux quatre angles, c'est-à-dire précisément là où, en réalité, le glissement est nul (art. 68, 88). Aussi il faut, pour en déduire la vraie valeur (189) de lim M_z, la multiplier par un coefficient numérique variable qui est 0,8832 quand $\frac{b}{c} = 1$, mais qui descend à 0,8328 quand $\frac{b}{c} = 1{,}5$ et à 0,8247 quand $\frac{b}{c} = 2$ pour remonter à 0,8710 quand $\frac{b}{c} = 4$; à 0,9416 quand $\frac{b}{c} = 10$ et qui ne devient égal à 1 que pour $\frac{b}{c}$ infini. Il est donc préférable de se servir de celle lim $M_z = \frac{\mu}{\gamma} bc^2 T$ où le coefficient n'est pas plus variable et qui montre la vraie situation du point dangereux.

Si l'on veut avoir, pour déterminer au moins à peu près la limite du moment de torsion M_z, une formule simple qui dispense de l'emploi d'une table, il faut représenter empiriquement le rapport $\frac{\mu}{\gamma}$ qui entre comme coefficient dans la formule (189). L'on a, exactement aux limites $\frac{b}{c} = 1$ et $\frac{b}{c} = \infty$, et à moins de $\frac{1}{25}$ près pour les autres valeurs de $\frac{b}{c}$

$$\frac{3}{8}\frac{\mu}{\gamma} = \frac{1}{1 + 0{,}6\frac{c}{b}},$$

CHAPITRE IX.

TORSION DE PRISMES AYANT D'AUTRES BASES QUE L'ELLIPSE OU LE RECTANGLE.

90. *Formes correspondantes, en nombre infini, de l'équation du contour de la section et de l'expression du déplacement longitudinal* u. — Il existe une infinité de formes du contour des sections des prismes, autres que le rectangle ou l'ellipse, pour lesquelles on peut résoudre complétement et exactement les problèmes relatifs à leur torsion par des forces ayant un moment total donné, appliquées et distribuées convenablement sur les bases extrêmes, et, par suite (art. 2, 33, 41, 58, 73), approximativement les mêmes problèmes lorsque les forces sont appliquées par couples vers les extrémités d'une manière à peu près quelconque.

Et il paraît même possible, avec des tâtonnements suffisants, de rapprocher ces contours, autant qu'on veut, de ceux de sections d'une forme donnée; ce qui permettrait de déterminer s'il le fallait, avec l'approximation désirable, la résistance à la torsion de prismes à bases quelconques.

Rappelons en effet (en commençant toujours par le cas d'égale

ce qui donne d'une manière suffisamment approchée pour la pratique

$$\lim M_x = \frac{40\,b^2c^2}{15\,b+9\,c}\,T,$$

b étant toujours le plus grand des deux demi-côtés de la section rectangle.

A égale superficie ω de la section, ou pour même volume de matière, un prisme résiste d'autant moins à la rupture par torsion que le rapport de sa plus grande à sa plus petite dimension est plus considérable, car (189) et $\omega = 4\,b\,c$ donnent $\frac{\lim M_x}{T} = \frac{1}{8}\frac{\mu}{\gamma}\omega^{3/2}\sqrt{\frac{c}{b}}$; ou, à peu près, d'après l'expression empirique précédente de $\frac{3}{8}\frac{\mu}{\gamma}$

$$\lim M_x = \frac{\omega^{3/2}}{3}\,\frac{5}{3\sqrt{\frac{c}{b}}+5\sqrt{\frac{b}{c}}}.$$

élasticité de glissement $\frac{p_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{p_{xz}}{\gamma_{xz}} = G$) l'équation différentielle indéfinie (109, art. 51),

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0 \tag{190}$$

à satisfaire en tous les points du prisme, et l'équation définie (110, même art. 51), $\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) dy - \left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) dz = 0$ ou

$$\theta (y dy + z dz) + \frac{du}{dz} dy - \frac{du}{dy} dz = 0 \tag{191}$$

à satisfaire au contour des sections.

Prenons à volonté l'une quelconque des intégrales, en nombre infini, d'une forme soit transcendante (art. 64, 65), soit algébrique (art. 66, 67), qui satisfont à l'équation indéfinie (190). Soit

$$u = f(y, z)$$

cette intégrale.

Si on la substitue pour u dans l'équation définie (191) qu'on vient d'écrire, l'on a, en y et z, une équation différentielle du premier ordre, qui n'appartient qu'aux points du contour, et qui, intégrée, donnera précisément l'équation de ce contour de la base du prisme dont tous les points éprouveront les déplacements longitudinaux $u = f(y, z)$ lorsqu'on le tordra d'un angle θ par unité de longueur.

Or, l'intégration de l'équation définie (191), qui est du premier ordre, est toujours immédiatement possible sans facteur, car le premier terme est la différentielle de $\theta \frac{y^2 + z^2}{2}$, et, en écrivant $P\,dy + Q\,dz$ l'ensemble $\frac{du}{dz} dy - \frac{du}{dy} dx$ des deux derniers, l'on a évidemment la condition connue d'intégrabilité $\frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dz}$ si u est tel que $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$.

Et l'intégrale, ou l'*équation générale de la courbe-contour* de la section est

$$(192)\quad \theta^{\frac{y^2+z^2}{2}} + \int dy \frac{du}{dz} - \int dz \left(\frac{du}{dy} + \int dy \frac{d^2u}{dz^2}\right) = \text{constante},$$

dans laquelle la parenthèse se réduit d'elle-même à une fonction de z seul, car sa différentielle, par rapport à y, est nulle si u est une fonction de y, z telle que $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$.

L'intégration se fera le plus souvent immédiatement à l'aspect de l'équation différentielle (191) particularisée, sans recourir à cette forme générale (192) de l'intégrale.

91. *Formes transcendantes. — Formes algébriques.* — Par exemple :

1° A la valeur de u la plus générale de forme transcendante (129, art. 64),

$$(193)\quad \begin{cases} u = \Sigma\, e^{my} (A'_m \cos mz + A_m \sin mz); \\ \text{ou } u = \Sigma\, e^{mz} (B'_m \cos my + B_m \sin my) \end{cases}$$

répond l'équation du contour

$$(194)\quad \begin{cases} \theta^{\frac{y^2+z^2}{2}} + \Sigma\, e^{my} (-A'_m \sin mz + A_m \cos mz) = \text{constante}, \\ \text{ou } \theta^{\frac{y^2+z^2}{2}} + \Sigma\, e^{mz} (\ B'_m \sin my - B_m \cos my) = \text{constante}. \end{cases}$$

Si la section doit être symétrique par rapport à l'axe des z, il n'y a qu'à faire (art. 65)

$$A'_m = 0;$$

et si elle l'est par rapport à chacun des deux axes des y et des z, à la valeur de u qui est alors (132, art. 65),

$$(195)\qquad u = \Sigma\, A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz,$$

répond l'équation du contour

$$(196)\quad \theta^{\frac{y^2+z^2}{2}} + \Sigma\, A_m (e^{my} + e^{-my}) \cos mz = \text{constante}.$$

2° Si le déplacement u est exprimé en fonction entière et rationnelle de y et z, ou si l'on a (art. 66, expression 134)

$$(197)\left\{\begin{array}{l} u = a_0 + a_1 y + a'_1 z + a_2 (y^2 - z^2) + a'_2 . 2 y z + a_3 (y^3 - 3 y z^2) \\ \quad + a'_3 (3 y^2 z - z^3) + a_4 (y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) + a'_4 (4 y^3 z - 4 y z^3) + \ldots \end{array}\right.$$

l'équation de la courbe-contour est

$$(198)\left\{\begin{array}{l} \theta \frac{y^2 + z^2}{2} - a_1 z + a'_1 y - a_2 . 2 y z + a'_2 (y^2 - z^2) - a_3 (3 y^2 z - z^3) \\ \quad + a'_3 (y^3 - 3 y z^2) - a_4 (4 y^3 z - 4 y z^3) \\ \quad + a'_4 (y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) - \ldots = \text{constante}. \end{array}\right.$$

3° Si plus généralement l'on a, φ et ψ étant deux fonctions arbitraires,

$$u = \varphi (y + z\sqrt{-1}) + \psi (y - z\sqrt{-1}),$$

l'équation de la courbe-contour est

$$\theta \frac{y^2 + z^2}{2} + \sqrt{-1} . \varphi (y + z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1} . \psi (y - z\sqrt{-1}) = \text{constante}.$$

4° Si le déplacement u est exprimé en coordonnées polaires par cette formule générale (136 de l'article 66) :

$$\left\{\begin{array}{l} u = \Sigma (a_n r^n \cos n\alpha + a_{n'} r^{n'} \sin n' \alpha) \\ \text{où } r\cos\alpha = y, r\sin\alpha = z, r^2 = y^2 + z^2, \alpha = \operatorname{arctang} \frac{z}{y}, \end{array}\right.$$

on pourrait facilement, en substituant cette valeur de u dans (192) obtenir l'équation générale du contour qui y répond. Mais il est plus simple de prendre l'équation définie (191)

$$\theta (y dy + z dz) + \frac{du}{dz} dy - \frac{du}{dy} dz = 0,$$

et d'exprimer tout en coordonnées polaires en y faisant

$$y\,dy + z\,dz = r\,dr,\ dy = dr\cos\alpha - r\sin\alpha\,d\alpha,\ dz = dr\sin\alpha + r\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} = \frac{du}{dr}\cos\alpha - \frac{du}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{r},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dz} + \frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dz} = \frac{du}{dr}\sin\alpha + \frac{du}{d\alpha}\frac{\cos\alpha}{r};$$

ce qui la change, toutes réductions faites, en

$$\theta\, r\,dr - r\,d\alpha\,\frac{du}{dr} + dr\,\frac{du}{r\,d\alpha} = 0, \tag{199}$$

ou, en mettant pour $\frac{du}{dr}$, $\frac{du}{d\alpha}$ leurs valeurs tirées de $u = \Sigma(\ \ )$,

$$\theta\, r\,dr - \Sigma\left[a_n\, d\left(r^n \sin n\alpha\right) - a_{n'}\, d\left(r^{n'}\cos n'\alpha\right)\right] = 0.$$

L'équation s'intègre d'elle-même; et l'on a, pour les courbes-contour des bases des prismes dont la torsion produit des déplacements longitudinaux u représentés par :

$$\left\{\begin{array}{l} u = a_0 + a_1\, r\cos\alpha + a'_1\, r\sin\alpha + a_2\, r^2\cos 2\alpha + a'_2\, r^2\sin 2\alpha \\ \quad + a_3\, r^3\cos 3\alpha + a'_3\, r^3\sin 3\alpha + \ldots \\ \text{ou plus généralement } u = \Sigma\left(a_n\, r^n\cos n\alpha + a_{n'}\, r^{n'}\sin n'\alpha\right), \end{array}\right. \tag{200}$$

l'équation polaire

$$\left\{\begin{array}{l} \theta\,\frac{r^2}{2} - a_1\, r\sin\alpha + a'_1\, r\cos\alpha - a_2\, r^2\sin 2\alpha + a'_2\, r^2\cos 2\alpha \\ \quad - a_3\, r^3\sin 3\alpha + a'_3\, r^3\cos 3\alpha - \ldots = \text{constante} \\ \text{ou, plus généralement,} \\ \theta\,\frac{r^2}{2} + \Sigma\left(-a_n\, r^n\sin n\alpha + a_{n'}\, r^{n'}\cos n'\alpha\right) = \text{constante}. \end{array}\right. \tag{201}$$

Les équations développées, telles que les équations algébriques (197) et (198), ne sont que des cas particuliers de celles exprimées par des Σ. On les obtient en supposant n, n' entiers et positifs, puis en mettant pour les sinus et cosinus multiples leurs valeurs en $\cos\alpha = \frac{y}{r}$, $\sin\alpha = \frac{z}{r}$.

En choisissant les courbes *fermées* qui peuvent être représentées par les équations comprises dans la forme générale (194) ou par celle (198, 201), on a les bases d'une infinité de prismes pour lesquels on peut résoudre complétement le problème de la torsion, puisque l'expression du déplacement longitudinal u (193) ou (197, 200) permet d'avoir les glissements q, le moment de torsion M_x, etc. comme aux deux chapitres précédents relatifs aux prismes elliptiques et aux prismes rectangles.

92. *Courbes algébriques symétriques. — Courbes égales dans les deux sens.* — Les courbes représentées par l'équation générale transcendante (194) ou (196) dans laquelle les exponentielles et les sinus de coordonnées ordinaires se trouvent mêlés, sont fort difficiles à tracer par points. Aussi nous avons dirigé nos recherches sur les courbes algébriques représentées par (201) en coordonnées polaires ou (198) en coordonnées ordinaires.

Pour avoir des courbes symétriques par rapport aux deux axes des y et des z, il faut (art. 67) faire $a_n = 0$ et réduire les n' aux nombres entiers et pairs, en sorte qu'on a, n étant un nombre entier *positif* ou *négatif*,

$$(202)\quad \begin{cases} u = \Sigma\, a'_{2n}\, r^{2n} \sin 2n\alpha, \\ \theta \dfrac{r^2}{2} + \Sigma\, a'_{2n}\, r^{2n} \cos 2n\alpha = \text{constante}, \end{cases}$$

ou, si l'on se borne aux exposants entiers et positifs de r:

$$(203)\quad \begin{cases} u = a'_2 r^2 \sin 2\alpha + a'_4 r^4 \sin 4\alpha + \ldots = \\ \quad = a'_2 . 2yz + a'_4 (4y^3 z - 4yz^3) + \ldots; \\ \theta \dfrac{r^2}{2} + a'_2 r^2 \cos 2\alpha + a'_4 r^4 \cos 4\alpha + \ldots = \\ \quad = \theta \dfrac{y^2+z^2}{2} + a'_2 (y^2 - z^2) + a'_4 (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + \ldots = \text{constante}. \end{cases}$$

Si, de plus, la section doit être *égale dans les deux sens* y et z, $2n$ doit être (art. 67) un multiple de 4.

Bornons d'abord notre examen à ces courbes symétriques et égales dans les deux sens.

En prenant pour unité de longueur leurs demi-diamètres sur les axes des y et des z, la constante doit être telle que, pour $z = 0$, l'on ait $y = 1$, et, pour $y = 0$, $z = 1$, ou que pour $\alpha = 0$ ou $\frac{1}{2}\pi$ on ait $r = 1$. Nous poserons donc pour leur équation générale en coordonnées polaires, a et a désignant d'autres coefficients que ceux a_1, a'_1... ci-dessus,

$$(204)\quad \left\{\begin{array}{l} r^2 - (ar^4 + \mathrm{a}\, r^{-4})\cos 4\alpha + (a' r^8 + \mathrm{a}' r^{-8})\cos 8\alpha \\ \quad - (a'' r^{12} + \mathrm{a}'' r^{-12})\cos 12\alpha + \ldots = \\ \quad = 1 - a - \mathrm{a} + a' + \mathrm{a}' - a'' - \mathrm{a}'' + \ldots \end{array}\right.$$

donnant lieu à cette valeur du déplacement, *qui serait la même quelle que fût la constante du second membre* de (204), ou si $\alpha = 0$ ne donnait pas $r = 1$,

$$(205)\quad \left\{\begin{array}{l} u = \frac{\theta}{2}\big[- (ar^4 - \mathrm{a}\, r^{-4})\sin 4\alpha + (a' r^8 - \mathrm{a}' r^{-8})\sin 8\alpha \\ \qquad - (a'' r^{12} - \mathrm{a}'' r^{-12})\sin 12\alpha + \ldots\big]. \end{array}\right.$$

L'équation en coordonnées ordinaires, en se bornant aux exposants positifs de r, sera

$$\left\{\begin{array}{l} (206) \\ y^2 + z^2 - a(y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) + a'(y^8 - 28y^6 z^2 + 70 y^4 z^4 - 28 y^2 z^6 + z^8) \\ - a''(y^{12} - 66 y^{10} z^2 + 495 y^8 z^4 - 924 y^6 z^6 + 495 y^4 z^8 - 66 y^2 z^{10} + z^{12}) + \text{etc.} \\ \qquad = 1 - a + a' - a'' + \text{etc.} \end{array}\right.$$

donnant lieu à cette valeur du déplacement

$$\left\{\begin{array}{l} (207) \\ u = \frac{\theta}{2}\big[- a(4y^3 z - 4yz^3) + a'(8y^7 z - 56 y^5 z^3 + 56 y^3 z^5 - 8 y z^7) \\ \quad - a''(12 y^{11} z - 220 y^9 z^3 + 792 y^7 z^5 - 792 y^5 z^7 + 220 y^3 z^9 - 12 y z^{11}) + \text{etc.}\big] \end{array}\right.$$

93. *Moyens de donner toujours ces formes à leurs équations, et de les rendre homogènes.* — Si, au lieu des seconds membres $1 - a - a + a' + a' - \ldots$ qui sont tels que l'on ait $r = 1$ pour $\alpha = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$, l'équation (204) avait pour second membre une constante numérique quelconque

$$K,$$

l'on n'aurait qu'à faire :

$$K = r_0^2 - (a r_0^4 + a r_0^{-4}) + (a' r_0^8 + a' r_0^{-8}) - \text{etc.},$$

ou qu'à représenter par r_0 la valeur de r que l'on tire de la même équation en y faisant

$$\alpha = 0,$$

et qu'à diviser cette équation (204), par r_0^2 en prenant au lieu de r une nouvelle variable

$$r' = \frac{r}{r_0},$$

pour pouvoir l'écrire ainsi :

$$(208)\quad \left\{ \begin{array}{l} r'^2 - [(a r_0^2) r'^4 + (a r_0^{-6}) r'^{-4}] \cos 4\alpha \\ \quad + [(a' r_0^6) r^8 + (a' r_0^{-10}) r^{-8}] \cos 8\alpha - \ldots\ldots \\ \quad = 1 - a r_0^2 - a r_0^{-6} + a' r_0^6 + a' r_0^{-10} - \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Elle est, de cette manière, ramenée à la forme (204), ou telle que l'on a le demi-diamètre $r' = 1$ pour $\alpha = 0$ ou $\frac{1}{2}\pi$.

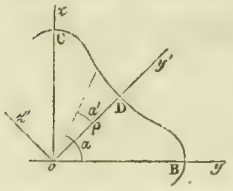
Il suffit de discuter les courbes représentées par cette équation (204) avec des valeurs négatives des coefficients

$$-a, -a'', -a, -a''\ldots\ldots$$

affectant les termes en $\cos 4\alpha$, $\cos 12\alpha$,... pour embrasser les cas où ces coefficients seraient des nombres positifs.

En effet, si au lieu de (204) l'on avait l'équation suivante, où les coefficients effectant les mêmes termes sont positifs,

$$r^2+(ar^4+\mathrm{a}r^{-4})\cos 4\alpha+(a'r^8+\mathrm{a}'r^{-8})\cos 8\alpha$$
$$+(a''r^{12}+\mathrm{a}''r^{-12})\cos 12\alpha+\ldots=1+a+\mathrm{a}+a'+\mathrm{a}'+a''+\mathrm{a}''+\ldots$$



l'on n'aurait qu'à prendre de nouveaux axes oy', oz' à 45 degrés sur les anciens oy, oz, ou qu'à faire

$$\alpha=\frac{\pi}{4}+\alpha',$$

pour changer l'équation en cette autre

$$r^2-(ar^4+\mathrm{a}r^{-4})\cos 4\alpha'-\ldots=1+a+\mathrm{a}+\ldots,$$

où les coefficients en question sont négatifs. Le second membre n'est pas tel qu'on ait $r=1$ pour $\alpha'=0$; mais en changeant la variable r en une autre $r'=\frac{r}{r_0}$ comme tout à l'heure on la ramènera complétement à la forme (204).

Enfin, l'on peut toujours rendre homogènes les équations et expressions (204) à (207), en sorte que les courbes-contour aient dans les sens y et z des demi-diamètres qui ne soient pas l'unité, mais une même grandeur linéaire quelconque

$$r_0,$$

en écrivant dans toutes ces équations

$$\frac{r}{r_0}\text{ au lieu de }r,$$

et en multipliant le second membre de celles donnant u par

$$r_0^2,$$

car u est linéaire ou du degré 1, et θ, quotient d'un angle par une ligne, est du degré -1. On a ainsi, au lieu de (204), (205),

$$(209)\quad\begin{cases}\dfrac{r^2}{r_0^2}-\left(a\dfrac{r^4}{r_0^4}+\mathrm{a}\dfrac{r^{-4}}{r_0^{-4}}\right)\cos 4\alpha+\left(a'\dfrac{r^8}{r_0^8}+\mathrm{a}'\dfrac{r^{-8}}{r_0^{-8}}\right)\cos 8\alpha+\ldots\\ \quad=1-a-\mathrm{a}+a'+\mathrm{a}'-\ldots\end{cases}$$

$$(210)\quad u=\frac{\theta r_0^2}{2}\left[-\left(a\frac{r^4}{r_0^4}-\mathrm{a}\frac{r^{-4}}{r_0^{-4}}\right)\sin 4\alpha+\left(a'\frac{r^8}{r_0^8}-\mathrm{a}'\frac{r^{-8}}{r_0^{-8}}\right)\sin 8\alpha-\ldots\right]$$

94. *Courbes fermées du quatrième degré symétriques et égales.* — Voyons quelles courbes fermées peut représenter l'équation (206) réduite à

$$(211)\quad \begin{cases} y^2+z^2-a\,(y^4-6\,y^2\,z^2+z^4)=1-a \\ \text{ou } r^2-ar^4\cos 4\alpha=1-a\,, \end{cases}$$

où nous n'aurons besoin de donner, comme nous venons de dire, que des valeurs positives à a pour embrasser tous les cas.

Représentons en général par ρ la *demi-médiane* ou le rayon vecteur à 45 degré, ou faisons

$$(212)\qquad r=\rho \text{ pour } \alpha=\pm\frac{\pi}{4} \text{ ou pour } y^2=z^2,$$

nous aurons :

$$(213)\quad \rho^2+a\rho^4=1-a, \text{ d'où } \rho=\sqrt{-\frac{1}{2a}+\sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{1-a}{a}}}.$$

Pour que la courbe soit fermée, il faut que ρ ait une valeur réelle, ou que

$$a<1.$$

Mais il suffit même de ne donner à a que des valeurs moindres que $1/2$, pour avoir toutes les courbes fermées qu'on désire.

En effet, lorsqu'on fait $\alpha=0$ ou $\frac{\pi}{2}$, l'équation polaire (211), devenue $r^2-ar^4=1-a$, peut s'écrire

$$(r^2-1)\,[1-a\,(r^2+1)]=0\,,$$

en sorte que la courbe coupe les axes des y et des z, non-seulement aux points $r=1$, mais encore à ceux

$$r=\sqrt{\frac{1}{a}-1}.$$

Si ces points sont plus rapprochés du centre que les premiers, ou si

$$\frac{1}{a}-1<1, \text{ ou si } a>\frac{1}{2},$$

le vrai *rayon* de la courbe n'est pas 1 comme nous le désirons, mais $\sqrt{\frac{1}{a} - 1}$. Et il faut (article précédent), pour ramener ce rayon à l'unité, prendre une nouvelle variable $r' = \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{a} - 1}}$, ce qui, en faisant en outre $a = 1 - a'$, change l'équation (211) $r^2 - ar^4 \cos 4\alpha = 1 - a$ en

$$r'^2 - a' r'^4 \cos 4\alpha = 1 - a'$$

de même forme qu'elle, mais où $a' < \frac{1}{4}$.

Nous aurons, comme l'on voit, toutes les courbes fermées du quatrième degré, symétriques et égales, pour lesquelles le déplacement u a une expression entière en y, z, en ne donnant à a dans l'équation (211) que des valeurs comprises entre

$$0 \quad \text{et} \quad 1/2.$$

95. *Détermination de ces courbes.* — Or, cette équation (211) donne

$$(214) \qquad z = \pm\sqrt{\frac{1}{2a} + 3y^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2a} - 1\right)^2 + \frac{4}{a}y^2 + 8y^4}}.$$

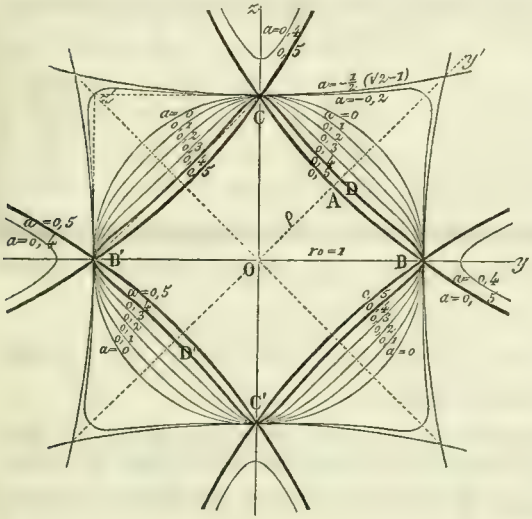
1° Pour $a = 0$ la courbe (211) n'est autre chose qu'un cercle d'un rayon $= 1$;

2° Pour $a = 0{,}4$, l'expression (214) qu'on vient d'écrire donne cette suite de coordonnées :

	AVEC le signe inférieur du ± sous le radical.	AVEC le signe supérieur.		AVEC le signe inférieur.
Pour $y = 0$	$z = 1{,}0$	$z = 1{,}225$	Pour $y = 0{,}6$	$z = 0{,}4027$
0,025	0,9948	1,230	0,7	0,3105
0,05	0,9806	1,246	0,8	0,2219
0,075	0,9602	1,270	0,9	0,1336
0,1	0,9364	1,297	0,925	0,11045
0,2	0,8250	1,435	0,95	0,08585
0,3	0,7116	1,592	0,975	0,05745
0,4	0,6030	valeurs étrangères	1,0	0,0000
0,5	0,500	à la courbe fermée.		

ce qui permet de construire la courbe avec d'autant plus de facilité par points que toutes ces valeurs sont réciproques, ou que pour des valeurs de y égales aux nombres trouvés pour z, celles de z sont les valeurs prises pour y.

La médiane à 45 degrés $2\rho = DOD' = 2\sqrt{(0,5)^2 + (0,5)^2}$ est avec la diagonale ou le grand diamètre $BOB' = 2$ dans le même rapport $\frac{1}{2}\sqrt{2} : 1$ que pour le carré. Mais les angles sont arrondis et les quatre côtés sont légèrement concaves.



Les valeurs répondant au signe supérieur du $\pm$ sous le radical donnent quatre branches indéfinies, séparées de la courbe fermée qui seule intéresse notre objet.

2° Pour des valeurs de a entre 0 et 0,40, l'on a une suite de courbes intermédiaires entre le carré et le cercle circonscrit. On peut, sans calculer leurs coordonnées, se faire une idée de leur forme en déterminant la valeur de leur demi-médiane ρ ou du rayon vecteur pour $\alpha = 45$ degrés. L'expression (213) donne

pour $a = 0$; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5

$\rho = 1$; 0,9124; 0,8376; 0,7710; 0,70711 =; 0,64359451 =

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $= \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Il est facile de voir qu'à partir de $a = 0,2643$ les côtés offrent

extérieurement une concavité à leur milieu; car, pour $y = z$, on a $\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{2}{y}\frac{12ay^2-1}{4ay^2+1}$ en sorte que, comme alors $y^2 = \frac{-1+\sqrt{1+4a-4a^2}}{4a}$, il en résulte $\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{2}{y}\cdot\frac{-4+3\sqrt{1+4a-4a^2}}{\sqrt{1+4a-4a^2}}$, expression qui passe du négatif au positif quand a devient $> \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{2} = 0{,}2643$.

3° Quand a atteint sa plus grande valeur . . . . . $a = 0{,}5$ qui est aussi celle pour laquelle la médiane 2ρ est la plus petite, l'expression (214) de z donne

	SIGNE INFÉRIEUR.	SIGNE SUPÉRIEUR.		SIGNE INFÉRIEUR.
Pour $y = 0$,	$z = 1{,}000$	$z = 1{,}0000$	Pour $y = 0{,}5$	$z = 0{,}4109$
0,1	0,8636	1,146	0,6	0,3177
0,2	0,7370	1,303	0,7	0,2307
0,3	0,6198	1,468	0,8	0,1493
0,4	0,5113	1,643	0,9	0,0726
0,45509	0,45509	valeurs étrangères au contour fermé.	1,0	0,0000

Le contour est un carré à quatre angles aigus et côtés concaves dont la flèche est le $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}} = 0{,}04490$ ou environ 1/22 de la corde [1].

Pour $a = 1$ le contour fermé se réduirait à un point; et, pour $a > 1$, il n'existerait plus. Pour a négatif on obtient les mêmes courbes, mais tournées de 45 degrés autour du centre, et amplifiées de sorte qu'on ait le rayon vecteur à 45 degrés $\rho > 1$, le rayon pour $\alpha = 0$ étant toujours $r_0 = 1$, comme on le voit à la figure pour deux de ces courbes, savoir :

1° Pour le carré à angles arrondis, représenté tout à l'heure par $r^2 - 0{,}4\, r^4 \cos 4\alpha = 0{,}6$, et maintenant par

$$r^2 + 0{,}2\, r^4 \cos 4\alpha = 1{,}2\,;\ (a = -0{,}2,\ \rho = \sqrt{2});$$

[1] L'équation (211) peut alors s'écrire $(y^2 + 2yz\sqrt{2} + z^2 - 1)(y^2 - 2yz\sqrt{2} + z^2 - 1) = 0$ et représente deux hyperboles qui se coupent aux quatre points B, C, B′, C′ (mars 1855).

2° Pour le carré à angles aigus représenté maintenant par

$$r^2+\frac{\sqrt{2}-1}{2}r^4\cos 4\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{2};\left(a=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1);\rho=\sqrt{\sqrt{2}+1}=1,5538\right).$$

96. *Courbes du huitième degré symétriques et égales dans les deux sens.* — Nous tirerons, à l'article 101, des conclusions utiles de la considération des deux courbes à côtés concaves que vient de nous fournir l'équation du quatrième degré, et l'on pourrait en tirer d'autres de celle des courbes à côtés convexes, si l'on se trouvait avoir à calculer la torsion de *prismes dont les bases aient des formes intermédiaires entre le cercle et le carré.*

Mais comme le but principal de nos recherches sur des prismes de forme variée était de déterminer les lois de la torsion de ces pièces à ailes ou à côtes saillantes, offrant une section en forme d'étoile à quatre pointes, que l'on emploie beaucoup dans les constructions en fonte, nous avons essayé si l'équation (206) portée au huitième degré

$$(215)\quad\begin{cases} y^2+z^2-a\,(y^4-6\,y^2z^2+z^4)+ \\ \quad +a'\,(y^8-28\,y^6z^2+70\,y^4z^4-28\,y^2z^6+z^8)=1-a+a' \\ \text{ou } r^2-ar^4\cos 4\alpha+ar^8\cos 8\alpha=1-a+a' \end{cases}$$

ne donnerait pas des courbes fermées dont les plus grands rayons fussent plus saillants, ou les demi-médianes $\rho=\left(r \text{ pour } \alpha=\frac{\pi}{4}\right)$ plus petites que dans les courbes du quatrième degré.

Nous l'avons soumise, pour cela, à une discussion détaillée que nous allons rapporter.

Cette équation n'est pas résoluble algébriquement par rapport à z ou y, mais, en la prenant sous sa seconde forme, on peut mettre

$$2\cos^2 4\alpha-1 \quad \text{à la place de} \quad \cos 8\alpha$$

et la résoudre par rapport à $r^4\cos 4\alpha$. On aura ainsi l'angle polaire en fonction du rayon vecteur, ce qui suffit pour tracer la courbe

par points. Mais on peut, et cela est plus commode, ayant $r^4 \cos 4\alpha$, en tirer les coordonnées y et z, car on a

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1.$$

D'où, comme $r\cos\alpha = y$:

$$r^4 \cos 4\alpha = 8y^4 - 8r^2y^2 + r^4,$$

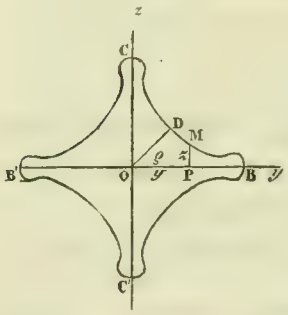
dont on peut tirer la valeur de y^2, et, par suite, celle de $z^2 = r^2 - y^2$. On a ainsi, pour les valeurs de y et z répondant à chaque valeur de r qu'on se donne

$$(216) \qquad \left.\begin{matrix} y^2 \\ \text{et } z^2 \end{matrix}\right\} = \frac{r^2}{2} \pm \sqrt{\frac{r^4}{8} + \frac{r^4\cos 4\alpha}{8}}.$$

$$(217) \quad \text{Et } r^4\cos 4\alpha = \frac{a}{4a'} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{4a'} - 1\right)^2 + \frac{1-r^2}{2a'} - \frac{1-r^2}{2}}.$$

Ce ce qui permet de calculer autant de systèmes que l'on veut de ces valeurs de y et z en se donnant r arbitrairement.

On peut toujours choisir l'un des deux paramètres a, a' de manière que le rayon vecteur $OD = \rho$ à 45 degrés ait une grandeur déterminée; car, de l'équation qui résulte de la proposée (215) pour $r = \rho$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$



$$\rho^2 + a\rho^4 + a'\rho^8 = 1 - a + a',$$

l'on tire

$$(218) \qquad a = a'(1 - \rho^4) + \frac{1-\rho^2}{1+\rho^4},$$

en sorte qu'en se donnant a' l'on obtient a.

Par exemple :

$$(219) \qquad \text{Pour } \rho = \frac{1}{2}, \text{ on a } a = \frac{15}{16}a' + \frac{12}{17}.$$

97. *Conditions pour qu'elles soient fermées.* — Mais pour que les huit points $r = 1$ pour $\alpha = 0$, π ou $\pm \frac{\pi}{2}$

et $r = \rho$ pour $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ ou $\pm \frac{3\pi}{4}$

forment un contour continu et fermé, il faut :

1° Que la courbe ne coupe pas les axes des y et z en d'autres points plus rapprochés de l'origine que ceux répondant à $r = 1$, car ce seraient ces autres points qui appartiendraient à la partie fermée, dont les rayons OB, OD à zéro degré et à 45 degrés n'auraient plus entre eux le rapport qu'on veut;

2° Qu'aux points B et B′, C et C′, la même courbe tourne sa concavité respectivement vers les axes de z et des y; car si elle tournait sa convexité, ces points (pour le cas supposé où OD est moindre que OB) seraient les sommets de branches infinies.

La première de ces deux conditions sera remplie lorsque l'équation

$$(220) \qquad r^6 + r^4 - \frac{a - a'}{a} r^2 + \frac{1 - a + a'}{a'} = 0$$

que l'on obtient en faisant $\alpha = 0$ et divisant par $1 - r^2$, ne donnera pour r^2 que des racines ou plus grandes que 1 ou négatives.

La seconde condition (celle de la concavité) sera remplie si, pour $y = 0$, la valeur de $\frac{d^2z}{dy^2}$ tirée de la première équation (215) de la courbe est négative. Or, on trouve

$$(221) \qquad \frac{d^2z}{dy^2} (\text{pour } y = 0,\ z = 1) = -\frac{1 + 6a - 28a'}{1 - 2a + 4a'},$$

où en substituant à a sa valeur (218) en a' et ρ :

$$\frac{d^2z}{dy^2} (\text{pour } y = 0, z = 1) = -\frac{11 + 3\rho^4}{1 + \rho^4} \frac{\dfrac{(3 - \rho^2)^2 - 2}{2(11 + 3\rho^2)(1 + \rho^4)} - a'}{a' - \dfrac{2 - (1 + \rho^2)^2}{2(1 + \rho^4)^2}}.$$

Ce coefficient différentiel sera négatif comme on le désire, *lorsqu'on prendra pour a′ une valeur positive qui soit comprise entre les va-*

leurs de ces deux expressions dont la première est toujours positive (puisque $\rho < 1$)

$$(222) \qquad \frac{(3-\rho^2)^2-2}{2(11+3\rho^2)(1+\rho^4)} \text{ et } \frac{2-(1+\rho^2)^2}{2(1+\rho^2)^2},$$

si la seconde est positive aussi, *ou qui soit simplement au-dessous de la première,* si la seconde était négative; ce que nous ne supposerons pas, car alors on aurait $1+\rho^2 > \sqrt{2}$ ou $\rho > 0{,}643594511$ et l'on pourrait se contenter de l'équation du quatrième degré ou de l'article précédent.

Par exemple, supposons qu'on veuille que

$$\rho = 1/2;$$

les valeurs des deux expressions (222) sont :

$$\frac{8\times 89}{17\times 179} = 0{,}233979{,}62, \text{ et } \frac{7\times 8}{(17)^2} = 0{,}193771{,}63.$$

C'est entre ces deux limites que la valeur de a' devra être choisie.

Les deux limites (222) se confondent ou deviennent égales lorsque $1-4\rho^2-4\rho^4-\rho^8=0$, d'où

$$\rho = 0{,}45473.$$

Et comme la valeur commune des deux limites est alors 0,25, on ne peut prendre que

$$a' = 0{,}25, \quad a = 1.$$

Mais, alors, la *première condition* n'est point remplie, car l'équation (220) qui est $r^6+r^4-3r^2+1=0$ a une racine réelle $r = \sqrt{\sqrt{2}-1} = 0{,}64359$, et, par conséquent, moindre que 1.

On ne peut donc pas descendre jusqu'à 0,45473 pour le rapport ρ du plus petit au plus grand diamètre.

Un autre essai nous a montré qu'on ne pouvait même pas faire ce rapport ρ égal à $\frac{7}{15} = 0{,}46667$.

98. *Courbes du huitième degré pour lesquelles le plus petit diamètre est moitié du plus grand.* — Nous nous sommes donc borné à

$$\rho = 1/2.$$

On ne peut pas, alors, donner pour valeur à a' sa *limite inférieure ci-dessus* $\frac{7\times 8}{(17)^2} = 0,193771,63$, car la première condition de l'article précédent n'est toujours pas remplie et la courbe coupe les axes à une distance 0,7787.

On ne peut pas non plus le faire tout à fait égal à sa limite supérieure 0,23397962, ce qui donnerait $\frac{d^2z}{dy^2} = 0$ pour $y = 0$, $z = 1$, car alors il n'y a pas jonction complète entre les branches indéfinies de manière à produire une fermeture.

Nous avons donc fait successivement

$$a = 0,23, \text{ d'où (équation 219) } a = 0,9215073,$$

et

$$a' = \frac{12}{49}\frac{16}{17} = 0,2304922, \text{ d'où } a = 4a' = \frac{48}{49}\frac{16}{17} = 0,9219688.$$

La seconde de ces deux valeurs de a' est celle pour laquelle on a, aux quatre sommets de la courbe

$$\frac{d^2r}{d\alpha^2} = 0,$$

car, en général

$$\frac{d^2r}{d\alpha^2}\left(\text{pour } \alpha = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{2}, r = 1\right) = -8\,\frac{a-4a'}{1-2a+4a'},$$

en sorte que, avec cette valeur de a', la courbe a pour centre de courbure son centre de figure à ces quatre points $r = 1$ où elle rencontre les deux axes.

Voici la suite des systèmes de valeurs de y et de z qu'on a obtenus :

VALEURS PRISES pour le rayon vecteur r.	COURBE $a' = 0{,}23$; $a = 0{,}9215073$				COURBE $a' = \frac{12}{49}\frac{16}{17} = 0{,}2304922$; $a = 4a' = 0{,}9219688$			
	y		z		y		z	
	Signe supérieur du $\pm$ de la valeur (217) de $r^4 \cos 4\alpha$.	Signe inférieur.	Signe supérieur.	Signe inférieur.	Signe supérieur.	Signe inférieur.	Signe supérieur.	Signe inférieur.
$r = 1{,}10$	1,191	1,118	0,1456	0,4365	1,191	1,118	0,1471	0,4361
1,10	1,094	1,058	0,1105	0,2985	1,094	1,0583	0,1134	0,2997
1,08	1,075	1,047	0,1072	0,2640	.....	.....	.....	.....
1,06	1,055	1,036	0,1025	0,2232	1,055	1,0360	0,1021	0,22435
$\sqrt{1{,}06} = 1{,}02956$	.....	.....	.....	.....	1,024	1,0204	0,1040	0,13707
Partie fermée 1,02	Imaginaire.		Imaginaire.		Imaginaire.		Imaginaire.	
1,00	Imaginᵉ	1,0000	Imaginᵉ	0,0000	Imaginᵉ	1,0000	Imaginᵉ	0,00000
0,996	*Idem.*	0,9967	*Idem.*	0,0529	*Idem.*	0,9945	*Idem.*	0,05413
0,99	*Idem.*	0,98827	*Idem.*	0,05848	*Idem.*	0,9882	*Idem.*	0,05983
0,98	*Idem.*	0,97815	*Idem.*	0,06020	*Idem.*	0,9781	*Idem.*	0,06124
0,97	*Idem.*	0,96820	*Idem.*	0,05916	*Idem.*	.....	*Idem.*	.....
0,96	*Idem.*	0,95864	*Idem.*	0,05070	*Idem.*	0,9582	*Idem.*	0,05814
0,92	*Idem.*	0,91876	*Idem.*	0,04785	*Idem.*	0,9187	*Idem.*	0,04879
0,85	*Idem.*	0,84912	*Idem.*	0,03860	*Idem.*	0,8490	*Idem.*	0,04183
0,75	*Idem.*	0,74661	*Idem.*	0,07120	*Idem.*	0,7469	*Idem.*	0,06760
0,70	*Idem.*	.....	*Idem.*	.....	*Idem.*	0,6931	*Idem.*	0,09818
0,60	*Idem.*	0,57547	*Idem.*	0,16979	*Idem.*	.....	*Idem.*	.....
0,55	*Idem.*	.....	*Idem.*	.....	*Idem.*	0,5030	*Idem.*	0,2224
0,51	*Idem.*	0,41714	*Idem.*	0,29343	*Idem.*	.....	*Idem.*	.....
0,50	*Idem.*	0,353553 $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$	*Idem.*	0,353553 $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$	*Idem.*	0,353553 $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$	*Idem.*	0,353553 $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$

Les systèmes de valeurs de y et z provenant du signe inférieur du $\pm$ de l'expression (217) de $r^4 \cos 4\alpha$ donnent des courbes fermées à quatre côtes saillantes, à peu près telles que nous désirions en obtenir. Les valeurs provenant du signe supérieur donnent huit branches indéfinies qui ne touchent pas la partie fermée, et qui sont étrangères à notre objet.

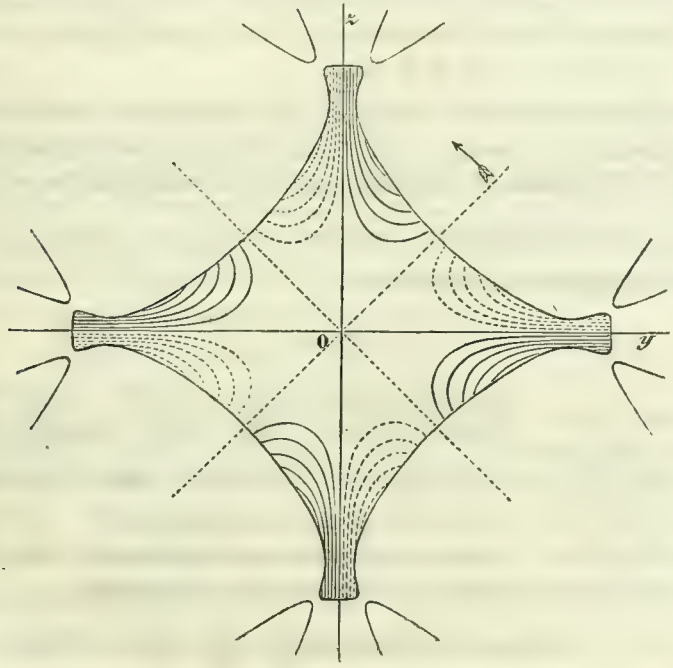
Les deux équations donnent des courbes à peu près identiques. Cependant la seconde

$$(223)\quad r^4 - \frac{48}{49}\cdot\frac{16}{17} r^4 \cos 4\alpha + \frac{12}{49}\cdot\frac{16}{17} r^8 \cos 8\alpha = 1 - \frac{36}{49}\cdot\frac{16}{17},$$

d'où

$$(224)\quad \left.\begin{matrix} y \\ \text{et } z \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{r^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+r^4}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{17}{16}(1-r^2) - \frac{1}{2}(1-r^8)}}}$$

donne, comme l'on voit, pour le minimum de z, répondant à



$r = 0{,}85$ environ, un nombre 0,04183 un peu plus grand que celui 0,0386 qui résulte de la première équation, en sorte que la courbe représentée par la seconde, (223), donne des *côtes* un peu moins minces.

Nous avons donc adopté, pour notre étude, la courbe fermée représentée par (223) ou (224) et qui est celle de la figure ci-contre. La même figure donne une amorce des huit branches indéfinies, et les coupes horizontales (voyez plus loin) de la surface courbe dans laquelle se change, par la torsion, la section primitivement plane qui a cette courbe pour contour.

99. *Courbes représentées par les équations où le rayon vecteur est affecté d'exposants négatifs. Courbes du douzième et du seizième degré*, etc. — Il est facile de voir que les courbes à exposants négatifs, représentées par l'équation générale (204) de l'article (92)

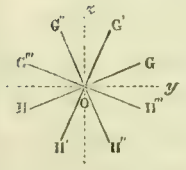
$$r^3 - (ar^4 + a\,r^{-4})\cos 4\alpha + (a'r^8 + a'\,r^{-8})\cos 8\alpha - \ldots\ldots$$
$$= 1 - a - a + a' + a' - \ldots\ldots$$

passent toutes par leur centre, ou par l'origine des coordonnées. Supposons, par exemple, que le plus haut exposant négatif de r soit -4. En chassant le dénominateur ou en multipliant par r^4, on a

$$r^6 - (ar^8 + a)\cos 4\alpha + a'r^{12}\cos 8\alpha - \ldots = (1 - a - a + a' - \ldots)\,r^8.$$

Cette équation est satisfaite par

$$r = 0,\ \cos 4\alpha = 0,\ \text{d'où}\ \alpha = \frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8}\ldots\ldots\frac{15\pi}{8}.$$



En sorte qu'il se croise, au centre, quatre branches de la courbe qui ont des tangentes GH, G'H', G''H'', G'''H''' faisant les angles $\pm\frac{\pi}{8}$ et $\pm\frac{3\pi}{8}$ avec l'axe Oy et son prolongement.

Si le plus haut exposant négatif de r est -8, on peut voir de même que l'équation est satisfaite par

$$r = 0,\ \cos 8\alpha = 0,\ \text{d'où}\ \alpha = \frac{\pi}{16},\ 3\frac{\pi}{16},\ 5\frac{\pi}{16}\ldots\ldots 31\frac{\pi}{16},$$

en sorte que le centre est un point multiple où se croisent huit branches sous les inclinaisons

$$\pm\frac{\pi}{16},\ \pm\frac{3\pi}{16},\ \pm\frac{5\pi}{16},\ \pm\frac{7\pi}{16}$$

avec l'axe Oy et son prolongement.

De pareilles courbes ne peuvent nous convenir; à moins, toutefois, que les branches qui se croisent au centre ne soient pas indéfinies, mais se replient en rosette et soient toutes enveloppées, sans être touchées, par une même autre courbe fermée qui sera alors la seule courbe considérée comme base du prisme.

C'est ce qui arrive pour l'équation

$$r^2 - ar^{-4}\cos 4\alpha = 1 - a.$$

Mais les courbes enveloppes qu'on peut tirer de cette équation du dixième degré en y, z diffèrent moins du cercle que celles que nous avons pu obtenir (art. 94, 95) de l'équation du quatrième degré.

D'ailleurs les enchevêtrements de contours doivent être une cause de complications et de difficultés.

Nous pensons donc que pour avoir des courbes de formes plus variées que celles des articles 94 à 98, par exemple des courbes à côtes saillantes dont le petit diamètre soit moins de moitié du plus grand, il conviendra de s'en tenir aux exposants positifs de r et de recourir à l'équation du douzième degré

$$r^2 - ar^4\cos 4\alpha + a' r^8\cos 8\alpha - a'' r^{12}\cos 12\alpha = 1 - a + a' - a'',$$

ou à celle analogue du seizième. Elles peuvent être réduites au troisième et au quatrième degré en $\cos 4\alpha$ en remplaçant $\cos 8\alpha$ par $2\cos^2 4\alpha - 1$, $\cos 12\alpha$ par $4\cos^3 4\alpha - 3\cos 4\alpha$ et $\cos 16\alpha$ par $8\cos^4 4\alpha - 8\cos^2 4\alpha + 1$. Celle du seizième se réduirait même au second en $\cos 8\alpha$ si les termes en $\cos\alpha$ et $\cos 12\alpha$ manquaient; mais comme elle ne changerait pas en y mettant $\frac{2\pi}{8} + \alpha$ pour α, elle donnerait huit pointes égales au lieu de quatre.

100. *Glissements et moment de torsion dans les prismes ayant pour bases les courbes du quatrième et du huitième degré.* — Mais les trois courbes du quatrième et du huitième degré que nous avons construites (art. 95 et 98) suffiront pour nous donner une idée des lois de la torsion des prismes dont la base est, soit un carré curviligne à côtés concaves, soit une étoile à quatre pointes donnant des côtes saillantes.

Cherchons, en effet, le moment de torsion et les glissements dans des prismes ayant pour bases les courbes

$$(225)\quad \begin{cases} r^2 - ar^4\cos 4\alpha + a' r^8 \cos 8\alpha - \ldots = 1 - a + a' - \ldots \text{ ou} \\ y^2 + z^2 - a(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) + \\ \quad + a'(y^8 - 28y^6z^2 + 70y^4z^4 - 28y^2z^6 + z^8) - \ldots = 1 - a + a' - \ldots \end{cases}$$

répondant à des déplacements longitudinaux (205 et 207),

$$\begin{cases} (226) \\ u = \frac{\theta}{2}(-ar^4\sin 4\alpha + a' r^8 \sin 8\alpha - \ldots) = \\ \quad = \frac{\theta}{2}[-a(4y^3z - 4yz^3) + a'(8y^7z - 56y^5z^3 + 56y^3z^5 - 8yz^7) - \ldots]. \end{cases}$$

On verra, en comparant les coefficients à ceux de (134), (136) du chapitre VII, que l'on a, en vertu de celles (137), (138), (139), (140) du même chapitre, pour les glissements et le moment de torsion

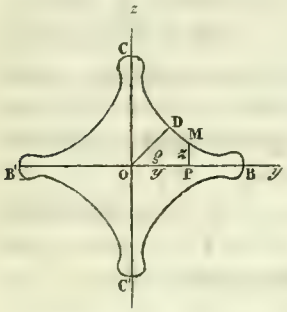
$$\begin{cases} (227) \\ g_{xy} = -\theta r\sin\alpha + \frac{\theta}{2}(-4ar^3\sin 3\alpha + 8a' r^7 \sin 7\alpha - \ldots\ldots) = \\ \quad = -\theta z + \frac{\theta}{2}[-4a(3y^2z - z^3) + 8a'(7y^6z - 35y^4z^3 + 21y^2z^5 - z^7) - \ldots] \end{cases}$$

$$\begin{cases} (228) \\ g_{xz} = \theta r\cos\alpha + \frac{\theta}{2}(-4ar^3\cos 3\alpha + 8a' r^7 \cos 7\alpha - \ldots) = \\ \quad = \theta y + \frac{\theta}{2}[-4a(y^3 - 3yz^2) + 8a'(y^7 - 21y^5z^2 + 35y^3z^4 - 7yz^6) - \ldots] \end{cases}$$

$$(229)\quad \left\{\begin{aligned} M_x &= G\theta \int r^2\, d\omega - \frac{G\theta}{2} \int d\omega\,(4ar^4 \cos 4\alpha - 8a' r^8 \cos 8\alpha + \dots) \\ &= G\theta \int (y^2+z^2)\, d\omega - \frac{G\theta}{2} \int d\omega\,[4a\,(y^4 + 6y^2z^2 + z^4) \\ &\qquad - 8a'(y^8 - 28y^6z^2 + 70y^4z^4 - 28y^2z^6 + z^8) + \dots\dots\,]. \end{aligned}\right.$$

L'on peut donner, au moment M_x, une forme plus immédiatement calculable pour nos courbes symétriques et égales dans les sens y et z, et pour lesquelles on a nécessairement

$$\int z^2\, d\omega = \int y^2\, d\omega,\ \int z^4\, d\omega = \int y^4\, d\omega,\ \int y^2 z^6\, d\omega = \int y^6 z^2\, d\omega,\ \text{etc.}$$



En effet, en prenant l'élément $d\omega = dy\,dz$, si l'on fait l'intégration dans le quart de section BOC seulement, et si l'on quadruple le résultat, l'on a :

$$\int y^2\, d\omega = 4 \int_0^1 y^2\, dy \int_0^z dz = 4 \int_0^1 y^2 z\, dy$$

$$\int y^4\, d\omega = 4 \int_0^1 y^4 z\, dy;\ \int y^6\, d\omega = 4 \int_0^1 y^6 z\, dy$$

$$\int y^2 z^2\, d\omega = 4 \int_0^1 y^2\, dy \int_0^z z^2\, dz = \frac{4}{3} \int_0^1 y^2 z^3\, dy$$

$$\int y^6 z^2\, d\omega = \frac{4}{3} \int_0^1 y^4 z^5\, dy$$

$$\int y^4 z^4\, d\omega = 4 \int_0^1 y^4\, dy \int_0^z z^4\, dz = \frac{4}{5} \int_0^1 y^4 z^5\, dy$$

z désignant ici l'ordonnée positive PM considérée comme fonction de l'abscisse positive OP = y, et 1 étant la plus grande valeur OB de y.

En sorte qu'on aura (nous ajoutons ce qu'on aurait avec l'équation 225 portée au douzième degré)

$$(230)\quad \left\{\begin{aligned} M_x &= G\theta \Big[8 \int_0^1 y^2 z\, dy - 16a \int_0^1 dy\,(y^4 z - y^2 z^3) + \\ &\quad + 32a' \int_0^1 dy \left(y^8 z - \frac{28}{3} y^6 z^3 + 7 y^4 z^5 \right) \\ &\quad - 48a'' \int_0^1 dy (y^{12} z - 22 y^{10} z^3 + 99 y^8 z^5 - 66 y^6 z^7) + \dots \Big]. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme entre crochets est le moment d'inertie polaire $\int r^2\, d\omega = J$, ou ce qu'il suffit de multiplier par $G\theta$ pour avoir le

moment M_x de l'ancienne théorie. Les autres termes représentent ce qu'il faut en retrancher, vu le gauchissement de la section, dont cette théorie ne tenait point compte.

101. *Calcul des moments de torsion. Influence presque nulle des saillies des sections, ou des côtes saillantes des prismes.* — Pour calculer exactement les intégrales comprises dans cette expression de M_x, il faudrait mettre à la place de z la valeur de z en y, tirée de l'équation (225) de la courbe-contour. Cela n'est pas possible avec l'équation du huitième degré, et l'on tirerait de celle du quatrième une valeur de z qui, substituée, rendrait l'intégration impossible autrement que par une série très-compliquée. Aussi nous avons opéré toutes ces intégrations par la formule de quadrature de Simpson, qui donne toute l'approximation désirable.

Par exemple, pour la courbe $y^2+z^2-0,5(y^4-6y^2z+z^4)=0,5$ (art. 95), en désignant par $z_0=1, z_{0,1}, z_{0,2}\ldots\ldots z_1=0$, les ordonnées z répondant à $y=0$, $y=0,1$, $y=0,2\ldots\ldots y=1$, de même que l'on a, par cette formule connue, l'aire

$$\omega=\int_0^1 z\,dy=\frac{0,1}{3}(0\times z_0+4z_{0,1}+2z_{0,2}+4z_{0,3}+\ldots+4z_{0,9}+1\times 0),$$

nous avons posé :

$$(231)\qquad \int_0^1 y^2z^3dy=\frac{0,1}{3}[(0)^2(z_0)^3+4(0,1)^2z^3_{0,1}+ +2(0,2)^2z^3_{0,2}+\ldots+4(0,9)^2z^3_{0,9}+(1)^2(0)^3],$$

et de même pour les autre intégrales.

Nous avons pris, pour les deux autres courbes (art. 95 et art. 98), un plus grand nombre de divisions vers les extrémités, à cause de la complication de leur forme en ces endroits.

Le calcul a été sommairement vérifié en faisant la quadrature par trapèzes rectilignes ou par la formule moins rapprochée

$$\frac{0,1}{2}[(0)^2(z_0)^3+2(0,1)^2(z_{0,1})^3+2(0,2)^2(z_{0,2})^3\ldots+(1)^2(0)^3]$$

et l'on est arrivé à peu de chose près aux mêmes résultats.

On a obtenu ainsi, en rétablissant l'homogénéité (art. 93) et en se rappelant que le premier terme entre crochets de la valeur (230) de M_x représente le moment d'inertie polaire J de chaque section :

Pour la courbe $\frac{y^2+z^2}{r_0^2} - 0{,}4\frac{y^4-6y^2z^2+z^4}{r_0^4} = 0{,}6$ (carré à angles arrondis)

$$\omega = 2{,}0636\, r_0^2;\quad J = 0{,}7174\, r_0^4 = 1{,}0586\,\frac{\omega^2}{2\pi};$$

$$M_x = 0{,}5873\, G\theta r_0^4 = 0{,}8186\, G\theta J = 0{,}8666\, G\theta\,\frac{\omega^2}{2\pi}.$$

Pour la courbe $\frac{y^2+z^2}{r_0^2} - 0{,}5\frac{y^4-6y^2z^2+z^4}{r_0^4} = 0{,}5$ (carré à angles aigus)

$$\omega = 1{,}7628\, r_0^2;\quad J = 0{,}5259\, r_0^4 = 1{,}0634\,\frac{\omega^2}{2\pi};$$

$$M_x = 0{,}4088\, G\theta\, r_0^4 = 0{,}7783\, G\theta J = 0{,}8276.\, G\theta\,\frac{\omega^2}{2\pi}.$$

Pour la courbe

$$\frac{y^2+z^2}{r_0^2} - \frac{48}{48}\frac{16}{17}\cdot\frac{y^4-6y^2z^2+z^4}{r_0^4} + \frac{12}{49}\frac{16}{17}\cdot\frac{y^8-28y^6z^2+70y^4z^4-28y^2z^6+z^8}{r_0^8} = 1 - \frac{36}{49}\frac{16}{17}$$

(étoile à quatre pointes arrondies),

$$\omega = 1{,}2202\, r_0^2;\quad J = 0{,}2974\, r_0^4 = 1{,}2551\,\frac{\omega^2}{2\pi};$$

$$M_x = 0{,}15983\, G\theta r_0^4 = 0{,}5374\, G\theta J = 0{,}6745\, G\theta\,\frac{\omega^2}{2\pi};$$

On voit qu'il faut, de l'expression $GJ\theta$ de l'ancienne théorie, retrancher, pour avoir M_x quand la section est le carré à angles arrondis et côtés légèrement concaves, une proportion des 0,1814. Nous avons vu que, pour le carré rectiligne, il faut (art. 77) prendre $M_x = 0{,}84346\, GJ\theta$ ou retrancher une proportion de

0,15654 seulement. La légère concavité des côtés a plus influé pour diminuer le moment de torsion (pour même moment d'inertie) que l'arrondissement des quatre angles n'a influé pour l'augmenter.

Pour le carré curviligne à côtés un peu plus concaves et angles aigus, il faut retrancher les 0,2217. *Il suffit, comme l'on voit, d'une concavité assez légère des côtés de la base* $\left(\frac{1}{22}\text{ environ}\right)$ *pour diminuer assez notablement le moment de torsion d'un prisme carré* (art. 78).

Enfin, pour le prisme à côtes saillantes, il faut, de $GJ\theta$, retrancher l'énorme proportion de

$$0{,}4626,$$

ou prendre seulement 0,5374. $GJ\theta$ au lieu de $GJ\theta$ que l'on prend pour une section circulaire, ou de $0{,}84346\,GJ\theta$ pour une section carrée rectiligne.

Et comme on a, pour une section circulaire, $J=\frac{\omega^2}{2\pi}$, $M_x=G\theta\frac{\omega^2}{2\pi}$, l'on trouve que les prismes ayant pour bases le carré arrondi, le carré aigu et l'étoile, n'offrent respectivement que les 0,867, les 0,828 et les 0,674 de la résistance élastique à la torsion qu'ils offriraient à égale superficie ω de la section, ou *à égale quantité de matière*, s'ils étaient à base circulaire, bien que les moments d'inertie de leurs sections soient $1^{\text{fois}},059$, $1^{\text{fois}},063$, $1^{\text{fois}},255$ ceux de sections circulaires d'égale superficie.

Ainsi, les quatre saillies qui, malgré leur peu d'épaisseur, ont une influence considérable sur la grandeur du moment d'inertie n'en ont qu'une très-faible sur le moment de torsion. *Les pièces à côtes, employées si utilement contre les flexions, doivent être exclues des parties des constructions où les forces tendent à tordre, ou, du moins, il faut ne compter nullement sur une quote-part des quatre côtes ou saillies dans la résistance.*

102. *Coupes topographiques et relief des surfaces courbes dans lesquelles les sections se transforment.* — On le reconnaît encore en

construisant l'épure ou le relief d'une portion de prisme tordu, et de la surface courbe dans laquelle se sont changées nos sections primitivement planes. Les parties faisant saillie, ou situées aux environs des angles, sont sensiblement normales aux arêtes ou aux *fibres* devenues des hélices, et n'opposent, par conséquent, que fort peu de résistance à la torsion.

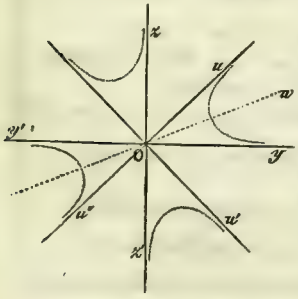
Ces surfaces courbes peuvent être décrites assez simplement comme on décrit le relief ou la topographie des terrains, au moyen de coupes perpendiculaires à l'axe du prisme (figure de l'art. 98). Ces coupes sont exactement déterminables par points, tandis que celles de la surface dans laquelle se changent les sections d'un prisme à base carrée ou rectangle rectiligne ne peuvent s'obtenir (art. 76 et 84) que par des interpolations graphiques ou numériques [1].

103. *Glissements, points dangereux et conditions de non-rupture pour les carrés curvilignes du quatrième degré.* — Les glissements pour les courbes du quatrième degré $r^3 - ar^4 \cos 4\alpha = 1 - a$ sont (form. 227, 228 en rétablissant l'homogénéité, art. 93) :

$$(232)\quad g_{xy} = -\theta r \sin\alpha - 2a\theta \frac{r^3}{r_0^3} \sin 3\alpha ; \quad g_{xz} = \theta r \cos\alpha - 2a\theta \frac{r^3}{r_0^2} \cos 3\alpha .$$

[1] D'abord, pour les courbes du quatrième degré, l'expression (226) du déplacement u, rendue homogène, comme on a dit (art. 93), par l'introduction de r_0 (valeur de r pour $\alpha = 0$, qu'on avait prise pour unité), donne

$$-u = \frac{2a\theta}{r_0^3}(y^3 z - y z^3) = \frac{\theta a r^4}{2 r_0^2} \sin 4\alpha .$$



Les coupes qu'on veut avoir s'obtiendront en attribuant à $-u$, dans cette équation, une suite de valeurs arbitraires. Pour construire ces courbes composées de quatre branches, ayant pour asymptotes les deux axes yoy', zoz' et leurs bissectrices uou'', ou', il faudrait, en employant les coordonnées ordinaires y, z, résoudre pour chaque point une équation du troisième degré. Mais, par coordonnées polaires, on a

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{-2u}{a\theta r_0^2} \frac{1}{\sin 4\alpha} \right)^{1/4} ;$$

D'où, pour le glissement principal :

$$(233)\quad g_x = \sqrt{g^2_{xy} + g^2_{xz}} = \theta r_0 \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 4a\frac{r^4}{r_0^4}\cos 4\alpha + 4a^2\frac{r^6}{r_0^6}}.$$

D'où l'on tire facilement les valeurs suivantes de $\frac{r}{r_0}$ quand $\alpha = 0{,}5$:

POUR $\frac{-u}{\theta r_0^2} = 0{,}01$	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
Grades ou 1/100 d'angle droit.						
Pour $\alpha = 0^{gr}$ $\frac{r}{r_0} = \infty$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1 $\frac{r}{r_0} = 0{,}94090$	$\frac{r}{r_0} = 1{,}11892$	1,23829	.....	.....	.....	.....
2 1/2 0,71110	0,84565	0,93586	1,00565	1,06335	1,11293	$\frac{r}{r_0} = 1{,}15666$
5 0,59982	0,71331	0,78940	0,84827	0,89694	0,93877	0,97565
10 0,51075	0,60739	0,67219	0,72231	0,76375	0,79937	0,83078
15 0,47155	0,56077	0,62059	0,66687	0,70513	0,73801	0,76701
20 0,45286	0,53854	0,59600	0,64044	0,67718	0,70876	0,73661
$25^{gr} = \frac{\pi}{8}$ $\frac{r}{r} = 0{,}44721$	0,53183	0,58857	0,63246	0,66874	0,69993	0,72742
$50^{gr} = \frac{\pi}{4}$ ∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs de $\frac{r}{r_0}$ pour des angles plus grands; car la branche de courbe ayant l'axe oy et la bissectrice ou pour asymptotes est symétrique par rapport à la droite ponctuée ow pour laquelle $\alpha = 25^{gr} = \frac{\pi}{4}$, et les branches s'obtiennent en faisant faire des quarts de révolution à celle-ci.

Quant aux courbes répondant à des valeurs positives de u elles s'obtiennent par des demi-quarts de révolution, et nous ne les avons pas marquées.

En supposant, comme aux art. 76 et 88, la torsion $\theta = 5$ ou le pas des hélices $\frac{2\pi}{5} = 1^m{,}256637$, et $r_0 = 0^m{,}1$ on a $\frac{u}{\theta r_0^2} = \frac{u}{0{,}05}$, en sorte que les coupes

$\frac{u}{\theta r_0^2} = \pm 0{,}02$; $\pm 0{,}04$; $\pm 0{,}06$; $\pm 0{,}07$ répondent à

$u = \pm 1$; ± 2 ; ± 3 ; $\pm 3\ 1/2$ millimètres.

Pour notre courbe du huitième degré dont l'équation (225) donne lieu au dépla-

Il est d'autant plus grand, pour même grandeur de l'angle α, ou sur une même droite passant par le centre, que r est plus grand;

cement représenté par l'expression (226) qui s'écrit, en rétablissant l'homogénéité

$$-u = \frac{\theta r_0^2}{2}\left(a\frac{r^4}{r_0^4}\sin 4\alpha - a'\frac{r^8}{r_0^8}\sin 8\alpha\right),$$

l'on a, en résolvant cette égalité rapport à $\frac{r}{r_0}$,

$$\frac{r}{r_0} = \left[\frac{a}{4a'\cos 4\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{4a'\cos 4\alpha}\right)^2 + \frac{u}{\theta r_0^2}\cdot\frac{2}{a'\sin 8\alpha}}\right]^{1/4},$$

ou

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{a}{4a'\cos 4\alpha}\right)^{1/4}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16a'}{a^2}\cdot\frac{u}{\theta r_0^2}\cdot\frac{1}{\tang 4\alpha}}\right)^{1/4},$$

formule qui donne cette suite de valeurs en faisant $a = 4a' = \frac{48}{49}\cdot\frac{16}{17} = 0{,}9219688$ et en observant que pour $\alpha = 25^\circ = \frac{\pi}{4}$, $\frac{r}{r_0}$ qui prend la forme $\frac{0}{0}$ a pour vraie valeur $\left(\frac{-2u}{\theta a r_0^2}\right)^{1/4}$:

VALEURS DE $\frac{r}{r_0}$ DES COUPES TOPOGRAPHIQUES

DE LA SURFACE $-u = \frac{\theta r_0^2}{2}\left(a\frac{r^4}{r_0^4}\sin 4\alpha - a'\frac{r^8}{r_0^8}\sin 8\alpha\right)$ POUR $a = 4a' = \frac{48}{49}\cdot\frac{16}{17}$.

POUR $\frac{-u}{\theta r_0^2} = 0{,}01$	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
Grades ou 1/100 d'angle droit.					
$\alpha = 0$	Imaginaire.	Imaginaire.	Imaginaire.	Imaginaire.	Imaginaire.	Imaginaire.
0°,69	1,0902	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*
1	0,81620	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*
1,38	.....	1,08094	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*
2,06	.....	.....	1,00210	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*
2,50	0,62206	0,75888	0,87457	*Idem.*	*Idem.*	*Idem.*
2,74	.....	.....	.....	1,00372	*Idem.*	*Idem.*
3,40	.....	.....	.....	.....	1,00576	*Idem.*
4,05	.....	.....	.....	.....	.....	1,01755
5	0,51929	0,62366	0,69802	0,76009	0,81688	0,87366
10	0,43999	0,52533	0,58382	0,63379	0,66945	0,70418
15	0,40547	0,46318	0,53574	0,57703	0,61149	0,64147
20	0,38896	0,46297	0,51281	0,55160	0,58376	0,61154
25	0,38378	0,45639	0,50508	0,54274	0,57388	0,60065
30	0,38828	0,46133	0,51013	0,54771	0,57858	0,60510
35	0,40387	0,47938	0,52596	0,56797	0,59951	0,62637
40	0,43671	0,51752	0,57080	0,61139	0,64447	0,67249
45	0,50166	0,61321	0,66273	0,70768	0,74398	0,73770
$50^\circ = \frac{\pi}{4}$	Imaginaire.	Imaginaire.	Imaginaire.	Imaginaire.	Imaginaire.	Imaginaire.

car le radical représente le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés, comprenant l'angle 4α, sont respectivement égaux à $\frac{r}{r_0}$ et $2a\frac{r^3}{r_0^3}$, ou croissants avec r. Donc le plus grand glissement se trouve sur le contour de la section.

Comme on a, au contour

$$\frac{r^2}{r_0^2} - a\frac{r^4}{r_0^4}\cos 4\alpha = 1 - a,$$

cette expression (233) devient, en éliminant α :

$$\mathfrak{g}_x = \theta r_0 \sqrt{4(1-a) - \frac{r^2}{r_0^2}\left(3 - 4a^2\frac{r^4}{r_0^4}\right)}.$$

Et comme $\frac{r}{r_0}$ et $2a$ ne surpassent jamais 1 (art. 94, 95), $3 - a^2\frac{r^4}{r_0^4}$ est toujours positif, *en sorte que* $\mathfrak{g}_x$ *est d'autant plus grand sur le contour, que* r *est plus petit.*

Les points dangereux sont donc, comme dans l'ellipse et le rectangle, *les points du contour les plus rapprochés de l'axe de torsion,*

Les premières valeurs de $\frac{-u}{\theta r_0^2}$ de chaque colonne donnent les points où chaque coupe est tangente au rayon vecteur (car ces coupes n'ont pas d'asymptotes comme celles calculées à l'autre tableau); on obtient l'angle α correspondant à ce point de contact en égalant le radical à zéro, ce qui donne

$$\text{tang } 4\alpha = -\frac{16a'}{a^2}\frac{u}{\theta r_0^2}, \quad \frac{r}{r_0} = \left(\frac{a}{4a'\cos 4\alpha}\right)^{1/4}.$$

Pour des valeurs de α inférieures, $\frac{r}{r_0}$ serait imaginaire ou le rayon vecteur ne rencontrerait pas la courbe.

Toutes les valeurs de $\frac{r}{r_0}$ portées au dernier tableau répondent au signe inférieur du $\pm$ de son expression. Le signe supérieur donnerait d'autres rencontres des rayons vecteurs avec les courbes, mais en des points pour lesquels r excède beaucoup r_0, et qui sont, par conséquent, hors de notre courbe fermée.

En divisant par 20 la valeur de $\frac{u}{\theta r_0^2}$ l'on a, en fraction du mètre, les valeurs de u ou les hauteurs des coupes topographiques pour $\theta = 5$, $r = 0^m,10$, ce qui permet de construire un modèle en relief (voir la figure art. 98).

ou les extrémités des petits diamètres, qui font des angles de 45 degrés avec les y ou les z.

Comme nous avons toujours désigné ces petits diamètres par 2ρ, mettons ρ et 45 degrés à la place de r et α dans l'expression (233) de g_x, nous avons pour le plus grand glissement principal

$$(234) \qquad g = \theta r_0 \left(\frac{\rho}{r_0} + 2a\frac{\rho^3}{r_0^3}\right) = \theta\rho\left(1 + 2a\frac{\rho^2}{r_0^2}\right).$$

Et le plus petit glissement principal, répondant à $\alpha = 0$, $r = r_0$, est

$$g = \theta r_0 (1 - 2a).$$

Si $a = 0{,}4$ (carré à angles arrondis), l'on a (art. 95) pour le plus petit rayon vecteur ou demi-diamètre

$$\rho = \tfrac{1}{2} r_0 \sqrt{2};$$

d'où pour le plus grand glissement, aux extrémités des petits diamètres,

$$\theta r_0,\ 0{,}7\sqrt{2} = 0{,}98995\ \theta r_0 = 1{,}400\,\theta\rho,$$

(ou $1^{\text{fois}},400$ ce qu'on aurait en ces points si la section restait plane); et pour le plus petit, aux extrémités des grands diamètres,

$$0{,}2\ \theta r_0.$$

Si $a = 0{,}5$ (carré à côtés concaves et angles aigus), l'on a (art. 95) pour le plus petit rayon vecteur

$$\rho = r_0\sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Substituant dans (234), on a pour le plus grand glissement

$$\theta\rho\sqrt{2} = \theta r_0\sqrt{2\sqrt{2} - 2} = 0{,}91017\,\theta r_0,$$

et *zéro* pour le plus petit, car, aux angles saillants, nous avons vu qu'en général (art. 68 et dernier article du chapitre XI ci-après, les arêtes devenues hélicoïdales restent normales aux sections devenues courbes.

Les équations de non-rupture sont, en conséquence, pour le carré à angles arrondis (en éliminant $G\theta$ entre $T = \text{ou} > G g_x = 0{,}98995\, G\theta\, r_o$ et $M_x = 0{,}8186\, GJ\theta$ que nous avons trouvé art. 101),

$$\text{limite } M_x = \frac{0{,}8186\ J\,T}{0{,}98995\ r_o} = 0{,}8269\ \frac{J}{r_o}\ T.$$

Pour le carré curviligne à angles aigus,

$$\text{limite } M_x = \frac{0{,}7783\ J\,T}{0{,}91017\ r_o} = 0{,}85514\ \frac{J}{r_o}\ T.$$

Comme on a, pour le cercle (art. 63, form. 127)

$$\text{limite } \frac{M_x}{T} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\sqrt[3]{\omega^{12}}}{2\sqrt{\pi}},$$

et comme, en mettant dans les deux expressions précedentes de limite M_x, pour J et pour r_o leurs valeurs en ω, tirées des expressions de l'art. 96, l'on obtient :

Pour le carré à angles arrondis, lim. $M_x = 0{,}7094\ \frac{\sqrt[3]{\omega^{12}}}{2\sqrt{\pi}}\ T$,

Pour le carré à angles aigus, lim. $M_x = 0{,}6812\ \frac{\sqrt[3]{\omega^{12}}}{2\sqrt{\pi}}\ T$,

l'on voit que les prismes qui ont des bases de cette forme n'offrent que les 0,7064 et les 0,6812 de *la résistance à la rupture par torsion* qu'ils offriraient si, avec même grandeur de ω ou même volume de matière, ils avaient des bases circulaires.

Avec un prisme dont la base serait un carré ordinaire nous avons vu que l'on a les 0,7379 (note de l'art. 83).

104. *Mêmes glissements, etc., pour la base courbe à côtes saillantes du huitième degré.* — Les expressions (227), (228) (auxquelles nous mettons un terme de plus pour les rendre applicables aux équations d'un degré supérieur au huitième),

$$(235)\quad \begin{cases} g_{xy} = \theta(-r\sin\alpha - 2ar^3\sin 3\alpha + 4a'r^7\sin 7\alpha - 6a''r^{11}\sin 11\alpha - \ldots) \\ g_{xz} = \theta(r\cos\alpha - 2ar^3\cos 3\alpha + 4a'r^7\cos 7\alpha - 6a''r^{11}\cos 11\alpha - \ldots) \end{cases}$$

montrent qu'en chaque point le glissement principal g_x, qui est une résultante de g_{xy} et g_{xz}, est aussi une résultante de droites

$$+\theta r,\ -2a\theta r^3,\ +4a'\theta r^7,\ -6a''\theta r^{11},\ldots$$

faisant respectivement, avec le côté positif de l'axe des y, des angles

$$\frac{\pi}{2} + \alpha,\ \frac{\pi}{2} - 3\alpha,\ \frac{\pi}{2} - 7\alpha,\ \frac{\pi}{2} - 11\alpha,\ldots.$$

Comme toutes ces droites augmentent de longueur avec r, il s'ensuit que, pour une même valeur de l'angle, le glissement g_x est le plus grand possible au contour de la section, et que c'est toujours sur ce contour qu'on doit chercher le point dangereux ou de plus grand glissement.

Et l'on a, pour la valeur générale de son carré

$$(236)\quad \begin{cases} g^2_x = g^2_{xy} + g^2_{xz} = \theta^2(r^2 + 4a^2r^6 + 16a'^2r^{14} + 36a''^2r^{22} + \ldots \\ -4ar^4\cos 4\alpha + 8a'r^8\cos 8\alpha - 12a''r^{12}\cos 12\alpha + \ldots \\ -16aa'r^{10}\cos 4\alpha + 24aa''r^{14}\cos 8\alpha + \ldots - 48a'a''r^{18}\cos 4\alpha - \ldots) \end{cases}$$

Si, pour la courbe du huitième degré ($a'' = 0$), on remplace $a'r^8\cos 8\alpha$ par sa valeur $1 - a + a' - r^2 + ar^4\cos 4\alpha$ tirée de l'équation (225) de cette courbe, on a

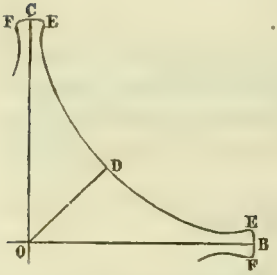
$$g^2_x = \theta^2[8(1-a+a') - 7r^2 + r^6(4a^2 + 16a'^2r^8) + (4a - 16aa'r^6)r^4\cos 4\alpha].$$

En en calculant numériquement les valeurs aux divers points du contour, pour $a = 4a' = \frac{48}{49}\cdot\frac{16}{17}$ (art. 98), nous avons trouvé

Pour $r = 1{,}00$, $r^4 \cos 4\alpha = 1{,}00000$, $\frac{g^2}{\theta^2} = 0{,}006067$

0,996	0,96094	0,001077
0,99	0,93262	0,000571
0,98	0,89377	0,002075
0,96	0,82459	0,004790
0,92	0,70032	0,006427
0,85	0,51191	0,011794
0,75	0,29353	0,055847
0,70	0,20304	0,111532
0,55	— 0,00860	0,414095
0,50	— 0,06250	0,544896

Le plus petit glissement a lieu pour $r = 0{,}99$, c'est-à-dire aux angles arrondis E, F que forme chaque côte, et *le plus grand glissement, et par conséquent le point dangereux, est au point D du contour le plus rapproché du centre,* comme pour les autres sections.



On a pour la valeur générale de ce plus grand glissement, applicable à toutes les courbes, en faisant $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $r = \rho$ dans l'expression (236) dont on peut, alors, extraire la racine carrée (en la rendant homogène par le facteur r_0) :

(237) Maximum de $g_x = \theta r_0 \left(\frac{\rho}{r_0} + 2a \frac{\rho^3}{r_0^3} + 4a' \frac{\rho^7}{r_0^7} + 6a'' \frac{\rho^{11}}{r_0^{11}} + \ldots \right)$

D'où, pour la courbe du huitième degré $a = 4a' = \frac{48}{49} \cdot \frac{16}{17}$, $\frac{\rho}{r_0} = \frac{1}{2}$:

$$\text{Max. de } g_x = 0{,}737695\ \theta r_0 = 1{,}47539\ \theta\rho$$

(ou $1^{\text{fois}},475$ ce qu'on aurait en D si la section restait plane).

Mettant cette valeur pour g dans l'équation de résistance $T \overset{=}{\text{ou}} > G g$ et éliminant avec l'équation (art. 101) $M_x = 0{,}5374\, G J \theta$, l'on a, pour un pareil prisme

$$\text{limite } M_x = \frac{0{,}53741}{0{,}73677} \frac{J T}{r_0} = 0{,}7285 \frac{J}{r_0} T.$$

Cette limite est, comme l'on voit, les 0,73 environ de celle qu'on trouverait par la théorie ancienne.

105. *Contours qui ne sont pas égaux dans les deux sens y et z. — Contours non-symétriques. — Prisme à base de triangle équilatéral. — Conclusion de ce chapitre.* — Ainsi que nous avons dit à l'article 99, l'on obtiendrait des courbes encore symétriques et égales dans les sens y et z, offrant des proportions bien plus variées, en portant au douzième et au seizième degré leurs équations (206) ou (226).

Et (art. 92) en y conservant des termes du deuxième, du sixième, du dixième degré à puissances paires de y et z, tels que $a'_2 r^2 \cos 2\alpha = a'_2 (y^2 - z^2)$, $a'_6 r^6 \cos 6\alpha =$ etc., l'on aurait une multitude de courbes symétriques par rapport à *chacun* des deux axes de y et z, mais *non égales dans leurs deux sens*, et ayant l'ellipse pour cas particulier[1].

[1] Par exemple, l'équation complète du quatrième degré d'un contour doublement symétrique sera facilement discutée sous cette forme, que l'on obtient en appelant b et c le grand et le petit *demi-axe*, et déterminant en conséquence a'_2, a'_4 et la constante de (203), de manière que $y = \pm b$ pour $z = 0$ et $z = \pm c$ pour $y = 0$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + a\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)(y^2 - z^2) - a\frac{y^4 - 6y^2z^2 + z^4}{b^2c^2} = 1 - a,$$

où l'on fera varier le nombre a entre $\frac{c^2}{b^2 + c^2}$ et $-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, limites pour lesquelles la courbe a des points multiples et est près de cesser d'être fermée. Le contour offre, à la seconde de ces deux limites, un rectangle à côtés concaves formé par deux hyperboles se coupant en quatre points dont les coordonnées sont fournies par $y^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{1}{8}(3b^2 + c^2)\sqrt{2}$ et $z^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{8}(b^2 + 3c^2)\sqrt{2}$. Et l'on aurait pour le déplacement longitudinal produit par la torsion θ de tout prisme ayant de pareilles bases

$$a = -(1 + 2a)\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\theta yz - \frac{4a\theta}{b^2 + c^2}(y^3z - yz^3).$$

Voyez aux deux figures de l'art. 118 des types de ces sortes de contour, même pour la supposition de c^2 nul, qui donne une courbe en ∞, et pour celle de c^2 négatif, qui donne deux orbes séparés.

Si l'on laisse subsister en outre, dans l'équation plus générale (201) ou (198), des termes de degré impair, comme $a'_3 r^3 \cos 3\alpha = a'_3 (y^3 - 3yz^2)$, ou des termes de degré pair affectés de puissances impaires de y et z, tels que $a_2 r^2 \sin 2\alpha = 2 a_2 yz$, $a_4 \sin 4\alpha = a_4 (4y^3 z - 4yz^3)$, l'on construira autant qu'on voudra d'autres contours, non-symétriques par rapport à l'un des deux axes ou par rapport à tous deux[1].

[1] Au moment de l'impression du Mémoire (mars 1855), nous apercevons quelques conséquences qui paraissent intéressantes et que nous ne croyons pas pouvoir omettre.

Observons d'abord que les contours même non symétriques peuvent offrir l'égalité dans diverses directions qui sont obliques aux axes, mais également inclinées les unes par rapport aux autres; car, en général, toute équation (101) $\theta \frac{r^2}{2} - \Sigma a_n r^n \sin n\alpha + \Sigma a_{n'} r^{n'} \cos n'\alpha = \text{constante}$, où les divers coefficients numériques n, n' de l'angle polaire α seront des multiples d'un même nombre entier m, restera la même, ainsi que la valeur correspondante (200) du déplacement u, en remplaçant α par $\frac{2\pi}{m} + \alpha$, en sorte que la section dont elle représente le contour, ainsi que la surface courbe que le plan de celle-ci affectera après une torsion, auront des formes telles qu'elles reviennent coïncider avec elles-mêmes en leur faisant faire un $m^{\text{ième}}$ de révolution autour du point central $r = 0$.

Par exemple, l'équation du troisième degré

$$\theta \frac{r^2}{2} + a'_3 r^3 \cos 3\alpha = \text{const.}, \text{ ou } \theta \frac{y^2 + z^2}{2} + a'_3 (y^3 - 3yz^2) = \text{constante}$$

que l'on peut écrire sous cette forme afin d'avoir $y = r = 1$ quand $z = 0$ ou $\alpha = 0$:

$$(\alpha) \qquad y^2 + z^2 - a(y^3 - 3yz^2) = 1 - a, \text{ ou } r^2 - ar^3 \cos 3\alpha = 1 - a,$$

fournira, en attribuant au nombre a des valeurs positives plus petites que $\frac{2}{3}$, une suite de courbes fermées à trois cornes ou sommets saillants semblables et également espacés, comprises entre le cercle d'un rayon $= 1$ et le triangle équilatéral inscrit. En attribuant au même paramètre a des valeurs négatives de 0 à $-\frac{1}{3}$, l'on obtiendrait les mêmes courbes, mais comprises entre le cercle et le triangle équilatéral circonscrit.

L'équation du sixième degré $r^2 - ar^3 \cos 3\alpha - a' r^6 \cos 6\alpha = 1 - a - a'$ donnerait des courbes analogues, mais de formes plus variées. Et si l'on faisait $a = 0$, ces courbes auraient six sommets semblables, se réduisant à six angles obtus avec côtés concaves intermédiaires et égaux lorsque $a' = \frac{1}{3}$.

Si l'on conserve, dans l'équation du troisième degré, un terme du second degré

En sorte que l'on pourrait, au moyen des principes que nous avons posés, déterminer très-approximativement les lois de la

$a'_3(y^3 - z^3)$ ou $a'_3 r^3 \cos 3\alpha$, la courbe qu'elle représente ne sera plus amenée à coïncider avec elle-même par un tiers de révolution, et l'on donnera facilement à cette équation la forme suivante en appelant $-b$, b' et $\pm c$ les *demi-axes* de la courbe ou les valeurs de y pour $z = 0$, et de z pour $y = 0$, et déterminant, en conséquence, les valeurs de la constante et des coefficients a'_2, a'_3 :

$$(b) \qquad \left[1 + \frac{3c^2}{bb'}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)y\right]\frac{z^2}{c^2} = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b'}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)y\right].$$

L'on obtient tous les contours fermés que cette équation peut donner en ne faisant varier b' qu'entre b et $2b$, et c qu'entre zéro et $\sqrt{\frac{b'}{3\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)}}$. Ce sont des courbes en forme d'œuf ou de poire (comme la figure de l'art. 65), dont le *petit bout* dégénère en pointe lorsque $b' = 2b$, et qui se réduisent à des ellipses quand $b' = b$, et au contour mixtiligne formé par une branche d'hyperbole et par la ligne droite $y = -b$ parallèle à son axe imaginaire lorsque $c = \sqrt{\frac{b'}{3\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)}}$. Mais les paramètres b, b', c, doivent avoir entre eux une certaine relation pour que l'on ait $\int g_{zz}\, d\omega = 0$ (outre $\int g_{zy}\, d\omega = 0$ qui a déjà lieu), ou que (art. 59) les forces extérieures faisant tordre autour de l'axe des x se réduisent à des couples à chaque extrémité.

Torsion du prisme triangulaire équilatéral. — Lorsque le coefficient a de l'équation (a), $r^2 - ar^3 \cos 3\alpha = 1 - a$ se rapproche de $\frac{2}{3}$, le contour fermé et continu qu'elle représente se rapproche autant qu'on veut du triangle équilatéral inscrit au cercle $r = 1$. Et, en faisant $a = \frac{2}{3}$, et écrivant $\frac{z}{2b}$ au lieu de z pour rétablir l'homogénéité, ou bien en faisant, dans l'équation (b), $b' = 2b$, $c = \frac{2b}{\sqrt{3}}$, l'on a

$$(c) \quad \left(\frac{r}{2b}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{2b}\right)^3 \cos 3\alpha = \frac{1}{3}, \text{ ou } (y+b)\left(z - \frac{2b-y}{\sqrt{3}}\right)\left(z + \frac{2b-y}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

et le contour représenté n'est autre chose que le triangle équilatéral dont la hauteur est $3b$, et, par conséquent, les côtés $k = 2b\sqrt{3}$.

En assimilant cette équation à celle (201) $r^2 + \frac{2a'_3}{\theta}\cos 3\alpha = \text{constante}$, on a $a'_3 = -\frac{\theta}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2b} = -\frac{\theta}{6b}$, et, par conséquent, pour l'expression (200) $u = a'_3 r^3 \sin 3\alpha$

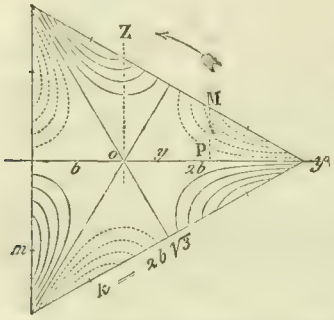
torsion d'un prisme ayant une base donnée quelconque, en assimilant son contour à l'une des courbes représentées par ces

du déplacement longitudinal produit par une torsion θ imprimée au prisme qui a ce triangle pour base,

$$(d) \qquad u = -\frac{\theta}{6b} r^3 \sin 3\alpha = -\frac{\theta}{6b}(3y^2 z - z^3).$$

Si l'on appelle u_m la plus grande valeur de u, qui, sur le côté $y = -b$ du contour, par exemple, se trouve au point $z = -b$, l'on a $u_m = \frac{\theta b^2}{3}$; et l'expression précédente de u, écrite en conséquence

$$\frac{u}{u_m} = -\frac{r^3}{3b^3} \sin 3\alpha,$$



donne facilement (note de l'art. 104) pour les coupes, par les plans $u = \pm 0{,}2\, u_m$, $\pm 0{,}4\, u_m$, $\pm 0{,}6\, u_m$ et $\pm 0{,}8\, u_m$, de la surface courbe affectée après la torsion par la section triangulaire primitivement plane, les diverses courbes de la figure ci-contre. Celles ponctuées répondent aux valeurs négatives de u, et les trois droites médianes du triangle sont la coupe de la même surface par le plan primitif $u = 0$ de la section.

L'expression (241) de u donne aussi

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z = -\theta\left(z + \frac{yz}{b}\right), \quad \gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y = \theta\left(y - \frac{y^2 - z^2}{2b}\right)$$

qui satisfont aux conditions (art. 59) $\int \gamma_{xy}\, d\omega = 0$, $\int \gamma_{xz}\, d\omega = 0$.

Et le moment de torsion (105) $G\int d\omega\,(\gamma_{xz}\, y - \gamma_{xy}\, z)$ est

$$(e) \qquad M_x = G\theta\left(\int y^2\, d\omega + \int z^2\, d\omega + \frac{3}{2b}\int yz^2\, d\omega - \frac{1}{2b}\int y^3\, d\omega\right).$$

Comme l'ordonnée M P du côté supérieur du triangle, répondant à une abscisse quelconque O P $= y$, est $\frac{1}{3}\sqrt{3}.(2b - y)$, l'on a

$$\int_0^\omega z^2\, d\omega = 2\int_{-b}^{2b} dy \int_0^{\frac{1}{3}(2b-y)\sqrt{3}} z^2\, dz = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{-b}^{2b} \frac{(2b-y)^3}{3}\, dy = \frac{3}{2} b^4 \sqrt{3},$$

$$\int y^2\, dy = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{-b}^{2b} y^2 (2b - y)\, dy = \frac{3}{2} b^4 \sqrt{3},$$

$$\int yz^2\, d\omega = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{-b}^{2b} y\,\frac{(2b-y)^3}{3}\, dy = -\frac{3}{5} b^5 \sqrt{3}; \int y^3\, d\omega = 2\sqrt{3}\int_{-b}^{2b} y^3 (2b - y) = \frac{3}{5} b^5 \sqrt{3}.$$

équations et dont on déterminerait les paramètres a de manière qu'elle s'en rapprochât le plus possible.

Mais les exemples que nous avons complétement traités suffisent toujours pour démontrer que les pièces à côtes saillantes, employées pour résister à la flexion, résistent très-mal à la torsion. C'est surtout dans les parties faisant saillie sur le reste que les sections primitivement planes s'infléchissent de manière que les lignes matérielles, primitivement orthogonales, restent sensible-

D'où le moment d'inertie polaire (vu que $\omega = 3\,b^2\sqrt{3}$)

$$J = \int z^2\,d\omega + \int y^2\,d\omega = 3\,b^4\sqrt{3} = \frac{1}{48}\,k^4\sqrt{3} = \frac{\omega^2}{3\sqrt{3}},$$

et le moment de torsion

$$(f) \qquad M_x = G\theta\left(J - \frac{2}{5}J\right) = 0{,}6\,G\,J\theta = \frac{G\theta\omega^2}{5\sqrt{3}} = \frac{G\theta\,\omega^4}{45\,J}.$$

Le coefficient numérique par lequel il faut multiplier l'expression $G\,J\theta$ de l'ancienne théorie et qui est, comme nous avons vu, de 0,84 pour une section carrée, 0,537 pour l'étoile à quatre pointes arrondies du huitième degré, est, comme l'on voit

0,60

pour une section triangulaire équilatérale.

Quant à la résistance à la rupture par torsion, le plus grand glissement a lieu au milieu des côtés de la base triangulaire; car, sur celui de ces côtés pour lequel $y = -b$, l'on trouve

$$\gamma_{xy} = 0,\quad \gamma_{xz} = -\frac{3b^2 - z^2}{2b}\theta;$$

d'où $\gamma_z = \dfrac{3b^2 - z^2}{2b}\theta$, dont le maximum répond à $z = 0$; en sorte que l'équation de non-rupture (53) est

$$T = \text{ou} > \frac{3}{2}\,G\,b\,\theta,$$

d'où, en éliminant $G\theta$ avec $M_x = 0{,}6\,G\,J\theta = 0{,}6\,G\theta.\,3b^4\sqrt{3}$:

$$\text{Limite } M_x = 0{,}4\,\frac{J}{b}\,T = 1{,}2\;T\,b^3\sqrt{3} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{15}\,T\,\omega^{3/2}$$

ou les 0,8 de $\dfrac{J}{2b}\,T$ qu'on aurait par la théorie ancienne.

On voit qu'après la section circulaire, c'est la section triangulaire équilatérale qui donne les résultats les plus simples.

ment orthogonales et qu'il n'y a que de faibles glissements, en sorte que ces parties ne contribuent presque pas à la résistance [1].

CHAPITRE X.

CAS OÙ L'ÉLASTICITÉ DE GLISSEMENT N'EST PAS LA MÊME DANS LES DIRECTIONS DES DEUX AXES TRANSVERSAUX.

106. *Équations générales donnant alors le déplacement longitudinal u.* — C'est, comme il a été dit art. 46, pour fixer les idées d'une manière plus claire que nous avons supposé, dans tout ce qui précède :

$$e = f = G,$$

ou l'égalité des élasticités de glissement (art. 17) autour de l'axe de torsion ou des x.

Nous y avons aussi été déterminé par le désir de donner sous leur forme la plus simple les seules formules que l'on puisse, jusqu'à présent, appliquer à la pratique; car on n'a pas encore trouvé, par des expériences, le rapport que peuvent avoir entre eux les deux coefficients de glissement transversal e, f pour diverses matières, et il faut bien les supposer ordinairement égaux.

Mais les formules peuvent être établies avec la même facilité pour e, f inégaux.

En effet, faisons pour la symétrie

$$f = G', \quad e = G'',$$

[1] Nous avons même trouvé pour M_x la très-faible valeur $0{,}01857\ G\,J\,\theta$ quand la section se compose de deux orbes séparés, qui sont donnés par l'équation du quatrième degré de la première note de cet article en faisant $c^2 = -1/16\ b^2$, $a = -1/6$. En sorte que la résistance à la torsion, autour d'un même axe intermédiaire, de deux cylindres parallèles, liés de manière que leurs bases ovoïdes se regardent toujours par les mêmes sommets, et espacés d'environ quatre fois le diamètre de ces bases à peu près aussi hautes que larges, n'est que le 1/54 de ce que donnerait l'hypothèse ancienne de la conservation de la forme plane de leurs sections et de leur normalité à l'axe autour duquel la torsion s'effectue. Cela ne doit pas étonner si l'on considère que le glissement est nul aux points $z = 0$, $y = \pm b\sqrt{\frac{2}{3}\frac{3}{2}}$ ou à très-peu près au centre de gravité de chaque orbe. (Mars 1855.)

l'équation différentielle (108) indéfinie à satisfaire pour tous les points du prisme est

$$G' \frac{d^2u}{dy^2} + G'' \frac{d^2u}{dz^2} = 0, \tag{238}$$

et l'équation définie (107), pour les faces latérales ou pour les points du contour des sections, est

$$G'' \left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) dy - G' \left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) dz = 0. \tag{239}$$

L'on voit de suite que l'on pourra déduire toutes les solutions relatives à ce cas général de celles relatives au cas où G' et G'' disparaissent à cause de leur égalité, en faisant

$$\frac{y}{\sqrt{G'}} = y', \quad \frac{z}{\sqrt{G''}} = z'.$$

Mais cette transformation n'est même pas nécessaire pour établir toutes les formules, ainsi que nous le verrons.

Les deux lignes transversales rectangulaires y et z, suivant lesquelles (art. 16) les composantes de pression se réduisent à des expressions monômes fg_{xy}, eg_{xz}, seront toujours supposées aussi dans la direction des deux axes principaux de figure des sections.

107. *Application au prisme ou cylindre elliptique. Cas particulier où les axes sont proportionnels aux racines carrées des élasticités de glissement dans leurs sens.* — Pour le prisme elliptique, l'équation définie, au lieu de (111) de l'art. 52, sera

$$\frac{b^2}{G'} z \left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) + \frac{c^2}{G''} y \left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) = 0.$$

En y substituant la série entière (112) pour u, on aura les mêmes résultats qu'à l'art. 52, excepté que $\frac{b^2}{G'}$, $\frac{c^2}{G''}$ seront à la place de b^2, c^2. La solution est donc (form. 113)

$$u = -\frac{\frac{b^2}{G'} - \frac{c^2}{G''}}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} \theta yz. \tag{240}$$

La surface de la section gauchie est toujours un paraboloïde hyperbolique.

Les glissements sont (au lieu de 114)

$$(241)\qquad \gamma_{xy} = \frac{-2\frac{b^2}{G'}\theta z}{\frac{b^2}{G'}+\frac{c^2}{G''}},\quad \gamma_{xz} = \frac{2\frac{c^2}{G''}\theta y}{\frac{b^2}{G'}+\frac{c^2}{G''}}.$$

Par suite, le moment de torsion (105) ou (106) $\int d\omega\,(G''\gamma_{xz}y - G'\gamma_{xy}z)$ est (au lieu de 116)

$$(242)\qquad M_x = \frac{\pi b^3 c^3}{\frac{b^2}{G'}+\frac{c^2}{G''}}\theta = \frac{4\theta}{\frac{1}{G'I}+\frac{1}{G''I'}},$$

expression très-différente de celle que fournirait, en l'étendant au cas d'inégale élasticité, l'ancienne théorie qui supposait que les sections planes restent planes ou que $\gamma_{xy} = -\theta z$, $\gamma_{xz} = \theta y$, ce qui donnerait $M_x = \theta\,(G'I + G''I')$ pour un prisme à base quelconque.

Si $b = c$ ou *si la section est circulaire, les sections planes deviendront toujours des surfaces gauches.*

Mais si l'on a

$$\frac{b}{\sqrt{G'}} = \frac{c}{\sqrt{G''}},$$

c'est-à-dire, *si les axes de l'ellipse sont proportionnels aux racines carrées des coefficients d'élasticité dans leurs directions,* les sections planes resteront planes, et l'on aura, comme dans l'ancienne théorie

$$u = 0,\ \gamma_{xy} = -\theta z,\ \gamma_{xz} = \theta y,$$

d'où, comme alors $G'I = G''I'$,

$$M_x = 2G'I\theta = 2G''I'\theta.$$

108. Suite. *Condition de non-rupture pour le même prisme ellip-*

tique d'inégale élasticité. — Nous avons trouvé pour cette condition générale (art. 27, form. 52),

$$(243) \qquad 1 = \text{ou} > \left(\frac{G'\,\mathfrak{g}_{xy}}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G''\,\mathfrak{g}_{xz}}{T''}\right)^2,$$

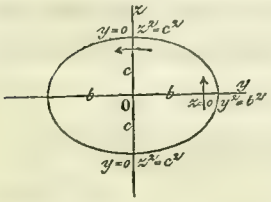
$\frac{T'}{G'}$, $\frac{T''}{G''}$ étant les limites à imposer respectivement aux glissements $\mathfrak{g}_{xy}$ et $\mathfrak{g}_{yz}$ pour qu'ils ne mettent pas la cohésion en péril.

En y mettant pour $\mathfrak{g}_{xy}$, $\mathfrak{g}_{xz}$ leurs valeurs (241), elle devient

$$\left(\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}\right)^2 = \text{ou} > 4\,\theta^2 \left(\frac{b^4 z^2}{T'^2} + \frac{c^4 y^2}{T''^2}\right).$$

Le second membre est d'autant plus grand, pour des points situés sur une même droite passant par le centre ou ayant leurs coordonnées z et y dans un rapport constant, que z^2 et y^2 sont plus considérables. Les points les plus exposés sont donc sur le contour de la section.

Et si l'on met pour z^2 sa valeur en y^2 tirée de l'équation



$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ de ce contour, on voit que ce second membre, qui prend la forme

$$4\,\theta^2 c^2 \left[\frac{b^4}{T'^2} - \left(\frac{b^2}{T'^2} - \frac{c^2}{T''^2}\right) y^2\right],$$

a sa plus grande valeur

pour $y = 0$, $z^2 = c^2$ si $\frac{b}{T'} > \frac{c}{T''}$, ou si $\frac{b}{c} > \frac{T'}{T''}$;

et pour $y^2 = b^2$, $z = 0$ si $\frac{b}{c} < \frac{T'}{T''}$.

Les *points dangereux* sont donc aux extrémités du petit axe de la base elliptique, à moins que le rapport du grand au petit axe ne soit moindre que le rapport des efforts transversaux susceptibles de désagréger la matière par glissement dans leurs sens respectifs; car, alors, les points dangereux seraient aux extrémités du grand axe.

Dans la première supposition $\frac{b}{c} > \frac{T'}{T''}$, la condition de non-rupture est

$$\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''} \text{ ou } > \frac{2\theta b^2 c}{T'},$$

ou, éliminant θ avec l'expression (242) de M_x :

$$\text{(244)} \qquad \text{lim. } M_x = \frac{\pi b c^2}{2} T' = \frac{2I}{c} T',$$

en sorte que le moment des forces qui tordent ne doit pas excéder le nombre T′ multiplié par le double du moment d'inertie autour de l'axe $2b$, divisé par la moitié de l'autre axe.

Cette condition de non-rupture est identique à celle (127) art. 63, que l'on a dans le cas d'une égale élasticité et d'une égale résistance à la rupture par glissement dans tous les sens transversaux, en mettant toutefois, au lieu de T, qui représentait le coefficient de résistance dans tous les sens, T′ qui représente maintenant la résistance dans un plan parallèle au grand axe $2b$.

109. *Modifications aux expressions générales des intégrales de l'équation indéfinie, données au chapitre VII, quand l'élasticité de glissement est inégale.* — Alors, comme l'équation à satisfaire est

$$G' \frac{d^2u}{dy^2} + G'' \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

en y mettant $A e^{qy} e^{q'z}$ pour u on a la relation $G' q^2 + G'' q'^2 = 0$, $q' = \pm q \sqrt{\frac{G'}{G''}} \sqrt{-1}$: d'où, en faisant $q \sqrt{G'} = m$, cette intégrale générale en série transcendante (au lieu de 129) :

$$\text{(245)} \qquad u = \Sigma\, e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} \left(A'_m \cos \frac{mz}{\sqrt{G''}} + A_m \sin \frac{mz}{\sqrt{G''}} \right),$$

qui prend cette forme (au lieu de 132) lorsque la section est symétrique par rapport aux deux axes des y et des z

$$\text{(246)} \qquad u = \Sigma\, A_m \left(e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{my}{\sqrt{G'}}} \right) \sin \frac{mz}{\sqrt{G''}}.$$

L'intégrale en expression polynôme entière, d'un nombre fini ou

infini de termes, obtenue (art. 66), soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit en mettant des séries entières à la place des deux fonctions arbitraires φ et ψ dans $u = \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{G'}} + \frac{z}{\sqrt{G''}}\sqrt{-1}\right) + \psi\left(\frac{y}{\sqrt{G'}} - \frac{z}{\sqrt{G''}}\sqrt{-1}\right)$ est (au lieu de 134),

$$(247)\left\{\begin{array}{l} u = a_0 + a_1\frac{y}{\sqrt{G'}} + a'_1\frac{z}{\sqrt{G''}} + a_2\left(\frac{y^2}{G'} - \frac{z^2}{G''}\right) + a'_2\cdot\frac{2yz}{\sqrt{G'G''}} + a_3\left(\frac{y^3}{\sqrt{G'^3}} - 3\frac{yz^2}{\sqrt{G'G''^2}}\right) \\ \quad + a'_3\left(3\frac{y^2z}{\sqrt{G'^2G''}} - \frac{z^3}{\sqrt{G''^3}}\right) + a_4\left(\frac{y^4}{G'^2} - 6\frac{y^2z^2}{G'G''} + \frac{z^4}{G'^2}\right) + a'_4\left(4\frac{y^3z}{\sqrt{G'^3G''}} - 4\frac{yz^3}{\sqrt{G'G''^3}}\right) + \ldots \end{array}\right.$$

identique avec celle du cas d'égale élasticité, quand on met dans celle-ci $\frac{y}{\sqrt{G'}}, \frac{z}{\sqrt{G''}}$ au lieu de y et z. Et l'on trouve, en autres coordonnées,

$$(248)\left\{\begin{array}{l} u = \Sigma\, a_n \rho^n \cos n\mathcal{E} + \Sigma\, a_{n'} \rho^{n'} \sin n'\mathcal{E}, \\ \text{où l'on a} \\ \rho = \sqrt{\frac{y^2}{G'} + \frac{z^2}{G''}},\ \mathcal{E} = \text{arc tang}\frac{z\sqrt{G'}}{y\sqrt{G''}},\ \frac{y}{\sqrt{G'}} = \rho\cos\mathcal{E},\ \frac{z}{\sqrt{G''}} = \rho\sin\mathcal{E}; \end{array}\right.$$

expression dans laquelle les exposants n et n' peuvent être négatifs ou fractionnaires sans qu'elle cesse de satisfaire à l'équation différentielle $G'\frac{d^2u}{dy^2} + G''\frac{d^2u}{dz^2} = 0$, ou à la suivante, dans laquelle celle-ci se transforme lorsqu'on passe aux nouvelles coordonnées, analogues aux coordonnées polaires du cas $G' = G''$ (note de l'art. 66)

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{d^2u}{\rho^2 d\mathcal{E}^2} + \frac{du}{\rho\, d\rho} = 0.$$

On tire de (247), au lieu des expressions (137) et (138)

$$(249)\left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dy} = \frac{1}{\sqrt{G'}}\left\{ a_1 + 2a_2\frac{y}{\sqrt{G'}} + 2a'_2\frac{z}{\sqrt{G''}} + 3a_3\left(\frac{y^2}{G'} - \frac{z^2}{G''}\right) + \ldots\ldots \right\} \\ \qquad = \frac{1}{\sqrt{G'}}\Sigma n a_n \rho^{n-1}\cos(n-1)\mathcal{E} + \frac{1}{\sqrt{G'}}\Sigma n' a_{n'}\rho^{n'-1}\sin(n'-1)\mathcal{E}. \\ \frac{du}{dz} = \frac{1}{\sqrt{G''}}\left\{ a'_1 - 2a_2\frac{z}{\sqrt{G''}} + 2a'_2\frac{y}{\sqrt{G'}} - 3a_3\frac{2yz}{\sqrt{G'G''}} + \ldots\ldots \right\} \\ \qquad = -\frac{1}{\sqrt{G''}}\Sigma n a_n \rho^{n-1}\sin(n-1)\mathcal{E} + \frac{1}{\sqrt{G''}}\Sigma n' a_{n'}\rho^{n'-1}\cos(n'-1)\mathcal{E}. \end{array}\right.$$

Et, au lieu de (140) et (139) pour le moment $\int d\omega \left[G'' \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) - G' \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) \right]$ (106 de l'art. 50),

$$(250)\ M_x = G' G'' \theta \int_0^{\omega} \rho^2 d\omega + \sqrt{G' G''} \Sigma \int d\omega \left(- n a_n \rho^n \sin n \mathcal{C} + n' a_{n'} \rho^{n'} \cos n' \mathcal{C} \right) =$$

$$= \theta \left(G' \int z^2 d\omega + G'' \int y^2 d\omega \right) - \sqrt{G' G''} \int_0^{\omega} d\omega \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} a_1 \frac{z}{\sqrt{G''}} - a_1' \frac{y}{\sqrt{G'}} + 2 a_2 \cdot \frac{2yz}{\sqrt{G'G''}} - 2 a'_2 \left(\frac{y^2}{G'} - \frac{z^2}{G''} \right) + 3 a_3 \left(3 \frac{y^2 z}{\sqrt{G'^2 G''}} - \frac{z^3}{\sqrt{G''^3}} \right) \\ - 3 a'_3 \left(\frac{y^3}{\sqrt{G'^3}} - 3 \frac{yz^2}{\sqrt{G' G''^3}} \right) + 4 a_4 \left(4 \frac{y^3 z}{\sqrt{G'^3 G''}} - 4 \frac{yz^3}{\sqrt{G' G''^3}} \right) - 4 a'_4 \left(\frac{y^4}{G'^2} - 6 \frac{y^2 z^2}{G' G''} + \frac{z^4}{G''^2} \right) + \\ + 5 a_5 \left(5 \frac{y^4 z}{G'^2 \sqrt{G''}} - 10 \frac{y^2 z^3}{G' \sqrt{G''^3}} + \frac{z^5}{\sqrt{G''^5}} \right) - 5 a'_5 \left(\frac{y^5}{\sqrt{G'^5}} - 10 \frac{y^3 z^2}{\sqrt{G'^3 G''^2}} + 5 \frac{yz^4}{G''^2 \sqrt{G'}} \right) + \ldots \end{array} \right\}$$

110. *Prisme rectangle d'inégale élasticité. — Déplacements. — — Glissements. — Moment de torsion.* — Pour avoir la valeur de u dans la torsion du prisme à base rectangle dont l'élasticité de glissement a pour coefficients G' dans le sens xy et G'' dans le sens xz, après avoir fait, comme dans le cas d'égale élasticité (art. 69)

$$u = - \theta yz + u'$$

et avoir pris pour u' l'expression (246) $\Sigma A_m \left(e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{my}{\sqrt{G'}}} \right) \sin \frac{mz}{\sqrt{G'}}$, l'on reconnaît que l'annulation de $\frac{du'}{dz}$ pour $z = \pm c$ exige $m \frac{c}{\sqrt{G'}} = \frac{2n-1}{2} \pi$, d'où (au lieu de 149)

$$u' = \Sigma A_m \left(e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} \right) \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{c},$$

les coefficients A_m devant être tels qu'en faisant (au lieu de 150)

$$A_m \cdot \frac{2n-1}{4\theta c} \pi \sqrt{\frac{G''}{G'}} \left(e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} \right) = A_n,$$

l'on ait toujours (151), entre $z = -c$ et $z = c$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{2n-1}{2c} \pi z = z ;$$

ce qui donne, au lieu de la première (156), la première des deux expressions suivantes, dont la seconde s'obtient comme la seconde (156) par un calcul inverse :

$$(251)\quad \begin{cases} u = \\ = \theta bc\left[-\dfrac{yz}{bc}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^3\dfrac{e}{b}\sqrt{\dfrac{G'}{G''}}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}\dfrac{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{y}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}-e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{y}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}}\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi\dfrac{z}{c}\right] \\ = \theta bc\left[\dfrac{yz}{bc}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^3\dfrac{b}{c}\sqrt{\dfrac{G''}{G'}}\displaystyle\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}\dfrac{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{z}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}-e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{z}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}}{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{c}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{c}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}}\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi\dfrac{y}{b}\right] \end{cases}$$

D'où, au lieu de (158) et (159)

$$(252)\quad \begin{cases} g_{xy} = \\ = -\theta c\left[2\dfrac{z}{c}-\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2\displaystyle\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\dfrac{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{y}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{y}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}}\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi\dfrac{z}{c}\right] \\ = -\theta c\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2\dfrac{Cb}{Bc}\sqrt{\dfrac{G''}{G'}}\displaystyle\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\dfrac{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{z}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}-e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{z}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}}{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{c}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{c}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}}\cos\dfrac{2n-1}{2}\pi\dfrac{y}{b}. \end{cases}$$

Et

$$(253)\quad \begin{cases} g_{xz} = \\ = \theta b.\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2\dfrac{c}{b}\sqrt{\dfrac{G'}{G''}}\displaystyle\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\dfrac{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{y}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}-e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{y}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}}}\cos\dfrac{2n-1}{2}\pi\dfrac{z}{c} \\ = \theta b\left[2\dfrac{y}{b}-\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2\displaystyle\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\dfrac{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{z}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{z}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}}{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{c}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{c}{b}\sqrt{\frac{G'}{G''}}}}\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi\dfrac{y}{b}\right]. \end{cases}$$

Et, au lieu de (161), tah désignant la tangente hyperbolique, l'on a

$$(254)\quad \begin{cases} M_x = G' b c^3 \theta \left[\frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}} \sum \frac{\text{tah.} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}{(2n-1)^5} \right] \\ \qquad = G'' b^3 c \theta \left[\frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}} \sum \frac{\text{tah.} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}}}{(2n-1)^5} \right]. \end{cases}$$

111. *Cas où $c\sqrt{G'}$ est très-petit par rapport à $b\sqrt{G''}$.* — Alors on a

$$(255)\quad u = -\theta yz,\ g_{xy} = -2\theta z,\ g_{xz} = 0,\ M_x = \frac{16}{3} G' \theta b c^3 = 4 G' \theta I,$$

expressions identiques ou analogues à celles que nous avons trouvées, art. 74, lorsque c'était simplement c qui était supposé petit par rapport à b.

Elles conviennent généralement aux prismes plats d'inégale élasticité, car il y aura rarement assez d'inégalité entre G' et G'' pour que $\frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}$ ne soit pas très-petit quand $\frac{c}{b}$ le sera.

On voit qu'alors, comme dans le cas d'égale élasticité, l'expression du moment de torsion donnée par M. Cauchy (art. 68) est exacte, et que la forme paraboloïdale assignée à la section par son analyse est conforme à la réalité.

112. *Cas où $\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G'}{G''}}$.* — L'expression (167) de u que nous avons donnée, art. 75, pour un prisme à base carrée dont l'élasticité est la même dans tous les sens transversaux, et la table numérique (même article) que nous en avons tirée pour les valeurs de ce déplacement conviennent également lorsque, sans que $G' = G''$, ni $b = c$, l'on a

$$b\sqrt{G''} = c\sqrt{G'},\quad \text{ou } \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G'}{G''}},$$

ou *lorsque les côtés du rectangle sont proportionnels aux racines carrées des coefficients d'élasticité de glissement dans leurs directions.*

Dans une pareille section rectangle, u est nul sur les deux diagonales comme sur les deux médianes, dont les points restent ainsi dans le plan primitif de la section.

L'épure et le relief déterminés art. 76 peuvent servir en réduisant l'une des dimensions dans la proportion $\frac{\sqrt{G''}}{\sqrt{G'}}$.

Dans le même cas $\frac{b}{\sqrt{G'}} = \frac{c}{\sqrt{G''}}$ l'on a (au lieu de la valeur $M_x = 0{,}843462\ \frac{8}{3} G b^4 \theta$ de l'art. 77) :

$$(256)\quad M_x = 0{,}843462 . \frac{8}{3} \sqrt{G' G''}\, b^3 c^3 \theta = 0{,}843462 . \frac{8}{3} G' b c^3 \theta .$$

La théorie ancienne donne alors $\frac{8}{3} \sqrt{G' G''}\, b^3 c^3 \theta$ (vu que $G' I = G'' I'$). La nouvelle donne donc, pour les rectangles où $\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G''}{G'}}$ comme dans le cas plus particulier des carrés où $b = c$, $G' = G''$, les 0,843462 de ce que donne l'ancienne.

Quant aux glissements dans notre cas $b\sqrt{G''} = c\sqrt{G'}$, l'on a pour $\frac{-\gamma_{xy}}{\theta c}$ et $\frac{\gamma_{xz}}{\theta b}$ les mêmes chiffres que pour les $\frac{-\gamma_{xy}}{\theta b}$ et $\frac{\gamma_{xz}}{\theta b}$ dont nous avons donné les tableaux art. 81.

Et quant au dernier tableau du même article, il fournit, pour le cas que nous examinons maintenant, au lieu des valeurs $\frac{1}{\theta b} \sqrt{\gamma^2_{xy} + \gamma^2_{xz}}$, celles de

$$(257)\quad \frac{1}{\theta} \sqrt{\frac{\gamma^2_{xy}}{c^2} + \frac{\gamma^2_{xz}}{b^2}} = \frac{1}{\theta b \sqrt{G''}} \sqrt{G' \gamma^2_{xy} + G'' \gamma^2_{xz}} .$$

Rien ne dit, sans doute, vu l'inégalité possible de $\frac{\sqrt{G'}}{T'}$, $\frac{\sqrt{G''}}{T''}$, que cette quantité soit proportionnelle à

$$\sqrt{\frac{G'}{T'^2} G' \gamma^2_{xy} + \frac{G''}{T''^2} G'' \gamma^2_{xz}} ,$$

racine carrée du second membre de l'équation générale de résistance à la rupture par torsion (52) ou (243), ou de la quantité dont la plus grande valeur caractérise le *point dangereux*.

Mais si l'on compare les nombres correspondants, proportionnels respectivement à $\gamma_{xy}\sqrt{G'}$, $\gamma_{xz}\sqrt{G''}$ qu'offrent les deux premiers tableaux numériques de l'art. 81, principalement sur la diagonale qui va du haut à gauche au bas à droite, l'on verra, quel que soit le rapport entre les deux facteurs $\frac{\sqrt{G'}}{T'}$, $\frac{\sqrt{G''}}{T''}$ par lesquels on devra multiplier ces nombres avant d'ajouter les carrés de ceux de chaque case du premier tableau avec les carrés de ceux des cases homologues du second, que la somme aura toujours sa plus grande valeur, soit à l'une, soit à l'autre des deux extrémités de cette diagonale des tableaux, c'est-à-dire aux cases relatives aux points occupant le milieu des côtés $2b$, $2c$ du rectangle.

C'est donc à l'un ou à l'autre de ces endroits, si ce n'est à tous deux, que se trouve le *point dangereux*, ce qui peut se démontrer d'une manière générale et analytique si l'on admet tout d'abord avec tout le monde *que ce point ne peut être pris que sur le contour de la section;* car γ_{xz} est nul sur les côtés $2b$, γ_{xy} sur ceux $2c$, et c'est bien à ces deux points qu'a lieu le maximum de celui de ces deux glissements qui ne s'anéantit pas (art. 81).

113. *Cas général où les côtés* $2b$, $2c$ *du rectangle d'inégale élasticité ont entre eux un rapport quelconque.* — Si l'on compare les formules (156), (158), (159), (161) qui donnent, au chapitre VIII, le déplacement u, les glissements γ_{xy} et γ_{xz}, et le moment M_x avec celles (251), (252), (253), (254) par lesquelles nous venons d'exprimer les mêmes quantités, on voit que là où les numérateurs des premières contenaient des exponentielles pouvant s'écrire $e^{\pm\frac{2n-1}{2}\pi\frac{by}{cb}}$, $e^{\pm\frac{2n-1}{2}\pi\frac{cz}{bc}}$, les secondes contiennent des exponentielles $e^{\pm\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b\sqrt{G''}y}{c\sqrt{G'}b}}$, $e^{\pm\frac{2n-1}{2}\pi\frac{c\sqrt{G'}z}{b\sqrt{G''}c}}$, et que, partout,

les rapports $\frac{b}{c}$ des premières sont remplacés dans les secondes par $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$.

En sorte que, *pour mêmes valeurs de* $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, *l'on a les mêmes valeurs de* $\frac{u}{\theta bc}$, $\frac{g_{xy}}{\theta c}$, $\frac{g_{xz}}{\theta b}$, *et de* $\frac{M_x}{G'\theta bc^3}$, $\frac{M_x}{G''\theta b^3 c}$ *lorsque l'élasticité est inégale dans les sens y et z que lorsqu'elle est égale* (ou que $G' = G'' = G$), *moyennant que, celles du cas d'égale élasticité étant relatives à diverses grandeurs du rapport* $\frac{b}{c}$ *des côtés, celles du cas d'inégale élasticité le soient aux mêmes grandeurs de* $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$, *ou du produit de ce rapport par l'inverse de la racine carrée de celui des élasticités de glissement dans leurs sens respectifs.*

D'où il suit que, sous cette seule restriction (et, aussi, en exceptant le troisième tableau de l'art. 87), les formules, tables numériques ou épures que nous avons données aux art. 84, 85, 87, 89 conviennent encore ici, $G'bc^3$, $G''b^3c$ et $\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}$ étant mis à la place de Gbc^3, Gb^3c et $\frac{b^2+c^2}{G}$ dans celles du moment de torsion.

Le point dangereux, ou pour lequel (art. 27, 108) $\left(\frac{G' g_{xy}}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''}\right)^2$ est le plus considérable, se trouve toujours sur le contour de la section, et, par conséquent, ou au milieu du côté $2b$, ou au milieu du côté $2c$, puisque c'est toujours à ces endroits que celui des deux glissements g_{xy}, g_{xz} qui n'est pas nul a sa plus grande valeur. Mais, bien que g_{xy} au milieu du grand côté $2b$ excède toujours g_{xz} au milieu du petit côté $2c$ lorsque $b\sqrt{G''} > c\sqrt{G'}$, il n'est pas impossible que le point dangereux se trouve alors au milieu de $2c$. C'est ce qui aura lieu si le rapport $\frac{G''}{T''}$ excède le rapport $\frac{G'}{T'}$ de manière à compenser l'effet de la grandeur plus considérable du glissement au milieu de $2b$.

D'ailleurs les valeurs de g_{xz} sur le petit côté sont importantes

à considérer lorsqu'il y a des dilatations longitudinales outre les glissements (voyez chap. XII).

Nous donnons donc, à la fin du Mémoire, une table générale qui servira à déterminer, pour les diverses valeurs du rapport

$$\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} :$$

1° Le moment capable d'une torsion θ,

$$(258)\quad M_x = \left(\frac{16}{3} - \lambda \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}\right) G'\theta b c^3 = \mu G'\theta b c^3 = \mu'. \frac{16\, b^2 c^3 \theta}{3\left(\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}\right)};$$

2° Les plus grands glissements $-\gamma c\theta$ et $\gamma_1 b\theta$ sur les côtés $2b$ et $2c$, en faisant

$$(259)\quad \gamma = \frac{-g_{xy}\ (\text{pour } y = 0,\ z = c)}{c\theta},\quad \gamma_1 = \frac{g_{xz}\ (\text{pour } y = b,\ z = 0)}{b\theta};$$

3° Les limites à imposer au moment M_x pour que ces glissements ne dépassent pas respectivement les valeurs $\frac{T'}{G'}$, $\frac{T''}{G''}$ en deçà desquelles ils doivent rester. Ce sont (en éliminant θ de $M_x = \mu G'\theta b c^3$, successivement au moyen de $\frac{T'}{G'} = \gamma c\theta$ et $\frac{T''}{G''} = \gamma_1 b\theta$) :

$$(260)\quad \lim M_x = \frac{\mu}{\gamma} b c^2 T',\ \text{et}\ \lim M_x = \left(\frac{\mu}{\gamma_1}\frac{c^2 G'}{b^2 G''}\right) b^2 c T''.$$

Les quotients $\frac{\mu}{\gamma}$, $\frac{\mu}{\gamma_1}\frac{c^2 G'}{b^2 G''}$ étant tout calculés à la table, on reconnaîtra facilement, dans chaque cas, quelle est celle de ces limites qu'il convient d'adopter, *et qui devra être la plus petite des deux*[1].

[1] Les nombres γ_1 et $\frac{\mu}{\gamma_1}\frac{b^2 G''}{c^2 G'}$ peuvent être considérés comme n'étant que ceux γ et $\frac{\mu}{\gamma}$ pour des valeurs de $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$ qui seraient plus petites que l'unité; et les premiers ne feraient avec ceux γ, et les seconds avec ceux $\frac{\mu}{\gamma}$, qu'une même série en renversant leur ordre et en les mettant, avec ceux-ci, en regard de valeurs de $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$ inverses de celles auxquelles ils répondent, et qu'on écrirait dans la première colonne. Aussi

4° Il y a, à cette table, une dernière partie dont nous verrons l'usage au chapitre XII, lorsqu'il sera question principalement de la *résistance à la flexion et à la torsion simultanées*. Cette partie est intitulée : *Glissements principaux en d'autres points des côtés* $2b$, $2c$ *que ceux au milieu*. Et, pour avoir ces glissements, en faisant :

$$-g_x = -g_{xy}\,(\text{pour } z=c) = \gamma' c\theta,\quad g_x = g_{xz}\,(\text{pour } y=b) = \gamma'_1 b\theta,$$

cette partie de la table donne les rapports $\frac{\gamma'}{\gamma}$, $\frac{\gamma'_1}{\gamma_1}$ des nombres γ', γ'_1 à leurs plus grandes valeurs γ, γ_1, connues par la première partie de la même table pour diverses grandeurs de $\frac{\gamma}{b}$ ou $\frac{z}{c}$, et de $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$.

Ces nombres γ' et γ'_1 ont pour valeurs, d'après la première expression (252) et la seconde (253)

$$(261)\qquad \begin{cases} \gamma' = 2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \dfrac{\operatorname{coh}\left(\frac{2n-1}{2}\pi \frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}\frac{y}{b}\right)}{(2n-1)^2 \operatorname{coh}\left(\frac{2n-1}{2}\pi \frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}\right)}, \\ \gamma'_1 = 2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \dfrac{\operatorname{coh}\left(\frac{2n-1}{2}\pi \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}\frac{z}{c}\right)}{(2n-1)^2 \operatorname{coh}\left(\frac{2n-1}{2}\pi \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}\right)}; \end{cases}$$

formules où le quotient des deux cosinus hyperboliques désignés par coh. peut être réduit à celui de leurs exponentielles à exposants positifs dès que les nombres entre parenthèses excèdent $2,5\,\pi$.

nous avons pu représenter les nombres $\frac{\mu}{\gamma_1}\frac{b^2 G''}{c^2 G'}$ par les mêmes formules empiriques que ceux $\frac{\mu}{\gamma}$ (art. 89 note), en sorte qu'on peut prendre approximativement

$$\frac{\mu}{\gamma} = \frac{8}{3\left(1+0{,}6\,\frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}\right)},\qquad \frac{\mu}{\gamma_1}\frac{b^2 G''}{c^2 G'} = \frac{8}{3\left(1+0{,}6\,\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}\right)}.$$

114. *Prismes ayant des bases autres que l'ellipse et le rectangle, et analogues à celles considérées au chapitre IX.* — Quand l'élasticité de glissement n'est pas la même dans les sens y et z, ou quand G' n'est pas égal à G'', on a, au lieu de l'équation algébrique (198) de l'art. 91, celle

$$(262)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\theta\sqrt{G'G''}}{2}\left(\frac{y^2}{G'}+\frac{z^2}{G''}\right)-a_1\frac{z}{\sqrt{G''}}+a'_1\frac{y}{\sqrt{G'}}\\ &\quad -a_2\frac{2yz}{\sqrt{G'G''}}+a'_2\left(\frac{y^2}{G'}-\frac{z^2}{G''}\right)-a_3\left(3\frac{y^2z}{\sqrt{G'^3G''}}-\frac{z^3}{\sqrt{G''^3}}\right)\\ &\quad +a'_3\left(\frac{y^3}{\sqrt{G'^3}}-3\frac{yz^2}{\sqrt{G'G''^3}}\right)-a_4\left(4\frac{y^3z}{\sqrt{G'^3G''}}-4\frac{yz^3}{\sqrt{G'G''^3}}\right)\\ &\quad +a'_4\left(\frac{y^4}{G'^2}-6\frac{y^2z^2}{G'G''}+\frac{z^4}{G''^2}\right)-\text{etc.}=\text{constante},\end{aligned}\right.$$

pour représenter les contours curvilignes d'une infinité de sections de prismes dont la torsion produira des déplacements u représentés par cette autre équation algébrique (au lieu de 197)

$$(263)\quad \left\{\begin{aligned} &u=a_0+a_1\frac{y}{\sqrt{G'}}+a'_1\frac{z}{\sqrt{G''}}+a_2\left(\frac{y^2}{G'}-\frac{z^2}{G''}\right)+a'_2\frac{2yz}{\sqrt{G'G''}}+a_3\left(\frac{y^3}{\sqrt{G'^3}}-3\frac{yz^2}{\sqrt{G'G''^3}}\right)\\ &+a'_3\left(3\frac{y^2z}{\sqrt{G'^3G''}}-\frac{z^3}{\sqrt{G''^3}}\right)+a_4\left(\frac{y^4}{G'^2}-6\frac{y^2z^2}{G'G''}+\frac{z^4}{G''^2}\right)+a'_4\left(4\frac{y^3z}{\sqrt{G'^3G''}}-4\frac{yz^3}{\sqrt{G'G''^3}}\right)+\ldots;\end{aligned}\right.$$

ce qui revient, en autres coordonnées (et même plus généralement, vu que les exposants n, n' peuvent être fractionnaires ou négatifs), à ces deux équations, remplaçant (201) et (200)

$$(264)\quad \theta\sqrt{G'G''}\frac{\rho^2}{2}-\Sigma a_n\rho^n\sin n\mathcal{E}+\Sigma a_{n'}\rho^{n'}\cos n'\mathcal{E}=\text{constante},$$

$$(265)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{et } u=\Sigma a_n\rho^n\cos n\mathcal{E}+\Sigma a_{n'}\rho^{n'}\sin n'\mathcal{E},\\ &\rho\text{ étant}=\sqrt{\frac{y^2}{G'}+\frac{z^2}{G''}},\quad \frac{y}{\sqrt{G'}}=\rho\cos\mathcal{E},\quad \frac{z}{\sqrt{G''}}=\rho\sin\mathcal{E}.\end{aligned}\right.$$

La symétrie, par rapport aux deux axes des y et des z à la fois, exige, comme à l'art. 67, que

$$a_0=0,\ a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=0,\ a_5=0\ldots..$$
$$a'_1=0\qquad a'_3=0\qquad a'_5=0,$$

en sorte qu'on a alors, en se bornant aux exposants positifs :

$$(266)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\theta\sqrt{G'G''}}{2}\left(\frac{y^2}{G'}+\frac{z^2}{G''}\right)+a'_2\left(\frac{y^2}{G'}-\frac{z^2}{G''}\right)+a'_4\left(\frac{y^4}{G'^2}-6\frac{y^2z^2}{G'G''}+\frac{z^4}{G''^2}\right)+ \\ +a'_6\left(\frac{y^6}{G'^3}-15\frac{y^4z^2}{G'^2G''}+15\frac{y^2z^4}{G'G''^2}-\frac{z^6}{G''^3}\right)+ \\ +a'_8\left(\frac{y^8}{G'^4}-28\frac{y^6z^2}{G'^3G''}+70\frac{y^4z^4}{G'^2G''^2}-28\frac{y^2z^6}{G'G''^3}+\frac{z^8}{G''^4}\right)+\ldots=\text{constante}, \end{array}\right.$$

et le déplacement longitudinal est

$$(267)\quad \left\{\begin{array}{l} u=a'_2\cdot\frac{2yz}{\sqrt{G'G''}}+a'_4\left(4\frac{y^3z}{\sqrt{G'^3G''}}-4\frac{yz^3}{\sqrt{G'G''^3}}\right)+ \\ +a'_6\left(6\frac{y^5z}{\sqrt{G'^5G''}}-20\frac{y^3z^3}{\sqrt{G'^3G''^3}}+6\frac{yz^5}{\sqrt{G'G''^5}}\right)+ \\ +a'_8\left(8\frac{y^7z}{\sqrt{G'^7G''}}-56\frac{y^5z^3}{\sqrt{G'^5G'^3}}+56\frac{y^3z^5}{\sqrt{G'^3G''^5}}-8\frac{yz^7}{\sqrt{G'G''^7}}\right)+\text{etc.} \end{array}\right.$$

L'égalité par rapport aux deux axes est impossible quand l'élasticité n'est pas la même dans leurs directions; mais si la courbe coïncide avec elle-même lorsque, après lui avoir fait faire 1/4 de révolution autour de son centre, on augmente toutes ses ordonnées z ou l'on diminue toutes ses abscisses dans le rapport $\sqrt{\frac{G'}{G''}}$ des racines carrées des élasticités, son équation ne doit pas changer lorsque l'on y remplace $\frac{y}{\sqrt{G'}}$ par $\frac{z}{\sqrt{G''}}$ et réciproquement, ce qui anéantit a'_2, a'_6, a'_{10}..... et ne laisse subsister que les termes en a'_4, a'_8, a'_{12}... comme dans les équations principalement discutées au chapitre IX. Dans le cas contraire, le contour doit être assimilé aux courbes *inégales* bien que symétriques (art. 105 et sa première note). Nous nous bornerons ici à cette indication.

115. *Normalité des sections, devenues courbes, aux arêtes vives devenues des hélices.* — Nous allons toutefois démontrer ici, d'une manière générale, et pour des cas même où les composantes tangentielles de pression ne se réduiraient pas à la forme monôme, ce que nous avons énoncé plusieurs fois (art. 68), à savoir qu'à

tous les angles saillants, même obtus, des sections, les surfaces de celles-ci se courbent nécessairement de manière à rester normales aux arêtes des prismes devenues des hélices (à pas constant ou variable), lorsqu'on suppose, comme nous l'avons toujours fait, que les pressions *extérieures* sont nulles ou normales aux faces latérales, ou, au moins, qu'elles n'ont aucune composante dans le sens x des arêtes.

En effet, supposons seulement aux composantes p_{xy}, p_{xz} une forme binôme, qui est celle qu'elles ont lorsque la section orthogonale du prisme est simplement un plan principal d'élasticité, savoir (art. 15, 16, formules 17 et 16):

$$(268) \qquad p_{xy} = f\gamma_{xy} + h'''\gamma_{zx}, \quad p_{xz} = e\gamma_{zx} + h''\gamma_{xy},$$

nous aurons, sur deux faces latérales du prisme, dont nous appellerons y', y'' les normales, faisant des angles quelconques ϵ, ϵ avec l'axe des y (première expression 21 de l'art. 16)

$$(269) \quad \begin{cases} p_{y'x} = \cos\epsilon(f\gamma_{xy} + h'''\gamma_{zx}) + \sin\epsilon(e\gamma_{zx} + h''\gamma_{xy}) \\ p_{y''x} = \cos\epsilon'(f\gamma_{xy} + h'''\gamma_{zx}) + \sin\epsilon'(e\gamma_{zx} + h''\gamma_{xy}). \end{cases}$$

Comme on a, par hypothèse, $p_{y'x} = 0$, $p_{y''x} = 0$, ces deux équations donnent, quels que soient les angles ϵ et ϵ', et quel que soit, par conséquent, celui des deux faces latérales normales à y' et y'':

$$\gamma_{xy} = 0, \ \gamma_{xz} = 0, \text{ d'où } \gamma_x = \sqrt{\gamma^2_{xy} + \gamma^2_{xz}} = 0;$$

par conséquent, il n'y a aucun glissement à l'intersection de ces faces, et elle reste normale à la section.

Cette seule connaissance permettra, dans quelques cas, de déterminer approximativement la forme courbe que la torsion du prisme fait prendre à ses sections.

CHAPITRE XI.

DE LA TORSION DES PRISMES CREUX.

116. *Prisme elliptique creux.* — Lorsqu'un cylindre dont la base est elliptique et a pour équation

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ d'où } \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

est soumis à une torsion θ, l'expression (240) du déplacement longitudinal

$$u = -\frac{\frac{b^2}{G'} - \frac{c^2}{G''}}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}}\,\theta yz, \tag{270}$$

qui satisfait comme toute autre expression Kyz à l'équation différentielle indéfinie (238) $G'\frac{d^2u}{dy^2} + G''\frac{d^2u}{dz^2} = 0$, satisfait aussi à l'équation définie (239) $G''\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right)dy - G'\left(\frac{du}{dy} - \theta z\right)dz = 0$, ou

$$G''b^2 z\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) + G'c^2 y\left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) = 0,$$

non pas seulement aux points de la surface latérale, mais aussi à tous les points de l'intérieur du prisme; car il n'est pas nécessaire de faire $z = \pm c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ ou $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ pour que cette équation se vérifie en mettant à la place de u sa valeur (270).

On voit que lorsque la pression sur la surface extérieure n'a pas de composante longitudinale, il en est de même de la pression sur toute surface cylindrique intérieure ayant une base pour laquelle on ait aussi $\frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$, *c'est-à-dire une base elliptique dont les axes aient entre eux le même rapport* $\frac{2c}{2b}$ *que ceux de la base du cylindre donné.*

Il en résulte que si ce cylindre est évidé *par un cylindre semblable* dont la base ait le même centre et la même orientation que la sienne, et s'il est soumis intérieurement comme extérieurement à la seule pression de l'atmosphère ou de tout autre fluide en repos, les déplacements longitudinaux u de ses points seront exprimés par (270) comme dans le cylindre plein.

D'où l'on déduira :

1° Que son moment de torsion M_x sera ($2b'$, $2c'$ étant les axes des bases de l'évidement) la différence de deux expressions comme celle (242) de l'art. 107, ou qu'on aura

$$(271)\qquad M_x = \left(\frac{\pi b^3 c^3}{\frac{b^2}{G'}+\frac{c^2}{G''}} - \frac{\pi b'^3 c'^3}{\frac{b'^2}{G'}+\frac{c'^2}{G''}}\right)\theta = \frac{\pi b^3 c^3}{\frac{b^2}{G'}+\frac{c^2}{G''}}\left(1-\frac{b'^4}{b^4}\right);$$

2° Que les points les plus exposés à la rupture seront, comme dans le cylindre plein, les extrémités de l'axe $2c$ si l'on a (art. 108) $\frac{b}{c} > \frac{T'}{T''}$, et que la condition de non-rupture sera toujours

$$\frac{b^2}{G'}+\frac{c^2}{G''} = \text{ou} > \frac{2\theta b^2 c}{T'},$$

équation au moyen de laquelle on éliminera θ de la formule précédente donnant M_x pour avoir la limite à imposer à la grandeur de ce moment.

On n'aurait pas ces expressions simples de u, du moment de torsion M_x et des conditions de résistance, si les axes $2b'$, $2c'$ de la base de l'évidement n'étaient pas entre eux dans le même rapport que ceux $2b$, $2c$ de la base extérieure, si, par exemple, on n'avait établi avec ceux-ci qu'une relation d'équidifférence afin de donner à la partie pleine une épaisseur constante.

Mais si cette épaisseur était peu considérable relativement aux axes des bases, on conçoit que ces expressions pourraient être adoptées par approximation.

117. *Prisme rectangulaire creux.* — Cette dernière observation est applicable aux prismes rectangulaires que l'on éviderait par d'autres prismes rectangulaires semblables ou non semblables. Les expressions (158) et (252) données art. 71 et 110 pour le glissement g_{xy} dans les cas d'égale ou d'inégale élasticité ne s'annulent, quel que soit z, que pour $y = \pm b$, et celles (159) et (253) de g_{xz} ne s'anéantissent quel que soit y que pour $z = \pm c$; en sorte que la torsion de tout prisme rectangle évidé par un second prisme rectangle donnerait lieu à d'autres expressions que celles que nous avons données pour u, et, par suite, pour le moment de torsion et les conditions de résistance; et ces expressions ne sont point connues.

Mais on peut évider un prisme rectangle par un prisme ayant une base *non rectangulaire* telle que l'expression du déplacement u soit toujours celle (251) obtenue art. 110.

En effet, si l'on substitue pour u dans l'équation définie générale (239) de l'art. 106,

$$G'' \frac{du}{dz} dy - G' \frac{du}{dy} dz + \theta (G'' y dy + G' z dz) = 0,$$

cette expression (251) relative au prisme rectangle, et qui est de la forme

$$(272) \quad u = -\theta yz + \Sigma A_m \left(e^{m \frac{y}{\sqrt{G'}}} - e^{-m \frac{y}{\sqrt{G'}}} \right) \sin \frac{mz}{\sqrt{G''}},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ étant} = \dfrac{2n-1}{2} \pi \dfrac{\sqrt{G''}}{c}, \text{ et } A_m = \theta \dfrac{bc}{2} \left(\dfrac{4}{\pi} \right)^3 \dfrac{c}{b} \sqrt{\dfrac{G'}{G''}} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3 \left(e^{m \frac{b}{\sqrt{G'}}} + e^{-m \frac{b}{\sqrt{G'}}} \right)}, \end{array} \right.$$

l'on obtient

$$(273) \quad 2\theta G' z dz + \sqrt{G' G''} \Sigma A_m \left[\left(e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{my}{\sqrt{G'}}} \right) d \left(\cos \frac{mz}{\sqrt{G''}} \right) + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{mz}{\sqrt{G''}} d \left(e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{my}{\sqrt{G'}}} \right) \right] = 0.$$

Intégrant divisant par $\theta G' c^2$ et remettant pour m et pour A_m leurs valeurs (272), l'on a cette équation où $1+K$ est la constante arbitraire :

$$(274)\quad \frac{32}{\pi^5}\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^5}\,\frac{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{y}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{y}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}+e^{-\frac{2n-1}{2}\pi\frac{b}{c}\sqrt{\frac{G''}{G'}}}}\cos\frac{2n-1}{2}\pi\frac{z}{c}=1-\frac{z^2}{c^2}+K$$

Elle représente le contour rectangle lui-même, si la constante K est nulle, car elle est satisfaite, alors, par $z=\pm c$ quel que soit y. Mais si l'on donne à K une suite de valeurs finies et positives, elle représentera en y et z une suite de courbes dans lesquelles il est facile de voir que z^2 n'atteindra pas la valeur c^2, et qui, prises pour bases de prismes évidant le prisme rectangulaire, donneront des prismes creux pour lesquels u aura la valeur (251), en sorte qu'on pourra, par les formules et les procédés des chapitres précédents, calculer le moment de torsion M_x et les conditions de résistance.

Les courbes que cette équation transcendante (274) représente sont malheureusement fort longues à tracer, parce que, pour une valeur numérique donnée de y, il faut chercher par un long tâtonnement la valeur correspondante de z. Mais, pour de faibles valeurs de la constante K, elles différeront peu du rectangle, en sorte que si l'on a un prisme creux d'une faible épaisseur, carré ou rectangle intérieurement comme extérieurement, on peut lui appliquer approximativement toutes les formules des chapitres VIII et X.

Les prismes ou cylindres intérieurs dont les bases sont ces courbes concentriques pour les points desquelles l'équation définie est satisfaite tout comme à la surface, peuvent être regardées comme ayant quelque analogie avec les surfaces isothermes de M. Lamé.

118. *Prismes creux ayant d'autres bases.* — Quant aux prismes ayant pour sections ces courbes algébriques dont l'ellipse, le

carré et divers polygones curvilignes convexes ou étoilés, le triangle rectiligne équilatéral, etc., sont des cas particuliers (chapitre IX) et dont l'équation, en coordonnées polaires est comprise sous cette forme (art. 91):

$$(275)\left\{\begin{array}{l}\theta\frac{r^2}{2}-a_1 r\sin\alpha+a' r\cos\alpha-a_2 r^2\sin 2\alpha+a'_2 r^2\cos 2\alpha-\\ \quad -a_3 r^3\sin 3\alpha+a'_3 r^3\cos 3\alpha-\ldots\ldots=\text{constante},\end{array}\right.$$

l'expression, aussi en coordonnées polaires, du déplacement

$$(276)\left\{\begin{array}{l}u=a_1 r\cos\alpha+a'_1 r\sin\alpha+a_2 r^2\cos 2\alpha+a'_2 r^2\sin 2\alpha+\\ \quad +a_3 r^3\cos 3\alpha+a'_3 r^3\sin 3\alpha+\ldots\ldots\end{array}\right.$$

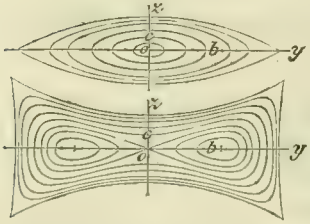
qu'éprouveront par une torsion θ les points de ces prismes, satisfera aussi bien à la condition définie relative à tous les prismes dont les bases sont représentées par des équations ayant le même premier membre que (275), *mais pour second membre d'autres constantes quelconques* (art. 92). Cela est même évident, car l'équation définie ne contient que des différentielles tirées de cette équation (275) du contour de la base, et la constante du second membre disparaît par la différentiation.

Si donc l'on compose un prisme creux dont les bases intérieure et extérieure soient deux de ces courbes dont les équations ont le même premier membre, le déplacement u produit par sa torsion aura l'expression (276) trouvée pour un prisme plein, et l'on pourra déterminer par les formules et les règles du chapitre IX son moment de torsion et les conditions de sa résistance.

Des courbes différant seulement par la constante du second membre de leurs équations de la forme (275) ne sont géométriquement *semblables* que dans le seul cas où ces équations n'ont que des termes du second degré, c'est-à-dire où les courbes sont des ellipses ayant leur centre à l'origine : car, comme les équations ont de toute manière un terme du second degré, le terme $\theta\frac{r^2}{2}$, s'il s'y trouve quelque terme d'un degré différent, l'une d'elles ne peut être rendue identique à une autre en multipliant r, dans tous ses termes, par

un même nombre, et, par conséquent, les rayons vecteurs des diverses courbes, répondant à un même angle α, ne sauraient être dans un rapport constant.

Les figures ci-contre offrent deux suites d'exemples de pareilles courbes. Celles qui enveloppent les autres sont représentées par l'équation du quatrième degré $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \text{etc.} = 1 - a$ de la première note de l'art. 105, avec $b = 4c$, et les valeurs limites positive et négative $a = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{1}{17}$ pour celle de dessus, $a = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ pour celle de dessous. Les courbes intérieures ont les mêmes équations mais avec d'autres constantes dans le second membre. Les plus petites de la figure supérieure tendent à devenir des ellipses dont les axes sont entre eux dans le rapport $\sqrt{(1-a)b^2 + ac^2}$ à $\sqrt{(1-a)c^2 + ab^2}$. La même chose aurait lieu pour celles de la figure inférieure si $\frac{b}{c}$ était au-dessous de $\sqrt{1 - \frac{1}{a}} = 1 + \sqrt{2}$; mais comme $\frac{b}{c} = 4$, les plus petites de cette deuxième figure se séparent en deux orbes. Si l'on prend l'une quelconque de ces courbes pour base intérieure d'un prisme creux dont une des courbes plus grandes est la base extérieure, le moment de torsion M_x sera donné par la différence de ceux de deux prisme pleins ayant respectivement ces bases, etc.



CHAPITRE XII.

CAS OÙ IL Y A EN MÊME TEMPS UNE TORSION, UNE FLEXION, DES DILATATIONS ET DES GLISSEMENTS LATÉRAUX. — CONDITIONS DE NON RUPTURE SOUS LEURS INFLUENCES SIMULTANÉES.

119. *Détermination des déplacements. Composition géométrique pure et simple de ceux dus à diverses sortes d'efforts.* — Nous avons, pour simplifier, supposé (art. 51) que la torsion s'effectuait sans

aucune dilatation ou contraction des prismes longitudinalement et perpendiculairement, et, aussi, sans flexion, comme sans glissement étranger.

L'analyse nous a montré qu'il suffisait, pour cela, qu'il n'y eût ni pression normale ou tangentielle sur les faces latérales, ni traction longitudinale sur les bases extrêmes, et que, sur les points de ces bases, il ne s'exerçât que des actions transversales, distribuées comme celles p_{xy}, p_{xz} dont nous avons donné les valeurs diverses depuis le chapitre V [1].

[1] Les arêtes et les fibres qui, de droites et parallèles qu'elles étaient, deviennent inclinées et hélicoïdales, éprouvent, il est vrai, un allongement par cela seul. Mais si la torsion θ, multipliée par la distance à l'axe de l'arête qui en est le plus éloignée, donne un produit *très-petit*, comme on le suppose toujours, cet allongement *est très-petit du second ordre*, en sorte qu'en ne conservant, comme on fait constamment dans la théorie des corps élastiques, que les quantités du premier ordre, on peut toujours dire que les fibres ou arêtes n'ont pas éprouvé de dilatation si l'axe n'a pas été lui-même dilaté.

Voici comment on peut, au reste, calculer à peu près l'influence du second ordre que peut avoir, sur la résistance à une torsion θ, cet allongement inégal des fibres, cause de phénomènes qui ont été l'objet d'une partie des expériences de M. Wertheim, dont une analyse a paru le 19 février 1855 aux *Comptes rendus* de l'Académie, t. XL, p. 411.

Considérons un cylindre circulaire dont le rayon est R, et l'une de ses fibres à une distance r de l'axe de torsion. Tous les éléments de cette fibre auront pris, sur l'axe, lorsqu'elle se sera courbée en hélice, une inclinaison θr, en sorte que la partie comprise entre deux sections du cylindre à l'unité de distance l'une de l'autre, aura ensuite une longueur $\sqrt{1+\theta^2 r^2}$ si ces sections n'ont pas changé de distance, et une longueur $(1-\eta)\sqrt{1+\theta^2 r^2}$ si elles se sont rapprochées d'une quantité très-petite η. Or, cette longueur, en négligeant les petites quantités d'ordre supérieur, revient à $1-\eta+\frac{\theta^2 r^2}{2}$. Donc on a, à la distance r de l'axe, la valeur suivante pour la dilatation de la fibre

$$\delta_z = \frac{\theta^2 r^2}{2} - \eta,$$

et, par conséquent, un effort de traction $E\,d\omega\left(\frac{\theta^2 r^2}{2}-\eta\right)$ si $d\omega$ est la section et E le coefficient d'élasticité d'allongement (art. 30) de la fibre supposée isolée. Le rapprochement η, si les bases peuvent l'éprouver librement, doit se déterminer par la condition que toutes ces forces se fassent équilibre dans le sens longitudinal, ou que

S'il y a, en même temps que les forces produisant la torsion, des forces capables d'étendre longitudinalement ou de contracter transversalement le prisme, et des forces tendant à le faire fléchir ou à produire d'autres effets, il sera facile de déterminer les petits déplacements produits par leur action simultanée.

On n'aura, pour cela, *qu'à composer géométriquement ensemble les déplacements dus à chaque sorte de force, ou qu'à prendre respectivement pour valeurs du déplacement* u *dans le sens* x, *du déplace-*

leur somme soit nulle : or, on peut, en prenant la somme, réunir tous les éléments $d\omega$ formant une même couronne de largeur dr, dont la surface est $2\pi r dr$; donc on doit avoir

$$\int_0^R 2\pi E.\, r dr \left(\frac{\theta^2 r^2}{2} - \eta\right) = 0. \quad \text{D'où } \eta = \frac{\theta^2 R^2}{4}.$$

Et l'effort de traction, pour toute la section annulaire $2\pi r dr$, est

$$E.\, 2\pi r dr \left(\frac{\theta^2 r^2}{2} - \frac{\theta^2 R^2}{4}\right).$$

Pour avoir la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe, il faut la multiplier par θr, cosinus de l'angle que les fibres font avec ω, et il faut encore multiplier par r pour avoir son moment autour de l'axe. Donc, le moment total de ces forces de traction légèrement obliques à l'axe est

$$\int_0^R E.\, \pi \theta^3 \left(r^5 - \frac{R^2 r^3}{2}\right) dr = \frac{E(\theta R)^2}{12} \cdot \frac{\pi R^4 \theta}{2}.$$

Si l'on tenait compte de ce que les fibres se contractent latéralement en s'allongeant on aurait une expression semblable, dans laquelle, seulement, E serait remplacé par un autre coefficient E′ qui doit en différer fort peu.

On voit que le rapport de la partie du moment des forces résistant à la torsion, due à la résistance que les fibres opposent à leur dilatation longitudinale, à la partie $GJ\theta = G\frac{\pi R^4 \theta}{2}$ due à la résistance qu'elles opposent à leur glissement mutuel (ou ce qui revient au même, art. 7, à la résistance aux dilatations et contractions qu'en résultent dans des sens à 45 degrés), a pour valeur

$$\frac{E'}{12G}(\theta R)^2.$$

Et ce rapport est complétement négligeable si le plus grand glissement θR est petit comme nous le supposons constamment dans ce Mémoire.

ment v *dans le sens* y, *du déplacement* w *dans le sens* z, *les sommes des valeurs qu'on aurait si chacune agissait seule.*

En effet, comme l'on peut toujours ramener, par la déduction d'une même translation et d'une même rotation, ainsi que nous avons dit souvent (art. 5, 8, 39, etc.), les déplacements des molécules de chaque portion du corps à être très-petits, le changement total de longueur de la ligne de jonction de deux molécules quelconques, provenant de divers déplacements de ses extrémités, est toujours sensiblement égal à la somme des changements qui seraient dus à chaque déplacement en particulier. Par conséquent, la force ou pression totale ou effective, qui est une résultante générale d'actions dirigées suivant ces lignes de jonction et proportionnelles à leurs petits changements totaux, est résultante aussi des pressions qui seraient dues à leurs changements partiels ou aux déplacements composants. — On arrive à la même conclusion en considérant la forme linéaire des expressions (15) $p_{xx} = A\frac{du}{dx} + A_1\frac{dv}{dy} + \ldots\ldots$; $p_{yy} =$ etc. des six composantes de pression en fonction des neuf coefficients différentiels des trois déplacements u, v, w, car si l'on pose $u = u' + u'' + u''' + \ldots\ldots$, $v = v' + v'' + v''' + \ldots\ldots$, $w = w' + w'' + w''' + \ldots\ldots$, et $A\frac{du'}{dx} + A_1\frac{dv'}{dy} + \ldots\ldots = p'_{xx}$, $A\frac{du''}{dx} + A_1\frac{dv''}{dy} + \ldots\ldots = p''_{xx}$, etc., l'on a évidemment $p_{xx} = p'_{xx} + p''_{xx} + \ldots\ldots$, et de même pour les autres composantes de pressions. Et réciproquement, si l'on a $p_{xx} = p'_{xx} + p''_{xx} + \ldots$, et $p'_{xx} = A\frac{du'}{dx} + \ldots$, $p''_{xx} = A\frac{du''}{dx} + \ldots$, etc. les expressions $p_{xx} = A\frac{du}{dx} + \ldots$, etc., des composantes totales de forces qui sollicitent dans chaque direction les diverses parties du corps élastique sont satisfaites par $u = u' + u'' + \ldots$, $v = v' + v'' + \ldots$, etc., ce qui est bien ce que nous avons avancé.

120. *Application aux déplacements dus à des forces produisant l'extension, la flexion et la torsion simultanées d'un prisme.* — Prenons pour exemple le prisme elliptique de l'art. 107 (cas général d'iné-

gale élasticité). Supposons-le soumis, sur ses deux bases extrêmes ω, à une pression (ou traction) normale P, la même à tous leurs points, comme au chapitre III où nous avons traité de l'extension simple (art. 29, 30); de plus, à des pressions aussi normales, mais variables et exprimées par $E\frac{z}{\rho}$, ρ étant d'abord supposé constant, comme celles capables (art. 36, form. 73) de produire la flexion circulaire dans un plan parallèle à l'un des deux axes des bases; et, aussi, à des pressions tangentielles p_{xy} p_{xz} ayant des valeurs exprimées par les formules (241) multipliées par G', G'', et capables, par conséquent, de produire une torsion θ; ces mêmes bases, ainsi que les faces latérales, pouvant être soumises à la pression atmosphérique, mais que l'on n'a pas besoin de compter en ne cherchant que les déplacements en sus de ceux qu'elle a déjà produits (art. 30).

Nous aurons ces déplacements u, v, w, en ajoutant simplement les expressions (58) de l'art. 30, relatives à l'extension simple, revenant, eu égard à (59), (60), à $u=\frac{P}{E}x, v=-\varepsilon\frac{P}{E}y, w=-\varepsilon'\frac{P}{E}z$, avec les expressions (70) de l'art. 35, $u=\frac{xz}{\rho}$, etc., relatives à un prisme fléchi circulairement, et avec les expressions (240) et (117) relatives au prisme sollicité à la torsion. On aura ainsi, en remettant (art. 106) f et e pour G' et G''

$$(277)\quad \begin{cases} u=\frac{P}{E}x+\frac{xz}{\rho}-\theta\frac{\frac{b^2}{f}-\frac{c^2}{e}}{\frac{b^2}{f}+\frac{c^2}{e}}yz, v=-\varepsilon\frac{P}{E}y-\varepsilon\frac{yz}{\rho}-\theta xz, \\ w=-\varepsilon'\frac{P}{E}z-\frac{x^2-\varepsilon y^2+\varepsilon' z^2}{2\rho}+\theta xy. \end{cases}$$

On peut vérifier, en substituant ces valeurs dans les expressions (18)

$$(278)\quad \begin{cases} p_{xx}=a\frac{du}{dx}+f'\frac{dv}{dy}+e''\frac{dw}{dz}, p_{yy}=f''\frac{du}{dx}+b\frac{dv}{dy}+d'\frac{dw}{dz}, \\ p_{zz}=e'\frac{du}{dx}+d''\frac{dv}{dy}+c\frac{dw}{dz}, p_{yz}=d\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right), \\ p_{zx}=e\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right), p_{xy}=f\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right), \end{cases}$$

qu'elles deviennent, eu égard aux valeurs (59), (60) ou (67) de E, ε, ε' ou aux relations (72) de l'art. 36

$$(279)\quad p_{xx}=P+\frac{Ez}{\rho},\quad p_{yy}=p_{zz}=0,\quad p_{yz}=0,\quad p_{zx}=\frac{2c^2\theta y}{\frac{b^2}{f}+\frac{c^2}{e}},\quad p_{xy}=\frac{-2b^2\theta z}{\frac{b^2}{f}+\frac{c^2}{e}},$$

c'est-à-dire précisément les pressions exercées sur la surface du prisme.

On prouverait, comme aux articles (30), (38), (56), que les expressions (278) de u, v, w sont les seules qui satisfassent au problème, si l'on fixe un point et deux des éléments linéaires d'une des bases pour éviter toute translation ou rotation générale.

Et, d'après ce qu'on a vu art. 40, la solution peut être étendue au cas d'une flexion inégale ou non circulaire, et de forces transversales produisant, en même temps que la flexion, des glissements autres que ceux qui constituent la torsion, en se servant alors des expressions (84) de u, v, w, au lieu de celles (70) pour les déplacements partiels provenant de la flexion.

121. *Conditions générales de non-rupture sous ces diverses actions.* — La recherche des déplacements dans le cas général de l'action simultanée de diverses sortes de forces dont on sait calculer les effets séparés, ne souffre, comme l'on voit, aucune difficulté.

Mais l'établissement des conditions de résistance à la rupture demande une attention particulière, et l'emploi du procédé analytique des art. 24 à 27.

Ce procédé consiste, avons-nous dit, à faire en sorte qu'en aucun point et dans aucun sens la dilatation ϑ n'excède une certaine limite $\delta=\frac{E}{R}$ relative à ce sens, et pouvant être numériquement différente pour les valeurs positives et pour les valeurs négatives de ϑ; ou que l'on ait, *en ne considérant, ici et dans tout ce qui suit, pour fixer les idées, que ses valeurs positives*,

$$1=\text{maximum}\,\frac{\vartheta}{\delta}=\text{maximum}\,\frac{E}{R}\vartheta;$$

et à tirer, pour cela, le rapport $\frac{\partial}{\delta}$ de l'équation suivante, (46) de l'art. 24, *qui donne sa plus grande valeur en un même point* où les dilatations et les glissements parallèles aux x, y, z et variables avec ces coordonnées, sont ∂_x, ∂_y, ∂_z, γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy}, et où δ_x, δ_y, δ_z, Γ_{yz}, Γ_{zx}, Γ_{xy} représentent les limites dans lesquelles on doit respectivement les renfermer, limites qui sont les mêmes par tout le corps vu son *homogénéité* supposée (art. 14),

$$(280)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_x}{\delta_x}\right)\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_y}{\delta_y}\right)\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_z}{\delta_z}\right)-\frac{\gamma^2_{yz}}{\Gamma^2_{yz}}\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_x}{\delta_x}\right)-\frac{\gamma^2_{zx}}{\Gamma^2_{zx}}\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_y}{\delta_y}\right) \\ \qquad -\frac{\gamma^2_{xy}}{\Gamma^2_{xy}}\left(\frac{\partial}{\delta}-\frac{\partial_z}{\delta_z}\right)-2\frac{\gamma_{yz}\gamma_{zx}\gamma_{xy}}{\Gamma_{yz}\Gamma_{zx}\Gamma_{xy}}=0; \end{array}\right.$$

puis, ensuite, à chercher le point, appelé point *dangereux* (art. 25), où le rapport $\frac{\partial}{\delta}$ ainsi déterminé a une valeur plus grande qu'en tout autre point, et *à égaler à l'unité cette plus grande valeur de* $\frac{\partial}{\delta}$.

Pour éviter de résoudre l'équation du troisième degré (280) en $\frac{\partial}{\delta}$, l'on pourrait y remplacer $\frac{\partial}{\delta}$ par l'unité, puis la différentier successivement par rapport à chacune des trois variables x, y, z et éliminer celles-ci entre les quatre équations ainsi obtenues : car les trois dernières seront la même chose que celles que l'on aurait en différentiant (280) elle-même et en faisant, *ensuite*, $\frac{d\frac{\partial}{\delta}}{dx}=0$. $\frac{d\frac{\partial}{\delta}}{dy}=0$, $\frac{d\frac{\partial}{\delta}}{dz}=0$, condition de maximum de $\frac{\partial}{\delta}$ pour les divers points du corps, puis $\frac{\partial}{\delta}=1$, condition de juste résistance.

Mais ce moyen de suppléer à la résolution de l'équation (280) sera le plus souvent en défaut; car, outre que les conditions sur lesquelles il se fonde peuvent fournir un maximum purement relatif, ou même un minimum au lieu du maximum absolu de $\frac{\partial}{\delta}$ que l'on cherche, elles donneraient des valeurs de x, y, z infinies ou hors des limites du corps lorsque le point dangereux serait sur ces

limites mêmes, c'est-à-dire sur l'une des sections extrêmes ou sur le contour d'une section. Et il y aura quelquefois, en outre, sur ce contour même continu, des causes de discontinuité dans la variation de $\frac{\partial}{\delta}$ (voyez art. 134) qui s'opposeront à la recherche purement analytique du maximum pour ses divers points.

Il faudra donc plutôt, en général, de cette équation du troisième degré tirer $\frac{\partial}{\delta}$, soit numériquement, soit trigonométriquement en choisissant bien la plus grande des trois racines, et tâtonner encore pour trouver, sur la section la plus exposée et ordinairement connue *a priori*, le point où elle a la valeur la plus grande.

122. *Conditions plus particulières et plus simples.* — Mais dans plusieurs cas, qui sont ceux que présente le plus généralement la pratique, l'équation *se réduit au second degré* et le procédé peut se simplifier beaucoup :

1° Lorsque la matière offre, en chaque point, un axe d'élasticité ou de symétrie de contexture (art. 18), supposé parallèle aux x, ce qui entraîne l'égalité des dilatations dans tous les sens perpendiculaires si le solide est prismatique et soumis, sur ses faces latérales, seulement à une pression nulle ou normale et constante, ou si, plus généralement, l'on a quel que soit ce solide

$$\delta_y = \delta_z, \quad \Gamma_{xy} = \Gamma_{xz}, \quad \partial_y = \partial_z, \quad \gamma_{yz} = 0, \tag{281}$$

l'équation générale (280) se réduit, en écrivant Γ_x au lieu de $\Gamma_{xy} = \Gamma_{xz}$, et en faisant toujours le glissement *principal* (art. 7) $\sqrt{\gamma^2_{xy} + \gamma^2_{xz}} = \gamma_x$, à

$$\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x}\right)\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y}\right) = \frac{\gamma^2_x}{\Gamma^2_x}. \tag{282}$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x} + \frac{\partial_y}{\delta_y}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x} - \frac{\partial_y}{\delta_y}\right)^2 + \frac{\gamma^2_x}{\Gamma^2_x}}. \tag{283}$$

Comme les dilatations longitudinales des corps allongés, que l'on

a à considérer le plus ordinairement, sont accompagnées de *contractions* transversales moindres, faisons (art. 24, 26, 27, 30)

$$(284)\quad \frac{-\partial_y}{\partial_x} = \varepsilon,\ \delta_x = \frac{R_x}{E_x},\ \delta_y = \frac{R_y}{E_y},\ \Gamma_x = \frac{T}{G};\ \text{et}\ \varepsilon\frac{\delta_x}{\delta_y} = \varepsilon\frac{E_y}{E_x}\frac{R_x}{R_y} = \varepsilon_1.$$

Nous aurons pour la condition de non-rupture $1 = \max \frac{\partial}{\delta}$

$$(285)\quad 1 = \text{maximum de } \frac{1-\varepsilon_1}{2}\frac{E_x\partial_x}{R_x} + \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon_1}{2}\frac{E_x\partial_x}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{G\,g_z}{T}\right)^2}.$$

L'on ne conserve que le signe supérieur du radical afin qu'elle se réduise, lorsque le glissement g_x est nul, à $1 = \text{max. de } \frac{E_x\partial_x}{R_x}$ et non à $-\varepsilon_1\frac{E_x\partial_x}{R_x} = \frac{E_y\partial_y}{R_y}$ supposé toujours plus petit.

2° Si la matière, supposée toujours homogène, n'offre pas d'axe de symétrie, mais si, outre $g_{yz} = 0$, l'on a certainement ou $g_{xz} = 0$ ou $g_{xy} = 0$ au point dangereux; ce qui arrive, par exemple, lorsque le corps est un prisme rectangle dont les faces latérales n'éprouvent que la pression d'un fluide et que la partie des glissements g_{xy}, g_{xz} due à d'autres causes que la torsion est, ou négligeable, ou également distribuée sur la section la plus exposée (voy. art. 125), de sorte que le point dangereux se trouve nécessairement sur son contour, l'on a, pour ce point

$$(286)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x}\right)\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y}\right) = \frac{g^2_{xy}}{\Gamma^2_{xy}} \text{ s'il tombe du côté où } g_{xz} \text{ est nul,} \\ \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x}\right)\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z}\right) = \frac{g^2_{xz}}{\Gamma^2_{xz}} \text{ s'il tombe du côté où } g_{xy} \text{ est nul;} \end{cases}$$

d'où l'on tire des équations de résistance de même forme que celle (285) relative au cas d'un axe d'élasticité ou de symétrie parallèle aux x. Le point dangereux sera en réalité du côté où l'on trouvera la valeur la plus considérable pour le maximum de $\frac{\partial}{\delta}$, ou pour les dimensions à donner à la section.

3° Enfin si, g_{yz} étant toujours nul, $\frac{\partial_y}{\delta_y}$ et $\frac{\partial_z}{\delta_z}$ sans être égaux,

sont *peu différents*, et si l'on se contente d'à peu près, l'on peut, en appelant $\varepsilon''_1 \frac{\partial_x}{\delta_x}$ une certaine moyenne entre ces deux rapports, remplacer dans l'équation générale (280) le produit $\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y}\right)\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z}\right)$ par le carré de $\frac{\partial}{\delta} + \varepsilon''_1 \frac{\partial_x}{\delta_x}$, et diviser tous ses termes par ce binôme, ce qui la réduira, en négligeant la somme algébrique des produits de $\frac{g^2_{xy}}{\Gamma^2_{xy}}$, $\frac{g^2_{xz}}{\Gamma^2_{xz}}$ par les deux quantités très-petites et de signe opposé dont excèdent l'unité les quotients de la division de $\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y}$ et $\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z}$ par $\frac{\partial}{\delta} + \varepsilon''_1 \frac{\partial_x}{\delta_x}$, à la forme suivante :

$$(287) \qquad \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x}\right)\left(\frac{\partial}{\delta} + \varepsilon''_1 \frac{\partial_x}{\delta_x}\right) - \frac{g^2_{xy}}{\Gamma^2_{xy}} - \frac{g^2_{xz}}{\Gamma^2_{xz}} = 0,$$

d'où l'on peut tirer encore $\frac{\partial}{\delta}$ et une équation de non-rupture.

Les équations relatives aux divers cas sont toutes comprises dans la forme générale

$$(288) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = \text{maximum de } \frac{1-\varepsilon''_1}{2}\frac{E_x \partial_x}{R_x} + \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon''_1}{2}\frac{E_x \partial_x}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{G' g_{xy}}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''}\right)^2}, \\ \text{où l'on prend } \varepsilon''_1 = \dfrac{\varepsilon_1 \left(\frac{G' g_{xy}}{T'}\right)^2 + \varepsilon'_1 \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''}\right)^2}{\left(\frac{G' g_{xy}}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''}\right)^2}; \ \varepsilon_1 \text{ étant} = \left(\frac{-\partial_y}{\partial_x}\right)\frac{E_y}{E_x}\frac{R_x}{R_y}, \text{ et } \varepsilon'_1 = \left(\frac{-\partial_z}{\partial_x}\right)\frac{E_z}{E_x}\frac{R_x}{R_z} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire dans celle qu'on tire de (287) pour le troisième cas en remplaçant les δ et Γ par des $\frac{R}{E}$, $\frac{T}{G}$. Seulement, tandis que dans ce dernier cas elle n'est qu'approchée, cette équation de non-rupture est exacte dans les autres, puisqu'elle se réduit, si $\frac{E_y}{R_y} = \frac{E_z}{R_z}$, $\frac{G'}{T'} = \frac{G'}{T''}$, à celle (285), et, si g_{xz} ou g_{xy} s'anéantit, à l'une de celles qu'on tirerait de (286). Enfin, en faisant, soit les g nuls, soit $\partial_x = 0$, elle ramène à l'équation simple (47) $R_x = \text{ou} > E\partial_x$ ou à celle (52), données au chapitre II.

Rappelons, quant à la valeur à donner aux constantes, que

l'on a (art. 30 et art. 24, 27, form. 45, 51), a, b, c, d', etc. étant les douze coefficients des formules de pressions (18) de l'art. 15, et les faces latérales étant toujours supposées n'éprouver que la pression atmosphérique qu'il ne faut point compter

$$E_y = E_x \frac{bc - d'd''}{ca - e'e''},\quad E_z = E_x \frac{bc - d'd''}{ab - f'f''},\quad \varepsilon = \frac{cf'' - d'e'}{bc - d'd''},\quad \varepsilon' = \frac{be' - f''d''}{bc - d'd''},$$

$$G' = f,\ G'' = e,\ \frac{T'}{G'} = 2\sqrt{\frac{R_x}{E_x}\cdot\frac{R_y}{E_y}},\quad \frac{T''}{G''} = 2\sqrt{\frac{R_x}{E_x}\cdot\frac{R_z}{E_z}},$$

expressions qui deviennent lorsqu'il y a isotropie :

$$(289)\quad \begin{cases} G' = G'' = G = e,\ E_y = E_z = E_x = G\dfrac{2e+3e'}{e+e'},\ \varepsilon = \varepsilon' = \dfrac{e'}{2e+2e'}, \\ \dfrac{T}{G} = 2\dfrac{R}{E};\ \text{d'où}\ \dfrac{E}{2G} = 1+\varepsilon,\ T = \dfrac{R}{1+\varepsilon} = \dfrac{2e+2e'}{2e+3e'}R. \end{cases}$$

Et si l'on admet le principe (art. 13, 19) $e = e'$

$$(290)\qquad E = \frac{5}{2}G,\ \varepsilon = \frac{1}{4},\ T = \frac{4}{5}R.$$

Ce rapport 4/5 entre T et R paraît subsister jusqu'à la *rupture immédiate*, et par conséquent au delà même du point où les formules de l'élasticité cessent d'être applicables; car, d'après les expériences de M. Gouin[1], il faut, par centimètre carré, un effort de 3,200 kilogrammes pour rompre par glissement transversal ou *cisaillement*, des tringles qui rompaient par extension sous une charge de 4,000 kilogrammes.

Quant à $\varepsilon_1 = \varepsilon\dfrac{E_y}{R_y}\dfrac{R_x}{E_x}$, $\varepsilon'_1 = \varepsilon'\dfrac{E_z}{R_z}\dfrac{R_x}{E_x}$, ils ne devront pas différer considérablement de ε et ε' si, comme nous avons dit (art. 25), les rapports $\dfrac{R_x}{E_x}$, $\dfrac{R_y}{E_y}$, $\dfrac{R_z}{E_z}$ sont peu inégaux malgré l'inégalité notable qu'il peut y avoir entre E_x et E_y ou E_z, et entre R_x et R_y ou R_z. D'après ce que nous verrons art. 128, on ne commettra jamais, sur les résultats, une erreur sensible en prenant généralement

$$(291)\qquad \varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon_1 = \varepsilon'_1 = \varepsilon''_1 = \frac{1}{4}.$$

[1] *Leçons de mécanique pratique* de M. Morin. Résist. des matériaux, 1853, p. 37.

123. *Établissement simple et direct de ces formules.* — Avant de donner leur application et la manière de les rendre usuelles, montrons comment on peut les établir directement et simplement.

Soit mn la coupe, par le plan du glissement principal g_x (art. 7), d'une portion extrêmement petite de la section ω du corps par un plan perpendiculaire aux x, supposé ramené, ainsi que le point n, à coïncider avec leurs situations primitives. La ligne matérielle d'une très-petite longueur $nr = x$ dirigée primitivement dans le sens x, et devenue nr_1, se sera allongée de $rs = r_1 t = x\,\partial_x$, et inclinée (art. 5) d'un petit angle $rnr_1 = g_x$. Si la dilatation, dans le sens transversal mn, est représentée par $-\varepsilon\partial_x$, mn s'est raccourci de $mm_1 = \varepsilon\partial_x . mn$; et une ligne oblique, telle que mr, est devenue m_1r_1.

Calculons la dilatation $\partial_r = \frac{m_1r_1 - mr}{mr}$ qu'aura éprouvée cette petite ligne mr dont nous appelons α l'angle mrn fait avec les x. En projetant

$mm_1 = mn . \varepsilon\partial_x = x \tan\alpha . \varepsilon\partial_x$ sur la ligne mr, on a $x \tan\alpha . \varepsilon\partial_x \sin\alpha$

$rs = x\partial_x$ ..... sur *idem*..... $x\partial_x \cos\alpha$

$sr_1 = x g_x$ ..... sur *idem*..... $x g_x \sin\alpha$.

Donc $m_1r_1 = mr + x(\partial_x \cos\alpha + g_x \sin\alpha - \varepsilon\partial_x \sin\alpha \tan\alpha)$.

Retranchant la longueur primitive mr et divisant par $mr = \frac{x}{\cos\alpha}$, l'on trouve pour la dilatation cherchée

$$\partial_r = \partial_x \cos^2\alpha - \varepsilon\partial_x \sin^2\alpha + g_x \sin\alpha \cos\alpha,$$

qui n'est autre chose que l'expression (5) de l'art. 6, ou (39) de l'art. 24, particularisée pour $\cos\gamma = 0$, $\partial_y = -\varepsilon\partial_x$, et $g_{zx} = 0$ d'où $g_{xy} = g_x$.

En l'écrivant :

$$\partial_r = \frac{1-\varepsilon}{2}\partial_x + \frac{1+\varepsilon}{2}\partial_x \cos 2\alpha + \frac{g_x}{2}\sin 2\alpha$$

et en la différentiant par rapport à α, l'on trouve que son maximum, pris pour la direction, a lieu quand

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{g_x}{(1+\varepsilon)\,\delta_x},$$

et a, par conséquent, la valeur

$$(292) \qquad \delta_r = \frac{1-\varepsilon}{2}\delta_x + \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\delta_x\right)^2 + \left(\frac{g_x}{2}\right)^2},$$

d'ou l'on déduit la formule (285) réduite au cas de l'isotropie, ou de $\varepsilon_1 = \varepsilon$, en égalant à l'unité le maximum de son produit par $\frac{E_x}{R_x} = \frac{1}{\delta}$ et en remplaçant, dans le second terme sous le radical, $\frac{E_x}{2R_x}$ par $\frac{G}{T}$ qui (expressions 289) lui est alors égal[1].

On obtiendrait par un raisonnement analogue les formules relatives aux cas de non-isotropie mais de g_{xz} ou g_{xy} nul; d'où l'on déduirait celle plus générale (288), en remplaçant ε et $\frac{G^2 g^2_x}{T^2}$ de telle sorte qu'elle s'applique exactement aux divers cas extrêmes, tout en conservant la même forme qui doit la rendre approximativement applicable aux cas intermédiaires.

124. *Formules de résistance rendue applicable en remplaçant les dilatations et glissements par leurs valeurs en fonction des forces extérieures agissant sur le solide.* — Soient, pour l'une ou l'autre des deux extrémités du prisme, et en sus de la pression atmosphérique qui sollicite seule la partie intermédiaire, et qu'il ne faut point compter (art. 30) :

P_x, P_y, P_z les sommes de composantes de ces forces extérieures, parallèlement à l'axe des x qui passe par les centres de gravité des sections, et parallèlement aux y et aux z dont les directions sont (comme à l'art. 42) celles de leurs *axes principaux d'inertie.*

[1] Je l'ai donnée de cette manière, en 1837, dans des leçons (lithographiées) de mécanique à l'École des ponts et chaussées, art. 26 et 27, et en 1843, aux *Comptes rendus*, 30 octobre, t. XVII, p. 947 et 948.

$M_x = M''$, $M_y = M' \cos\varphi$, $M_z = M' \sin\varphi$ leurs moments totaux, 1° autour de l'axe du prisme, et 2° 3° autour des deux axes d'inertie d'une section quelconque ω, en sorte que M′ représente le plus grand des moments des forces autour de droites menées sur ω par son centre, et φ est l'angle que fait l'axe de ce moment avec les y, ou l'angle que fait, avec xz, son plan qui est le *plan de sollicitation à la flexion* (art. 42).

$I = \int z^2\, d\omega$, $I' = \int y^2\, d\omega$ les moments d'inertie de ω autour des axes principaux parallèles aux y et aux z; I étant supposé le plus petit des deux, en sorte que le plan xz est celui de *plus facile flexion* (même art. 42).

$\mathcal{G}'_{xy}$, $\mathcal{G}'_{xz}$ les glissements $\mathcal{G}_{xy}$, $\mathcal{G}_{xz}$ qui auraient lieu en un point quelconque de la section ω par l'effet des seules composantes transversales P_y, P_z, ou si le moment $M_x = M''$, qui fait tordre, était nul.

$\mathcal{G}''_{xy}$, $\mathcal{G}''_{xz}$ ceux qui auraient lieu par l'effet de la seule torsion ou du moment $M_x = M''$, ou si l'on avait $P_y = 0$, $P_z = 0$.

D'après ce qu'on vient de voir aux art. 119 et 120, la dilatation longitudinale $\delta_x = \frac{du}{dx}$ au point de ω que l'on considère a la même valeur que si le prisme était simplement étendu et fléchi sans être tordu, et son expression est (art. 42) de la forme

$$\delta_x = \delta'_x + \frac{\cos\psi}{\rho} z + \frac{\sin\psi}{\rho} y, \tag{293}$$

la partie constante δ'_x étant ce qu'on aurait si le prisme se trouvait étendu sans être fléchi, et le reste n'étant autre chose qu'une quantité $\frac{z_1}{\rho}$ (art. 42, form. 90) proportionnelle à la distance z_1 où le point que l'on considère se trouve d'une certaine ligne qui, tracée sur la section ω par son centre, fait l'angle inconnu ψ avec l'axe d'inertie y. Mais il suffit de se rappeler, ici, que δ_x *est une fonction linéaire des coordonnées transversales* y, z, et l'on peut regarder simplement, si l'on veut, δ'_x, $\frac{\cos\psi}{\rho}$, $\frac{\sin\psi}{\rho}$ comme trois constantes inconnues à déterminer pour les éliminer.

Ces constantes se déterminent au moyen de trois des six conditions d'équilibre de la partie du prisme comprise entre la section ω et l'une de ses extrémités, en considérant que puisque les actions moléculaires s'exerçant normalement à travers chaque élément $d\omega$ ont pour somme (art. 30, 36)

$$p_{xx}\, d\omega = \mathrm{E}\,\delta_x\, d\omega,$$

et puisque, d'après les propriétés du centre de gravité et des axes d'inertie, on a

$$\int z\, d\omega = 0, \quad \int y\, d\omega = 0, \quad \int yz\, d\omega = 0,$$

l'on obtient respectivement pour l'équilibre de translation suivant x, et (comme à l'art. 42) pour l'équilibre de rotation autour de chacun de ces axes tracés parallèlement aux y et z sur les sections ω

$$(294)\quad \begin{cases} \mathrm{P}_x = \displaystyle\int_0^{\omega} \mathrm{E}\,\delta_x\, d\omega = \mathrm{E}\omega\delta'_x; & \text{d'où } \delta'_x = \dfrac{\mathrm{P}_x}{\mathrm{E}\omega} \\ \mathrm{M}_y = \displaystyle\int_0^{\omega} \mathrm{E}\,\delta_x\, z\, d\omega = \mathrm{E}\,\frac{\cos\psi}{\rho}\int z^2\, d\omega; & \text{d'où } \dfrac{\cos\psi}{\rho} = \dfrac{\mathrm{M}_y}{\mathrm{EI}} \\ \mathrm{M}_z = \displaystyle\int_0^{\omega} \mathrm{E}\,\delta_x\, y\, d\omega = \mathrm{E}\,\frac{\sin\psi}{\rho}\int y^2\, d\omega; & \text{d'où } \dfrac{\sin\psi}{\rho} = \dfrac{\mathrm{M}_z}{\mathrm{EI}'}; \end{cases}$$

et, par conséquent, en mettant dans (293)

$$(295)\quad \mathrm{E}\,\delta_x = \frac{\mathrm{P}_x}{\omega} + \frac{\mathrm{M}_y}{\mathrm{I}}\,z + \frac{\mathrm{M}_z}{\mathrm{I}'}\,y = \frac{\mathrm{P}_x}{\omega} + \mathrm{M}'\left(\frac{z\cos\varphi}{\mathrm{I}} + \frac{y\sin\varphi}{\mathrm{I}'}\right).$$

D'où, en substituant à $\mathrm{E}_x\,\delta_x$ dans l'équation générale (288) de non-rupture

$$(296)\quad \left\{ 1 = \text{ou} > \text{maximum}\ \frac{1-\varepsilon'_1}{2\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{P}_x}{\omega} + \frac{\mathrm{M}'\cos\varphi}{\mathrm{I}}\,z + \frac{\mathrm{M}'\sin\varphi}{\mathrm{I}'}\,y\right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\left[\frac{1+\varepsilon''_1}{2\mathrm{R}}\left(\frac{\mathrm{P}_x}{\omega} + \frac{\mathrm{M}'\cos\varphi}{\mathrm{I}}\,z + \frac{\mathrm{M}'\sin\varphi}{\mathrm{I}'}\,y\right)\right]^2 + \left(\frac{\mathrm{G}'\gamma'_{xy} + \mathrm{G}'\gamma''_{xy}}{\mathrm{T}'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{G}''\gamma'_{xz} + \mathrm{G}''\gamma''_{xz}}{\mathrm{T}''}\right)^2}.$$

Pour pouvoir déterminer et éliminer, de même que $\mathrm{E}\,\delta_x$, les autres forces inconnues $\mathrm{G}'\gamma'_{xy}$, $\mathrm{G}'\gamma''_{xy}$, $\mathrm{G}''\gamma'_{xz}$, $\mathrm{G}''\gamma''_{xz}$ au moyen

des trois équations suivantes qui, avec (294), complètent les six conditions d'équilibre de translation et de rotation :

$$(297)\quad \begin{cases} P_y = G' \int_0^\omega \gamma'_{zy}\, d\omega, \quad P_z = G'' \int_0^\omega \gamma'_{xz}\, d\omega, \\ M_x = G'' \int_0^\omega \gamma''_{xz}\, y\, d\omega - G' \int_0^\omega \gamma''_{xy}\, z\, d\omega, \end{cases}$$

il faut connaître le mode de distribution des glissements sur les diverses parties de la section ω.

Or, cette distribution est fournie pour diverses sortes de section, à l'égard de ceux γ''_{xy}, γ''_{xz} provenant de la torsion, par les formules (114), (158 et 159), (227 et 228), (241), (253) des chapitres précédents, formules qui donnent même ces glissements tout exprimés en fonction des coordonnées, en puisant la torsion θ qui y entre dans celles (116), (161), (230), (242), (254) que nous avons données pour le moment de torsion M_x.

A l'égard de γ'_{xy}, γ'_{xz} ou des parties des glissements provenant des forces transversales qui produisent en même temps la *flexion inégale*, nous avons dit (fin de l'art. 40) que l'on peut prendre approximativement pour $p_{xz} = G'' \gamma'_{xz}$, $p_{xy} = G' \gamma'_{xy}$, dans un prisme à section rectangle, les expressions (86) moins les termes affectés de $\frac{\varepsilon e}{E}$, c'est-à-dire $-\frac{3P}{2\omega}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$ pour p_{xz} et zéro pour p_{xy}[1], si la force $-P$ qui les engendre est parallèle aux z. En sorte que, comme nous supposons des forces dans les deux sens y et z, nous devons prendre si la section est un rectangle $2b.\ 2c$

$$(298)\quad G'\gamma'_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P_y}{\omega}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad G''\gamma'_{xz} = \frac{3}{2}\frac{P_z}{\omega}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Si la section est un cercle de rayon r, et si $e = f = G' = G'' = G = \frac{2}{5}E$, $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{4}$, nous pouvons tirer de même, mais sans

[1] C'est ce qu'on trouve également au moyen des expressions exactes en série trigonométrique, obtenues au Mémoire cité en note, art. 40, en effaçant toujours les termes en $\frac{\varepsilon e}{E}$, peu influents lorsque $c > b$, et dont nous tiendrons compte au reste dans les tables numériques de l'art. 136.

suppression, des expressions exactes (85) relatives à une section elliptique

$$(299)\quad {}_G\gamma'_{xy} = \frac{7}{5}\frac{P_y}{\omega}\left(1-\frac{y^2}{r^2}-\frac{z^2}{7r^2}\right)-\frac{6}{5}\frac{P_z}{\omega}\frac{yz}{r^2},\qquad {}_G\gamma'_{xz} = \frac{7}{5}\frac{P_z}{\omega}\left(1-\frac{z^2}{r^2}-\frac{y^2}{7r^2}\right)-\frac{6}{5}\frac{P_y}{\omega}\frac{yz}{r^2}.$$

125. *Modifications, quant aux glissements, pour certaines sections dont la situation est exceptionnelle.* — Ces expressions (298), (299) de $G'\gamma'_{xy}$, $G''\gamma'_{xz}$, et celles des chapitres précédents que nous invoquons pour avoir $G'\gamma''_{xy}$, $G''\gamma''_{xz}$, supposent que les sections du prisme primitivement planes peuvent librement se courber, ou prendre à la fois les gauchissements (art. 57, 76, 84, 102) que tend à leur donner une torsion, et l'inflexion en doucine (art. 44) que tend à leur donner un glissement dû à une action transversale.

Or, il peut y avoir quelques sections obligées de rester planes. Telles sont celles qui sont soumises à ce que M. Vicat appelle un *encastrement complet*, c'est-à-dire qui ne sont pas seulement contenues, mais *scellées* ou *soudées* avec une matière plus rigide; ou bien celles qui se trouvent serrées et sollicitées latéralement *dans leur plan même* par des forces tendant à trancher, comme il arrive aux sections des rivets dans le plan de contact des tôles qu'ils assemblent, ou aux bases des prismes tordus *de longueur nulle* comme dit le même illustre ingénieur.

Et il y a, ainsi que l'a remarqué encore M. Vicat[1], certaines autres sections qui, sollicitées à s'infléchir par des forces agissant à distance, mais symétriquement et dans deux sens opposés, ne prendront évidemment aucune inflexion tout en pouvant très-bien prendre le gauchissement dû à une torsion qui aurait lieu simultanément : telle est la section milieu d'un prisme soutenu à ses extrémités, et sur lequel agit, aussi au milieu, une force perpendiculaire à sa longueur. Et réciproquement certaines sections, sollicitées symétriquement à prendre par torsion deux gauchissements contraires, n'en prendront aucun tout en pouvant prendre l'inflexion due à des actions transversales : telle serait une section

[1] Voyez *Annales des ponts et chaussées*, 1833, 2e semestre, p. 243, 232, 247.

qui, sans être serrée ni scellée, se trouverait assujettie de manière à ne pouvoir tourner sur elle-même, tandis que le reste du prisme serait tordu, de part et d'autre, également et dans des sens différents.

Pour ces sections non infléchies ou non gauchies, l'on évalue facilement les deux espèces de glissement en considérant que les *fibres* qui leur étaient perpendiculaires devant rester contiguës, l'on peut approximativement supposer que, sous l'action d'une force transversale elles s'inclinent toutes également sur le plan des sections, et que, par une torsion, elles prennent des inclinaisons proportionnelles à leurs distances au centre, comme des hélices de même pas. Il faut, alors, supposer les g constants dans les deux premières équations (297), ce qui donne :

$$(300) \qquad G' g'_{xy} = \frac{P_y}{\omega}, \quad G'' g'_{xz} = \frac{P_z}{\omega},$$

et faire simplement, dans la troisième, $g''_{xy} = -\theta z$, $g''_{xz} = \theta y$ (art. 47), d'où $M_x = \theta (G' \int z^2 d\omega + G'' \int y^2 d\omega)$, et, par conséquent :

$$(301) \quad \begin{cases} G' g''_{xy} = \dfrac{-G' M_x}{G' I + G'' I'} z, \quad G'' g''_{xz} = \dfrac{G'' M_x}{G' I + G'' I'} y, \\ \text{ou } G' g''_{xy} = \dfrac{-M_x z}{J} \text{ et } G'' g''_{xz} = \dfrac{M_x y}{J} \text{ quand } G' = G''. \end{cases}$$

Mais il ne faut pas oublier que ces expressions (300) et (301) ne sont relatives qu'à des sections dans une situation exceptionnelle; *sections qu'il n'est pas besoin de considérer lorsqu'il ne s'agit que d'exprimer les conditions de résistance à la rupture par torsion seule,* car, lorsqu'il n'y a que torsion, ce n'est jamais sur des sections restant planes qu'a lieu le plus grand glissement et le plus grand danger de désagrégation, comme le prouvent toutes nos formules des chapitres précédents comparées à celles (301), qui sont précisément celles résultant de la théorie ancienne de la torsion.

Et, dans le cas de flexion et torsion ou glissements simultanés,

où il faudra considérer ces sections exceptionnelles, et où le calcul montrera, *quelquefois*, qu'elles exigent des dimensions un peu plus fortes que les autres, il conviendra de les renforcer simplement en faisant un raccordement de peu de longueur avec le reste moins large et moins épais de la pièce, à moins, toutefois, que cette pièce ne soit très-courte comme dans le cas que nous considérons à l'art. 127.

126. *Première application. Prisme sollicité simultanément à la flexion et au glissement transversal. — Cas où la section la plus exposée peut s'infléchir.* — Nous avons vu (art. 40, 42, 44) que lorsqu'un prisme fléchi ne l'est pas d'une manière égale ou *en arc de cercle*, lorsque, par exemple, étant encastré à un bout, il est sollicité à l'autre perpendiculairement, il s'y produit des glissements transversaux en même temps qu'une flexion.

Comme ces glissements sont les mêmes sur toutes les sections, c'est sur celle d'encastrement, où le moment de flexion est le plus considérable, que se trouve le point dangereux.

Si le prisme n'est pas assez fortement serré par les parois de l'encastrement (art. précédent) pour que cette section soit empêchée de prendre, comme les autres, l'inflexion en doucine (art. 44) les glissements y seront représentés par les expressions (298), (299).

Supposons donc que la base soit rectangulaire $= 2b \times 2c$;

Que la longueur du prisme soit a;

Et que la force qui le sollicite au bout, parallèlement à z ou à $2c$, soit P. Il faudra faire dans l'équation générale de résistance (296), en se contentant (art. 124) d'une approximation,

$$G''\mathcal{J}'_{xz} = \frac{3}{2}\frac{P}{\omega}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),\quad \mathcal{J}'_{xy} = 0,\quad \mathcal{J}''_{xy} = \mathcal{J}''_{xz} = 0,$$

$$P_x = 0,\ P_y = 0,\ P_z = P,\ \varphi = 0,\ M' = Pa,\ \varepsilon''_1 = \varepsilon,$$

ce qui donnera

$$(302)\quad 1 = \max.\ \frac{1-\varepsilon}{2R}\frac{Paz}{I} + \frac{1+\varepsilon}{2R}\sqrt{\left(\frac{Paz}{I}\right)^2 + \left[\frac{3}{\omega}\frac{P}{(1+\varepsilon)}\frac{R}{T'}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\right]^2},$$

ou en admettant, comme lorsqu'il y a isotropie (fin de l'art. 122) $T'' = \frac{R}{1+\varepsilon}$ et $\varepsilon = 1/4$, et remarquant que $I = \frac{\omega c^2}{3}$

$$(303) \qquad 1 = \max. \frac{3\,P\,a}{R\,\omega\,c}\left[\frac{3}{8}\frac{z}{c} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{z^2}{c^2} + \left(\frac{c}{a}\right)^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2}\right].$$

Le point dangereux répond à la valeur de $\frac{z}{c}$ qui rend un maximum la quantité entre crochets. Or :

POUR..... $\frac{z}{c} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Quand	La quantité entre crochets (303) a pour valeurs										
$\frac{2c}{a} = 3$	0,9375	0,968	0,984	0,986	0,976	0,957	0,933	0,911	0,903	0,928	1,000
3,2	1,000	1,029	1,043	1,038	1,026	1,000	0,950	0,934	0,916	0,931	1,000
4	1,250	1,277	1,281	1,265	1,229	1,176	1,109	1,036	0,973	0,948	1,000
5	1,5625	1,586	1,580	1,547	1,486	1,401	1,293	1,172	1,052	0,974	1,000
6	1,875	1,895	1,879	1,829	1,745	1,635	1,482	1,314	1,140	1,003	1,000

Et l'on aurait les mêmes chiffres avec des valeurs négatives de z/c en donnant alors le signe — au radical, si l'on prenait toujours $R = T''(1+\varepsilon)$ avec les *contractions* comme avec les dilatations.

L'on voit que jusqu'au rapport $\frac{2c}{a} = 3{,}05$ environ entre l'épaisseur $2c$ et la longueur ou saillie a du prisme, le maximum répond à $\frac{z}{c} = 1$, ou que le point dangereux se trouve sur la face $z = c$, *c'est-à-dire précisément là où le glissement est nul*, en sorte que les inclinaisons des fibres sur les sections ne font courir aucun danger, et la résistance du prisme peut être calculée *comme s'il n'était que fléchi.*

Au delà, ou pour $\frac{2c}{a}$ plus grand que 3,05 le maximum passe brusquement des points $z/c = 1$ aux points pour lesquels $z/c = 0{,}2$ environ, et se rapproche de plus en plus de ceux $z = 0$, en sorte que la plus grande valeur du second membre de (303)

diffère extrêmement peu de la valeur relative à ces derniers points qui sont ceux de la *ligne des fibres invariables*, où la flexion ne produit aucun effet.

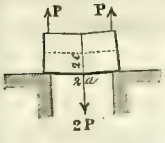
On voit même que pour un rapport $\frac{2c}{a} = 3{,}2$ entre l'épaisseur et la saillie, tous les points de la section éprouvent à peu près le même danger de rompre, et la résistance peut être calculée indifféremment à la rupture par flexion et à la rupture par glissement transversal. Au delà, par exemple pour $\frac{2c}{a} = 4$, la quote-part de la flexion dans le péril devient à peu près nulle, et la résistance peut être calculée comme si le prisme n'était sollicité qu'au glissement de ses sections l'une devant l'autre, ou (art. 28) de ses fibres l'une contre l'autre.

Des conclusions analogues peuvent être tirées d'une formule comme celle (303), dressée avec les expressions exactes (299) relatives au cylindre circulaire pour $P_y = 0$, $P_z = P$; car le calcul numérique prouve que le point de maximum, qui répond toujours à $y = 0$, descend subitement, vers $\frac{2r}{\pi} = 4{,}3$, de la situation $z = r$ à celle $z = 0{,}2\,r$ environ.

Nous pouvons généraliser, et établir que pour un prisme court à base symétrique quelconque *dont la section la plus exposée est assez peu serrée pour rester libre de s'infléchir*, l'on peut calculer la résistance successivement comme s'il n'était sollicité qu'à la flexion et comme s'il n'était sollicité qu'au glissement transversal avec libre *inflexion*, et prendre, pour les dimensions transversales à lui donner, le plus fort des résultats de ce double calcul, dont nous récapitulerons avec détail les éléments à l'art. 136, expressions (e'') à (e_1^{IV}) et (d_1) à (d_1^{VII}) en donnant, pour pratiquer la deuxième partie lorsque la section est rectangulaire ou elliptique, des tables (d_1^{VIII}) fondées sur des expressions exactes des glissements.

127. *Même prisme, cas où la section la plus exposée est astreinte à rester plane. — Cas où il y a incertitude.* — Il en est tout autre-

ment dans le cas où la section la plus exposée ne s'infléchit pas (art. 125), par exemple lorsque, comme nous supposons ici, un prisme posé sur deux appuis est sollicité par une force 2P dans le plan de sa section du milieu, qui restera nécessairement plane, n'ayant aucune raison de s'infléchir plutôt d'un côté que de l'autre,



et qui remplacera la section d'encastrement complet ou le bout soudé si l'on considère ce prisme d'une longueur $2a$ comme composé de deux autres d'une longueur a, sollicités chacun, à l'autre bout, par la réaction P d'un des appuis.

Alors il faut faire, *quelle que soit la forme de la section* (formules 300),

$$(304) \qquad G'\gamma'_{xy} = \frac{P_y}{\omega}, \quad G''\gamma'_{xz} = \frac{P_z}{\omega}.$$

Comme ces quantités sont constantes, *le point dangereux se détermine alors comme s'il n'y avait que flexion*, ou par la condition (art. 124 et 42, form. 93) que $\frac{\cos\varphi}{I} z + \frac{\sin\varphi}{I'} y$ soit le plus grand possible, ce qui a lieu nécessairement à l'un des points du contour de la section. L'équation générale (296) de non-rupture, en supposant le prisme sollicité dans le sens z de manière que $\varphi = 0$, $\gamma'_{xy} = 0$, et en appelant z' la plus grande valeur de l'ordonnée z de ce contour, se réduit à :

$$(305) \qquad 1 = \frac{1-\varepsilon''_1}{2}\frac{M'z'}{RI} + \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon''_1}{2}\frac{M'z'}{RI}\right)^2 + \left(\frac{P_z}{T''\omega}\right)^2},$$

ou, en nous bornant encore ici au prisme rectangulaire et faisant $\omega = 4bc$, $I = \frac{4}{3}bc^3$, $P_z = P$, $M' = Pa$, $\varepsilon''_1 = \frac{1}{4}$, $z' = c$

$$(306) \qquad 1 = \frac{3}{8}\frac{3Pa}{4Rbc^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{3Pa}{4Rbc^2}\right)^2 + \left(\frac{P}{4T''bc}\right)^2}.$$

Appelons b', c' les valeurs qui seraient à donner aux demi-dimensions b, c du prisme s'il n'était sollicité à rompre que par flexion, ou soumis à l'action d'un couple dont le moment fût Pa;

Et b'', c'' celles qu'il faudrait donner s'il n'était sollicité à rompre que par le glissement transversal produit par la force P agissant sans bras de levier, ou *dans le plan même de la section dangereuse.*

On aura, pour en faire le calcul préalable, ces deux équations faciles à poser directement et qui peuvent se déduire aussi de celle (306) qu'on vient d'écrire, savoir, la première en supposant $P = 0$ mais le moment Pa fini, et la seconde en faisant $a = 0$:

$$(307) \qquad 1 = \frac{3Pa}{4Rb'c'^2}, \quad 1 = \frac{P}{4T''b''c''}.$$

Tirant, de là, $\frac{3Pa}{4R}$ et $\frac{P}{4T''}$ pour les substituer dans l'équation de juste résistance (306), l'on a cette relation très-simple entre les dimensions à donner au prisme sollicité à la fois à la flexion et au glissement, et celles qu'on lui donnerait s'il ne l'était que de l'une ou de l'autre manière :

$$(308) \qquad 1 = \frac{3}{8}\frac{b'c'^2}{bc^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{b'c'^2}{bc^2}\right)^2 + \left(\frac{b''c''}{bc}\right)^2}.$$

Elle doit servir à déterminer l'une des deux dimensions b, c, si l'on se donne l'autre arbitrairement.

Supposons d'abord qu'on se soit donné la demi-épaisseur $c = c' = c''$, il en résultera immédiatement pour la demi-largeur :

$$(309) \qquad b = \frac{3}{8}b' + \sqrt{\left(\frac{5}{8}b'\right)^2 + b''^2},$$

d'où l'on déduit les valeurs suivantes de $\frac{b}{b'}$ ou $\frac{b}{b''}$ dans les diverses hypothèses sur le rapport trouvé entre la largeur $2b''$ qui serait à donner pour le glissement seul et la largeur $2b'$ pour la flexion seule, ou bien sur le rapport $\frac{2c}{2a}$ entre l'épaisseur et la longueur du prisme $\left(\text{rapport égal a } \frac{3T''}{R}\frac{b''}{b'} \text{ d'après les équations (307), ou à } \frac{12}{5}\frac{b''}{b'} \text{ si l'on a, expression 290, } \frac{T''}{R} = \frac{4}{5}\right)$:

Pour $\frac{b''}{b'}=$						Et pour $\frac{b'}{b''}=$					
0	1/4	1/3	1/2	$\sqrt{1/2}=0,707$	1	1	$\sqrt{1/2}=0,707$	1/2	1/3	1/4	0
On a $\frac{b}{b'}=$						Et $\frac{b}{b''}=$					
1,000	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1,000
Et l'on a $\frac{2c}{2a}=$											
0	3/5	4/5	6/5	1,697	2,4	2,4	3,394	4,8	7,2	9,6	∞

Supposons en second lieu qu'on se soit donné la demi-largeur $b=b'=b''$: la relation (308) fournit

$$(310) \qquad c^2=\frac{3}{8}c'^2+\frac{1}{2}c''^2+\sqrt{\left(\frac{3}{8}c'^2+\frac{1}{2}c''^2\right)^2+\left(\frac{c'^2}{2}\right)^2}.$$

D'où l'on déduit que

Pour $\frac{c''^2}{c'^2}=$							Et pour $\frac{c'^2}{c''^2}=$						
0	1/8	1/4	1/2	2/3	3/4	1	1	3/4	2/3	1/2	1/4	1/8	0
L'on a $\frac{c^2}{c'^2}=$							Et $\frac{c^2}{c''^2}=$						
1,000	1,102	1,207	1,425	1,575	1,651	1,883	1,883	1,645	1,571	1,419	1,201	1,097	1,000

On reconnaît par ces deux tableaux que celui des deux effets, de flexion ou de glissement, qui a le moins d'influence dans chaque cas, n'est nullement négligeable vis-à-vis de l'autre : car sa part d'influence sur la grandeur de b ou de c^2 se mesure par tout ce dont les nombres $\frac{b}{b'}$, $\frac{b}{b''}$, $\frac{c^2}{c'^2}$, $\frac{c^2}{c''^2}$ des tableaux excèdent l'unité. *On ne peut donc pas adopter pour la dimension cherchée la plus grande de celles qui résulteraient, ou de la flexion seule, ou du glissement seul,* comme lorsque le glissement sur la section la plus exposée

s'effectue de la manière supposée à l'article précédent, ou que cette section peut s'infléchir librement.

On voit aussi, par les valeurs de $\frac{b}{b'}$, $\frac{b}{b''}$, que le glissement commence à influer sensiblement depuis $\frac{2c}{2a} = \frac{1}{2}$, que la flexion influe jusqu'à $\frac{2c}{2a} = 10$; autant, toutefois, qu'on peut regarder les formules de flexion comme applicables jusqu'à un pareil rapport entre l'épaisseur et la longueur[1].

Lorsqu'il y a incertitude si la section où le moment de flexion M′ est le plus considérable peut ou ne peut pas s'infléchir, il faut choisir la plus forte des dimensions données par la formule (305) de flexion et glissement simultanés qui abstrait la courbure de cette section la plus exposée, et par les formules et tables de

[1] Navier, dans la deuxième édition (1833) de ses Leçons de mécanique à l'École des ponts et chaussées (p. 98, art. 154), et sans doute pour répondre à l'accusation portée contre la théorie de la résistance des solides par M. Vicat, de ne pouvoir tenir compte de la force qu'il appelle *transverse*, a construit la formule suivante, satisfaisant comme celle (306) ou (308) aux deux cas extrêmes, mais en ne la donnant que comme à peu près empirique pour les cas intermédiaires :

$$P = \frac{4\,b\,c}{\sqrt{\frac{1}{T^2} + \frac{9\,a^2}{R^2\,c^2}}}, \text{ revenant à } 1 = \sqrt{\left(\frac{P\,ac}{RI}\right)^2 + \left(\frac{P}{T\omega}\right)^2} \text{ ou } 1 = \sqrt{\left(\frac{b'c'^2}{bc^2}\right)^2 + \left(\frac{b''c''}{bc}\right)^2}.$$

Elle fournit $b = \sqrt{b'^2 + b''^2}$ quand on se donne $c = c' = c''$, d'où l'on déduit que

Pour $\frac{b'}{b}$ =	0	1/4	1/3	1/2	$\sqrt{1/2}$	1
L'on aurait $\frac{b}{b'}$ =	1	1,031	1,054	1,118	1,225	1,414

Et pour $\frac{b'}{b''}$ =	1	$\sqrt{1/2}$	1/2	1/3	1/4	0
Et $\frac{b}{b''}$ =	1,414	1,225	1,118	1,054	1,031	1

En sorte qu'elle donne des rapports trop faibles, ou moins de sécurité que notre formule (306) ou (308), basée sur le principe (art 14, 21) de la limitation des plus grandes dilatations obliques résultant des efforts combinés.

glissement seul (d_1) à (d_1^{VIII}) dont on parle à la fin de l'article précédent, formules qui supposent l'existence de cette même courbure et qui donnent, au centre de la section, un glissement maximum $1^{fois},3$ à $1^{fois},5$ plus grand que lorsqu'elle reste plane et que le glissement est le même à tous les points.

128. *Cylindre à base circulaire, sollicité à la fois à la flexion, à la torsion et à l'extension.* — Nous supposons que sa matière a un axe de symétrie parallèle à ses arêtes, ou aux x, ou une égale contexture dans les divers sens transversaux. Nous prenons l'axe des z parallèle au plan du moment de flexion; et, d'après ce que nous avons vu art. 126, nous négligeons l'influence des glissements transversaux ne venant pas de la torsion, influence qui, pour les sections pouvant s'infléchir, reste ordinairement nulle jusqu'à ce qu'elle devienne dominante, ce qui n'arrive que pour les prismes extrêmement courts.

Il faut, dans la formule générale de résistance (296), faire

$$\omega = \pi r^2,\ I = \frac{\pi r^4}{4},\ \varphi = 0,\ \gamma'_{xy} = 0,\ \gamma'_{xz} = 0,\ G' = G'' = G,\ T' = T'' = T.$$

Et comme nous savons (art. 57) que la torsion ne *gauchit* pas les sections circulaires, on a, d'après les formules (301) ci-dessus comme d'après celles (120) données au chap. VI, vu que $2J = \pi r^4$

$$G\sqrt{\gamma''^2_{xy} + \gamma''^2_{xz}} = \frac{2M''}{\pi r^4}\sqrt{y^2 + z^2},$$

d'où (form. 296), la plus grande valeur de z et de $\sqrt{y^2+z^2}$ étant r,

$$(311)\quad 1 = \frac{1-\varepsilon_1}{2R}\left(\frac{P_x}{\pi r^2} + \frac{4M'}{\pi r^3}\right) + \sqrt{\left[\frac{1+\varepsilon_1}{2R}\left(\frac{P_x}{\pi r^2} + \frac{4M'}{\pi r^3}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{T}\frac{2M''}{\pi r^3}\right)^2};$$

équation qu'on peut écrire

$$(312)\quad (R\pi r^3 - P_x r - 4M')(R\pi r^3 + \varepsilon_1 P_x r + 4\varepsilon_1 M') = 4\left(\frac{R}{T}\right)^2 M''^2,$$

et qui fournira la valeur à donner au rayon r du cylindre pour le rendre capable de résister simultanément : 1° à la flexion due

au couple M′; 2° à la torsion due au couple M″; 3° à l'extension due à la force longitudinale P_x.

Appelons r', r'', r''' les valeurs qu'il faudrait lui donner respectivement si le prisme n'était sollicité qu'à fléchir, qu'à tordre, qu'à s'étendre : on pourra les déterminer préalablement et facilement par ces trois équations

$$(313) \qquad 1 = \frac{1}{R}\frac{4M'}{\pi r'^3}, \quad 1 = \frac{1}{T}\frac{2M''}{\pi r''^3}, \quad 1 = \frac{1}{R}\frac{P_x}{\pi r'''^2}$$

susceptibles d'être posées directement sans particulariser celle (311), et au moyen desquelles elle devient

$$(314) \quad 1 = \frac{1-\varepsilon_1}{2}\left(\frac{r'''^2}{r^2}+\frac{r'^3}{r^3}\right)+\sqrt{\left[\frac{1+\varepsilon_1}{2}\left(\frac{r'''^2}{r^2}+\frac{r'^3}{r^3}\right)\right]^2+\left(\frac{r''^3}{r^2}\right)^2},$$

ou

$$(315) \qquad (r^3 - r'''^2 r - r'^3)(r^3 + \varepsilon_1 r'''^2 r + \varepsilon_1 r'^3) = r''^6.$$

Sous cette dernière forme surtout elle se résoudra facilement par rapport à r, au moyen d'un tâtonnement numérique.

Ordinairement les termes en P_x ou en r'''^3, qui viennent de l'extension longitudinale, sont nuls ou très-faibles. Si on les efface, et si l'on admet la relation (289) $\frac{R}{1+\varepsilon_1} = T$ l'on a, en appelant M le *moment résultant* ou *principal* $\sqrt{M'^2+M''^2}$ des forces :

$$(316) \qquad R\frac{\pi r^3}{4} = \frac{1-\varepsilon_1}{2}M' + \frac{1+\varepsilon_1}{2}M.$$

Malgré l'extrême simplicité de cette expression[1], l'on se fera une idée plus nette des effets de la simultanéité de la flexion et de la torsion en se servant de celle (314) qui se réduit, en effaçant r'''^3, à

$$(317) \qquad r^3 = \frac{1-\varepsilon_1}{2}r'^3 + \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon_1}{2}r'^3\right)^2+(r''^3)^2},$$

et en jetant les yeux sur le tableau suivant des valeurs du rapport

[1] Je l'ai donnée aux *Comptes rendus*, 30 octobre 1843, t. XVIII, p. 948.

du cube cherché r^3 à ceux préalablement calculés r'^3 et r''^3, pour différentes valeurs attribuées au nombre $\varepsilon_1 = \frac{-\partial_y}{\partial_x}\frac{E_y}{R_y}\frac{R_x}{E_x}$ (art. 122):

	Pour $\frac{r''^3}{r'^3} =$						Et pour $\frac{r'^3}{r''^3} =$					
	0	1/4	1/3	1/2	$\sqrt{1/2}$	1	1	$\sqrt{1/2}$	1/2	1/3	1/4	0
Et si	On a $\frac{r^3}{r'^3} =$						Et $\frac{r^3}{r''^3} =$					
$\varepsilon_1 = 0$	1	1,059	1,101	1,207	1,366	1,618	1,618	1,414	1,281	1,181	1,133	1
$\varepsilon_1 = \frac{1}{5} = 0{,}20$	1	1,050	1,086	1,181	1,327	1,566	1,566	1,369	1,244	1,153	1,111	1
$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$	1	1,0481	1,0833	1,1754	1,3187	1,5542	1,5542	1,3584	1,2352	1,1465	1,1059	1
$\varepsilon_1 = \frac{1}{3} = 0{,}333$	1	1,045	1,079	1,167	1,305	1,535	1,535	1,341	1,221	1,136	1,097	1
$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$	1	1,041	1,071	1,151	1,281	1,500	1,500	1,309	1,193	1,114	1,068	1
$\varepsilon_1 = 1$	1	1,031	1,054	1,118	1,225	1,414	1,414	1,225	1,118	1,054	1,031	1

Il est évident qu'on ne devra jamais attribuer à ε_1 la valeur zéro, car cela supposerait qu'il n'y a aucune contraction transversale. Il ne faudra pas non plus faire $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ ou au-dessus, car, comme la dilatation cubique est (art. 6) $\partial_x + \partial_y + \partial_z = \partial_x(1 - \varepsilon - \varepsilon')$, il en résulterait que, sauf les différences entre ε et ε_1, ε' et ε'_1 (art. 122), une extension longitudinale n'augmenterait pas le volume, ce qui n'est point supposable.

Nous pensons donc qu'on ne peut guère faire varier ε_1 qu'entre 1/5 et 1/3.

Or, le calcul ci-dessus nous montre qu'entre ces limites, et même un peu au delà, les résultats sont très-peu différents. On peut donc, sans crainte d'erreur, adopter généralement, comme nous avons dit à la fin de l'art. 122,

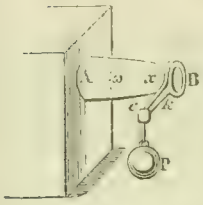
$$\varepsilon_1 \text{ et même } \varepsilon''_1 = 1/4.$$

Il en résulte

$$r^3 = \frac{3}{8} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2}, \tag{318}$$

formule dont le calcul tout fait est donné par les chiffres de la ligne du tableau ci-dessus répondant à $\varepsilon_1 = 1/4$, chiffres qui montrent de combien il faut augmenter la plus grande des valeurs du cube du rayon calculé de manière à résister à la flexion ou à la torsion pour avoir celle qui rendra le cylindre capable de résister à ces deux modifications supposées avoir lieu en même temps.

129. *Arbre tournant sollicité à fléchir et à tordre par deux engrenages ou deux courroies.* — *Autre pièce, dont le diamètre variable remplit la condition d'égale résistance.* — Commençons par celle-ci, et supposons-la encastrée horizontalement en A et sollicitée en B par un poids P qui agit à l'extrémité d'un levier horizontal transversal $Bc = k$. On aura, pour la section ω distante de x du point B, $M' = Px$, $M'' = Pk$; et l'équation de résistance



$$(311)\qquad 1 = \frac{3}{8}\frac{4M'r}{\pi R r^4} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{4M'r}{\pi R r^4}\right)^2 + \left(\frac{2M''r}{\pi T r^4}\right)^2}$$

deviendra, si l'on suppose $\frac{T}{R} = \frac{4}{5}$:

$$(319)\qquad 2\frac{R\pi r^3}{P} = 3x + 5\sqrt{x^2 + k^2},$$

ce qui permettra d'obtenir, par une construction, la suite des grandeurs du rayon r.

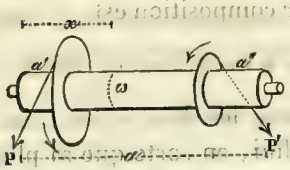
Quant à l'arbre de transmission de mouvement, soient:

a, sa longueur entre ses deux tourillons, c'est-à-dire entre leurs centres de contact avec les coussinets qui les portent;

P, une force qui agit tangentiellement à la circonférence d'une roue dentée ou d'une poulie montée sur cet arbre et dans un plan perpendiculaire pour le faire tourner;

P′, une résistance appliquée de même à une seconde roue (et dont l'intensité se déduit de P, ou réciproquement, par le rapport de leurs rayons et par le calcul connu des frottements);

α, α', les angles que font en sens contraire, avec la verticale,



les directions de ces deux forces;

Π, le poids de l'arbre; ϖ et ϖ' ceux de la première et de la seconde roue;

a', la distance du premier tourillon à la roue où agit P;

a'', celle de la roue où agit P', au deuxième tourillon;

x, la distance du premier tourillon à une section quelconque ω de la partie $a - a' - a''$ de l'arbre comprise entre les deux roues (la seule partie qui soit tordue d'une manière notable, car celles entre chaque roue et l'extrémité la plus proche ne le sont qu'en vertu du frottement des tourillons).

Les forces qui tendent à faire fléchir l'arbre à l'endroit où se trouve ω sont celles qui agissent d'un même côté par rapport à cette section, c'est-à-dire, 1° la force P'; 2° le poids ϖ' de sa roue; 3° le poids $\frac{\Pi}{a}(a-x)$ de la partie de l'arbre entre ω et le deuxième tourillon; enfin la réaction du coussinet où ce tourillon s'appuie, et cette réaction s'obtient d'une manière simple en décomposant chacune des forces P, P', ϖ, ϖ', Π en deux autres, parallèles et passant par les deux coussinets, ce qui donne, *sur le second:* 4° une force $P\frac{a'}{a}$ parallèle et opposée à P; 5° une force $P'\frac{a-a''}{a}$ parallèle et opposée à P'; 6° une force verticale de bas en haut $\varpi\frac{a'}{a} + \varpi'\frac{a-a''}{a} + \frac{\Pi}{2}$. Ces diverses forces produisent, autour de perpendiculaires à leurs directions et à l'axe de l'arbre, menées par le centre de ω, des moments dont les bras de levier sont $a - x$ pour les réactions, $a - a'' - x$ pour les forces P', ϖ', enfin $\frac{a-x}{2}$ pour le poids $\frac{\Pi}{a}(a-x)$ de la partie de l'arbre au delà de ω, et que l'on peut regarder comme concentrée à son centre de gravité. En appelant donc m, m', m'' les moments compris dans des plans respectivement parallèles à la force P, à la force P' et à la verticale, en sorte qu'on ait, en réduisant:

$$(320)\quad m = P\frac{a'}{a}(a-x),\ m' = P'\frac{a''}{a}x,\ m'' = \varpi a'\frac{a-x}{a} + \varpi' a''\frac{x}{a} - \frac{\Pi x}{2}\cdot\frac{a-x}{a},$$

le moment de flexion qui résulte de leur composition est

$$(321)\quad M'=\sqrt{m^2+m'^2+m''^2+2m'm''\cos\alpha'+2m''m\cos\alpha+2mm'\cos(\alpha+\alpha')},$$

Cette expression a bien un minimum entre les deux roues, mais elle n'a de maximum analytique qu'à l'infini, en sorte que sa plus grande valeur a lieu contre l'une ou l'autre roue, c'est-à-dire, ou pour $x=a'$, ou pour $x=a+a''$.

Le moment de torsion M'' n'est autre chose que celui de la *résistance* P', plus celui du frottement du deuxième tourillon, en sorte qu'en appelant ρ' le rayon de la deuxième roue, ρ'' celui de ce tourillon, et $\mathfrak{R}$ la réaction de son coussinet ou la résultante des trois forces $P\frac{a'}{a}$, $P'\frac{a-a''}{a}$ et $\varpi\frac{a'}{a}+\varpi'\frac{a-a''}{a}+\frac{\Pi}{2}$, (4°, 5°, 6°), résultante dont l'expression sera de même forme que celle (321) du moment M', et f le coefficient du frottement, l'on a

$$(322)\quad M''=P'\rho'+\frac{f\rho''}{\sqrt{1+f^2}}\mathfrak{R}.$$

Ces moments M', M'' dans le calcul desquels l'on peut, pour une première approximation, négliger ou fixer arbitrairement le poids encore inconnu de l'arbre, étant une fois obtenus, la formule (318)

$$r^3=\frac{3}{8}r'^3+\sqrt{\left(\frac{5}{8}r'^3\right)^2+(r''^3)^2},\ \text{où l'on a}\ r'^3=\frac{4M'}{\pi R},\ r''^3=\frac{M''}{\pi T}$$

donnera le rayon r que doit avoir l'arbre.

Si, pour M', l'on a pris la plus grande des deux valeurs de (321) répondant à $x=a'$, $x=a-a''$, r ainsi obtenu sera le rayon constant à donner à l'arbre supposé cylindrique.

Mais si l'on a mis pour ce moment de flexion M' sa valeur générale (321) fonction de x, le rayon r sera lui-même fonction de x et le solide sera d'*égale résistance*. Lorsque l'angle $\alpha+\alpha'$ sera petit et que les produits Pa', $P'a''$ seront peu différents, M', et par suite r, variera peu. Mais si cet angle est, par exemple, de deux angles droits ou si les deux forces P, P' sont parallèles et oppo-

sées, et si nous négligeons les poids ϖ, ϖ', Π, le moment M', qui se réduit à $P a' \frac{a+x}{a} - P' a'' \frac{x}{a}$, devient nul au point pour lequel

$$x = a \frac{P a'}{P a' + P' a''}$$

et l'arbre n'éprouve aucune flexion en cet endroit, en sorte qu'on peut faire, dans ce cas surtout, une notable économie sur sa matière.

130. *Prisme rectangle à la fois fléchi et tordu. — Formules générales.* — Prenons, comme à l'art. 113, les y, z parallèles aux côtés $2b$, $2c$ des sections, en appelant $2b$ le plus grand si $G'' = G'$, et généralement celui qui est tel que

$$b\sqrt{G''} > c\sqrt{G'};$$

et nommons, comme au même article, ainsi qu'à la dernière partie de la table (art. 138) de la fin du Mémoire, γ' et γ'_1 des nombres tels qu'on ait respectivement, pour un point quelconque des côtés $2b$ et pour un point quelconque des côtés $2c$,

$$-\vartheta_{xy}\left(\text{pour } \frac{z}{c} = 1\right) = \gamma' c\theta, \quad \vartheta_{xz}\left(\text{pour } \frac{y}{b} = 1\right) = \gamma'_1 b\theta,$$

nombres qui deviennent ceux γ et γ_1 des cinquième et sixième colonnes de la première partie de la même table finale lorsque ces points sont aux milieux des côtés. Comme on a (même art. 113, form. 258, ou même table) pour éliminer la torsion θ,

$$M_x = M'' = \mu G' \theta b c^3,$$

il en résulte

$$(323) \qquad -G'\vartheta_{xy} = \gamma' \frac{M''}{\mu b c^2}, \quad G''\vartheta_{xz} = \gamma'_1 \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \frac{M''}{\mu b^2 c}.$$

Substituant dans la formule générale de résistance (296), ou, ce qui est la même chose, successivement dans celles qu'on tire de (286) en y mettant aussi la valeur générale (293) de $E\delta_x$ et né-

gligeant, comme tout à l'heure, les effets d'extension et de glissement dus aux composantes P_x, P_y, P_z nous aurons, eu égard à $I = \frac{4}{3} b c^3$, $I' = \frac{4}{3} b^3 c$, l'une ou l'autre de ces deux conditions de résistance, suivant que le point dangereux, encore inconnu, se trouvera sur le côté $2b$ pour lequel $z = c$, $g_{xz} = 0$ ou sur le côté $2c$ pour lequel on a $y = b$, $g_{xy} = 0$

$$(324)\quad \begin{cases} 1 = \text{maximum}\, \dfrac{1-\varepsilon_1}{2R}\dfrac{3M'}{4bc^2}\left(\cos\varphi + \dfrac{c}{b}\dfrac{y}{b}\sin\varphi\right) + \\ \quad + \sqrt{\left[\dfrac{1+\varepsilon_1}{2R}\cdot\dfrac{3M'}{4bc^2}\left(\cos\varphi + \dfrac{c}{b}\dfrac{y}{b}\sin\varphi\right)\right]^2 + \left(\dfrac{\gamma'}{T'}\cdot\dfrac{M''}{\mu bc^2}\right)^2}, \\ 1 = \text{maximum}\, \dfrac{1-\varepsilon'_1}{2R}\cdot\dfrac{3M'}{4bc^2}\left(\dfrac{z}{c}\cos\varphi + \dfrac{c}{b}\sin\varphi\right) + \\ \quad + \sqrt{\left[\dfrac{1+\varepsilon'_1}{2R}\cdot\dfrac{3M'}{4bc^2}\left(\dfrac{z}{c}\cos\varphi + \dfrac{c}{b}\sin\varphi\right)\right]^2 + \left(\dfrac{\gamma'_1}{T''}\cdot\dfrac{bG''}{cG'}\dfrac{M''}{\mu bc^2}\right)^2}. \end{cases}$$

Comme il y a deux dimensions inconnues, b et c, il faut se donner arbitrairement l'une des deux, ou bien une relation entre elles.

Supposons que l'on ait choisi leur rapport $\frac{b}{c}$.

La table de la fin du Mémoire, et, au besoin, la formule en série (261) de l'art. 113 donnera, pour le rapport $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$ qui en résultera, les valeurs de γ' répondant à chacune de celles de $\frac{y}{b}$, et les valeurs de γ'_1 répondant à chacune de celles de $\frac{z}{c}$, en sorte qu'on pourra calculer par tâtonnement numérique (voyez ci-après des exemples art. 132, 133) les deux maxima des seconds membres, et l'on prendra, comme expression de la condition de résistance, celle des deux équations qu'on vient d'écrire pour laquelle le maximum sera le plus grand, *ou celle qui donnera, pour le produit* bc^2, *la plus grande valeur.*

Nous pouvons, pour cela, donner à ces équations une autre forme en appelant, comme à l'article précédent, b', c', et b'', c'', les valeurs à attribuer à b, c, s'il n'y a que flexion et s'il n'y a que

torsion. Elles fournissent d'abord, en y faisant $M''=0$, $y=b=b'$, $z=c=c'$,

$$b'\,c'^2=\frac{3\,M'}{4\,R}\left(\cos\varphi+\frac{c'}{b'}\sin\varphi\right). \tag{325}$$

Et, en y faisant $M'=0$, $\gamma'=\gamma$, $\gamma'_1=\gamma_1$ qui sont les plus grandes valeurs de γ' et γ'_1 et $b=b''$, $c=c''$

$$b''c''^2=\frac{M''}{\mu}\times\left(\text{le plus grand des deux rapports }\frac{\gamma}{T'}\text{ et }\frac{\gamma_1\,b''\,G''}{T''\,c''\,G'}\right).$$

Supposons que ce soit le premier de ces deux rapports entre parenthèses, $\frac{\gamma}{T'}$, qui ait la plus grande valeur, ou que le point dangereux, quand il n'y a que torsion, soit au milieu du côté $2\,b$, ce qui arrivera presque toujours, en sorte que :

$$b''c''^2=\frac{\gamma}{\mu}\frac{M''}{T'}. \tag{326}$$

Tirant $\frac{M'}{R}$, $\frac{M''}{T'}$ de ces expressions (325), (326), et substituant, les deux équations (324) prennent la forme :

$$\left\{\begin{aligned}
bc^3=&\text{ maximum }\frac{1-\varepsilon_1}{2}\frac{\cos\varphi+\frac{c}{b}\frac{\gamma}{b}\sin\varphi}{\cos\varphi+\frac{c'}{b'}\sin\varphi}\,b'c'^2+\\
&+\sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon_1}{2}\frac{\cos\varphi+\frac{c}{b}\frac{\gamma}{b}\sin\varphi}{\cos\varphi+\frac{c'}{b'}\sin\varphi}\,b'c'^2\right)^2+\left(\frac{\gamma'}{\gamma}b''c''^2\right)^2}\\
bc^3=&\text{ maximum }\frac{1-\varepsilon'_1}{2}\frac{\frac{z}{c}\cos\varphi+\frac{c}{b}\sin\varphi}{\cos\varphi+\frac{c'}{b'}\sin\varphi}\,b'c'^2+\\
&+\sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon'_1}{2}\cdot\frac{\frac{z}{c}\cos\varphi+\frac{c}{b}\sin\varphi}{\cos\varphi+\frac{c'}{b'}\sin\varphi}\,b'c'^2\right)^2+\left(\frac{G''T'}{G'T''}\cdot\frac{\gamma_1 b}{\gamma c}\cdot\frac{\gamma'_1}{\gamma_1}b''c''^2\right)^2}.
\end{aligned}\right. \tag{327}$$

La plus grande des deux valeurs de $b\,c^2$ qu'elles donneront sera celle qu'il faudra adopter.

Si la matière a un axe d'élasticité parallèle aux x, on remplacera simplement, dans la seconde de ces deux formules, ε'_1 par ε_1 et $\frac{G''\,T'}{G'\,T''}$ par 1.

Il est entendu que si l'une des sections pour lesquelles le moment de flexion M' est le plus grand, se trouve être de celles qui ne peuvent prendre aucun gauchissement (art. 125), il faudra calculer comparativement les dimensions en mettant pour $G'\vartheta''_{xy}$, $G''\vartheta''_{xz}$ les valeurs (301) dans la formule générale (296), ce qui donnera, vu que le point dangereux ou de maximum répondra nécessairement alors à $y=b$, $z=c$ ou à l'un des angles de la section

$$(328)\quad 1=\frac{1-\varepsilon''_1}{2}\frac{b'c'^2}{bc^2}+\sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon''_1}{2}\frac{b'c'^2}{bc^2}\right)^2+\frac{9M''^2\left(\frac{G'^2c^2}{T'^2}+\frac{G''^2b^2}{T''^2}\right)}{16\,b^2c^2(G'c^2+G''b^2)^2}},$$

qui se réduit, lorsque $G'=G''$, $T'=T''$, $\varepsilon'_1=\frac{1}{4}$, à

$$(329)\qquad b\,c^2=\frac{3}{8}\,b'\,c'^2+\sqrt{\left(\frac{5}{8}\,b'\,c'^2\right)^2+\left(\frac{3\,M''\,c}{4\,T'\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2},$$

ou bien, eu égard à $(326)\ b''c''^2=\frac{\gamma}{\mu}\frac{M''}{T}$, où b'', c'' représentent toujours les dimensions dues à la torsion quand la section peut librement se gauchir,

$$(330)\qquad b\,c^2=\frac{3}{8}b'\,c'^2+\sqrt{\left(\frac{5}{8}\,b'\,c'^2\right)^2+\frac{\frac{9}{16}\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^2}{1+\frac{b^2}{c^2}}(b''\,c''^2)^2},$$

expression où le coefficient de $(b''c''^2)^2$ a les valeurs 0,780; 0,591 0,435; 0,257 pour $\frac{b}{c}=1$; 1,5; 2 et 3 d'après la table finale.

Et l'on prendra pour les dimensions b, c, si elles doivent être les mêmes à toutes les sections, les plus fortes de celles qui seront

données par cette expression et par celles (327); car, quand bien même la section astreinte à rester plane serait la plus exposée quant à la flexion, ou serait celle pour laquelle M′ et par suite $b'c'^2$ est le plus grand, il y en a toujours d'autres, tout auprès, ou M′ est peu différent et qui peuvent se courber à peu près librement.

131. *Même prisme rectangle. — Cas où il fléchit dans le plan de plus facile flexion, ou parallèlement aux côtés* 2c *supposés les plus petits* (voyez art. 133). — Ce cas arrivera (art. 42): 1° si le *plan de sollicitation* ou du moment M′ est lui-même parallèle à 2c, c'est-à-dire si l'on a l'angle $\varphi = 0$; 2° ou si le prisme est *plat*, c'est-à-dire si c est extrêmement petit par rapport à b, l'angle φ étant alors quelconque, pourvu qu'il ne soit pas assez près de l'angle droit pour empêcher de négliger $\frac{c}{b}$ tang φ vis-à-vis de 1.

La première expression (324) ou (327) se réduit alors, vu que $\gamma' = \gamma$, en faisant $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}$, à

$$(331)\quad bc^2 = \frac{3}{8}\frac{3\,M'}{4\,R} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{3\,M'}{4\,R}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\mu}\frac{M'}{T'}\right)^2} = \frac{3}{8}b'c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8}b'c'^2\right)^2 + (b''c''^2)^2},$$

formule qui peut servir, non-seulement en se donnant le rapport $\frac{b}{c}$ des deux dimensions, mais même en se donnant l'une ou l'autre, ou une relation quelconque entre elles, pourvu qu'alors on tâtonne jusqu'à ce que la dernière valeur essayée pour $\frac{\gamma}{\mu}$ réponde, d'après la table finale, à la dernière valeur trouvée pour $\frac{b}{c}$.

Quant à la seconde expression (327), il n'y aura presque jamais lieu d'y avoir égard, car le terme hors du radical et le premier terme sous le radical n'atteignent la grandeur des termes correspondants de la première expression que pour $\frac{z}{c} = 1$, ce qui annule γ'_1 ou le second terme sous le radical; et ce terme sera, pour une autre valeur quelconque de $\frac{z}{c}$, presque toujours plus petit

que celui $(b''c''^2)^2$ de la première expression (327) puisqu'on a $\frac{\gamma'_1}{\gamma_1} < 1$, $\frac{\gamma_1 b\sqrt{G''}}{\gamma c\sqrt{G'}} < 1$, et $\frac{G''T'}{G'T''}$ peu différent de 1.

A moins donc de différences tout à fait exceptionnelles de contexture dans les sens transversaux, il faut se servir de la première expression (327) ou de la formule (331) qu'on vient d'écrire, dont la forme nous est déjà connue, qui donne les mêmes rapports numériques entre bc^2, $b'c'^2$, $b''c''^2$ que nous avons trouvés, dans le cas du cylindre circulaire, entre le cube r^3 de son rayon et les grandeurs r'^3, r''^3 qu'on lui donnerait si le cylindre était seulement fléchi ou seulement tordu.

Nous ne reproduirons ni ici, ni aux articles suivants ce que nous avons dit à la fin de l'article précédent sur le calcul comparatif à faire pour le cas où l'une des sections les plus exposées serait astreinte à rester plane, et sur le surcroît éventuel de dimensions qu'il faudrait donner en conséquence, soit à tout le prisme, soit, plutôt, à un seul endroit sur une faible longueur.

132. *Prisme à base carrée, fléchi dans un plan quelconque, et en même temps tordu.* — Lorsque la base est carrée, il faut, dans les formules (327), faire $b = c$, $b' = c'$, $b'' = c''$, $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma'_1 = \gamma'$, et, si l'on suppose la contexture la même dans les deux sens transversaux, $\frac{G''T'}{G'T''} = 1$. On peut se contenter de la première de ces deux formules en convenant de prendre l'axe des z parallèle à celui des deux côtés qui fait le plus petit angle avec le plan de sollicitation, en sorte que φ ne dépasse pas 45 degrés. On a ainsi :

$$(332)\quad \frac{b^3}{b'^3} = \text{maximum}\,\frac{3}{8}\,\frac{1+\frac{\gamma}{b}\tang\varphi}{1+\tang\varphi} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\,\frac{1+\frac{\gamma}{b}\tang\varphi}{1+\tang\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\,\frac{b''^3}{b'^3}\right)^2}.$$

Voici les valeurs diverses de l'expression qui est dans le second membre :

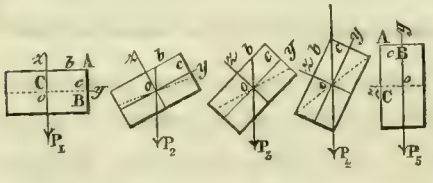
AUX POINTS.....		$\frac{y}{b}=0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$\frac{y}{b}=1$
Pour tang $\varphi = 1/2$	$\frac{b'^3}{b'^3}=1/2$	0,901	.....	0,945	.....	0,970	.....	0,983	.....	0,986	.....	1,000
	$=\sqrt{1/2}$ ou 0,7071	1,071	.....	1,102	.....	1,106	1,093	1,082	.....	1,034	.....	1
	$=1$	1,333	1,347	1,350	1,343	1,324	1,292	1,248	1,209	1,121	1,037	1
	$\sqrt{2}$	1,724	1,733	1,725	.....	1,659	.....	1,512	.....	1,273	.....	1
	2	2,293	.....	2,274	.....	2,155	.....	1,914	.....	1,516	.....	1
	3	3,278	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	1
Pour tang $\varphi = 1$	$\frac{b^3}{b'^3}=1/2$	0,777	.....	0,839	.....	0,888	.....	0,924	.....	0,954	.....	1,000
	$\sqrt{1/2}$ ou 1,4142	0,961	.....	1,008	.....	1,031	1,032	1,027	.....	1,004	.....	1
	1	1,235	1,258	1,267	1,269	1,257	1,234	1,199	1,150	1,093	1,021	1
	$\sqrt{2}$	1,636	.....	1,651	.....	1,600	.....	1,469	.....	1,246	.....	1
	2	2,212	2,224	2,212	.....	2,102	.....	1,876	.....	1,493	.....	1
	3	3,207	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	1

On aperçoit par les gros chiffres, sur chaque ligne horizontale, où et quelle est la plus grande valeur du second membre de (331). En la prenant pour celle de $\frac{b^3}{b'^3}$ l'on a, pour déterminer le côté à donner à un prisme carré soumis en même temps à une flexion et une torsion, la table suivante, dont la première ligne, répondant à $\varphi = 0$, avait déjà été calculée aux articles 123 et 124 :

FLEXION ET TORSION SIMULTANÉES D'UN PRISME CARRÉ DONT LE CÔTÉ EST $2b$.

POUR $\frac{b''^3}{b'^3}=$	0	1/4	1/3	1/2	$\sqrt{1/2}=0{,}707$	1	POUR $\frac{b'^3}{b''^3}=$	1	$\sqrt{1/2}=0{,}707$	1/2	1/3	1/4	0
Quand le prisme est sollicité à fléchir parallèlement à deux de ses faces latérales (tang $\varphi=0$),													
On a $\frac{b^3}{b'^3}=$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554	On a $\frac{b^3}{b''^3}=$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1
Quand il est sollicité dans un plan partageant les côtés opposés des bases dans des rapports 3 : 1 et 1 : 3 (tang $\varphi=1/2$),													
On a $\frac{b^3}{b'^3}=$	1	1	1	1,000	1,106	1,350		$\frac{b^3}{b''^3}=$ 1,350	1,226	1,146	1,093	1,047	1
Quand il est sollicité à fléchir parallèlement à l'une des diagonales des bases (tang $\varphi=1$),													
On a $\frac{b^3}{b'^3}=$	1	1	1	1,000	1,033	1,269		$\frac{b^3}{b''^3}=$ 1,269	1,167	1,112	1,069	1,030	1
Et si la section la plus exposée est astreinte à rester plane, on aurait (formule 330, en faisant $b=c$), quel que soit φ,													
$\frac{b^3}{b'^3}=$	1	1,038	1,066	1,140	1,254	1,457		$\frac{b^3}{b''^3}=$ 1,457	1,253	1,124	1,032	0,991	0,883

133. *Prisme à base rectangle dont un côté est double de l'autre, fléchi dans un plan quelconque, parallèle ou oblique à ses faces, et en même temps tordu.* — Si l'on fait $b=2c$, et aussi $G'=G''$, $T'=T''$, $\varepsilon_1=\varepsilon'_1=1/4$ dans les formules (327) de l'art. 130, exprimant les conditions de la résistance du prisme rectangle en général, pour les diverses situations oP_2, oP_3, oP_4, oP_5 du plan de sollicitation par rapport aux côtés de la base (le calcul relatif à la situation oP_1 est déjà fait), l'on obtient les valeurs suivantes pour l'expression formant le second membre de



la première de ces formules (327), en puisant $\frac{\gamma'}{\gamma}$ dans la colonne $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 2$ de la dernière partie de la table de la fin du Mémoire :

$$\text{VALEURS DE } \frac{bc^2}{b'c'^2} = \frac{3}{8}\frac{\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{y}{b}\sin\varphi}{\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{y}{b}\sin\varphi}{\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{\gamma}\frac{b''c''^2}{b'c'^2}\right)^2}.$$

AUX POINTS....	$\frac{y}{b}=0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$\frac{y}{b}=1$
Valeurs de $\frac{\gamma'}{\gamma}$	1,000	0,9963	0,9846	0,9640	0,9321	0,8857	0,8196	0,7260	0,5916	0,3896	0,000
Situation OP_2 ou tang$\varphi=1/2$. — $P^r\ \frac{b''c''}{b'c'^2}=1/2$	1,007	.....	1,035	.....	1,051	1,053	1,051	.....	1,029	.....	1,000
$\sqrt{1/2}$	1,166	.....	1,187	1,190	1,188	.....	1,161	.....	1,091	.....	1
1	1,418	1,428	1,431	1,426	1,414	1,387	1,346	1,286	1,203	1,093	1
$\sqrt{2}$	1,800	1,807	1,803	.....	1,758	.....	1,639	.....	1,389	.....	1
2	2,362	.....	2,353	.....	2,274	.....	2,082	.....	1,710	.....	1
OP_1 ou tang$\varphi=1$. — $\frac{b''c''^2}{b'c'^2}=1/2$	0,901	.....	0,948	.....	0,983	.....	1,004	.....	1,004	.....	1
$\sqrt{1/2}$	1,068	.....	1,108	.....	1,127	.....	1,118	.....	1,068	.....	1
1	1,333	1,350	1,361	1,363	1,358	1,330	1,307	1,256	1,181	1,081	1
$\sqrt{2}$	1,724	.....	1,741	.....	1,710	.....	1,604	.....	1,370	.....	1
2	2,293	2,303	2,297	.....	2,289	.....	2,051	.....	1,669	.....	1
OP_4 ou tang$\varphi=2$. — $\frac{b''c''^2}{b'c'^2}=1/2$	0,777	.....	0,847	.....	0,902	.....	0,946	.....	0,973	.....	1
$\sqrt{1/2}$	0,935	.....	1,016	.....	1,054	.....	1,066	.....	1,039	.....	1
1	1,235	1,260	1,279	1,290	1,292	1,283	1,260	1,218	1,154	1,064	1
$\sqrt{2}$	1,636	.....	1,667	.....	1,651	.....	1,562	.....	1,345	.....	1
2	2,212	2,228	2,230	.....	2,177	.....	2,014	.....	1,647	.....	1
OP_5 ou tang$\varphi=\infty$; $\cos\varphi=0$, $\sin\varphi=1$. — $\frac{b''c''^2}{b'c'^2}=1/2$	0,500	0,540	0,583	0,630	0,678	0,729	0,780	0,831	0,881	0,933	1
$\sqrt{1/2}$	0,707	0,745	0,782	0,819	0,855	0,887	0,915	0,937	0,952	0,964	1
1	1,000	1,036	1,068	1,094	1,115	1,127	1,126	1,110	1,074	1,022	1
$\sqrt{2}$	1,414	1,448	1,473	1,488	1,492	1,478	1,443	1,378	1,275	1,125	1
2	2,000	2,031	2,048	2,050	2,031	1,986	1,907	1,779	1,584	1,299	1

Jusqu'à la figure où le plan de flexion a la situation oP_4, c'est-à-dire jusqu'à tang $\varphi = 2$ *inclusivement*, l'on peut se dispenser de calculer de même la seconde formule (327), car on voit par les traits ponctués qui représentent, sur chaque figure, les lignes *des fibres invariables*, faisant, avec la médiane parallèle aux grands côtés, des angles ψ dont la tangente est (art. 42, formule 92)

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{I}{I'}\operatorname{tang}\varphi = \frac{c^2}{b^2}\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{4},$$

l'on voit, dis-je, que les dilatations δ_x des fibres, dues à la seule flexion, sont plus fortes ou au moins aussi fortes aux divers points du demi-côté $CA = b$ qu'aux points situés de la même manière sur le demi-côté $BA = c$, en sorte que, comme les glissements sont plus considérables sur celui-là, le point dangereux doit s'y trouver et non sur celui-ci.

Il en est autrement pour le cas de la cinquième figure, où le plan de flexion oP_5 est parallèle aux grands côtés, et où le prisme est sollicité *de champ*, comme l'on dit, à la flexion. Le calcul de la deuxième formule (327) qui se réduit alors à :

$$\frac{b\,c^2}{b'\,c'^2} = \frac{3}{8} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(2\,\frac{\gamma_1}{\gamma}\,\frac{b''\,c''^2}{b'\,c'^2}\right)^2} \tag{333}$$

donne, eu égard à ce que (table finale art. 138) $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{0{,}73945}{1{,}86012}$:

Pour $\frac{b''\,c''^2}{b'\,c'^2} =$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2
$\frac{b\,c^2}{b'\,c'^2} =$	1,116	1,212	1,386	1,661	2,084

Et ces nombres, supérieurs respectivement à 1,000, 1,000, 1,127, 1,492, 2,050 qui sont les plus grands de ceux donnés par le tableau précédent pour tang $\varphi = \infty$, prouvent que lorsque notre prisme est sollicité de champ, ou parallèlement au grand côté $2b$, c'est sur le petit côté $2c$, et à son milieu B, que se trouve le point dangereux.

En prenant les plus grandes valeurs (celles en plus gros chiffres) ainsi trouvées pour $\frac{b\,c^2}{b'\,c'^2}$ et en en déduisant, lorsque $\frac{b''\,c''^2}{b'\,c'^2}$ surpasse l'unité, celles de $\frac{b\,c^2}{b''\,c''^2}$, l'on obtient la table suivante (dont la première ligne de chiffres était obtenue déjà art. 127 et 128):

FLEXION ET TORSION SIMULTANÉES D'UN PRISME À BASE RECTANGLE DONT LES DEMI-CÔTÉS SONT b ET c. — CAS $b = 2c$.

POUR $\frac{b''\,c''^2}{b'\,c'^2} =$	0	1/4	1/3	1/2	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1	POUR $\frac{b'\,c'^2}{b''\,c''^2} =$	1	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1/2	1/3	1/4	0
Quand le prisme est sollicité à plat ou quand le plan de sollication à la flexion est parallèle aux petits côtés ($\varphi = 0$),													
Onc $\frac{b\,c^2}{b'\,c'^2} =$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554	$\frac{b\,c^2}{b''\,c''^2} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1,000
Quand le plan de sollicitation à la flexion est perpendiculaire à l'une des diagonales ($\text{tang}\,\varphi = 1/2$),													
$\frac{b\,c^2}{b'\,c'^2} =$	1	.....	.....	1,053	1,190	1,431	$\frac{b\,c^2}{b''\,c''^2} =$	1,431	1,278	1,181	.....	.....	1,000
Quand le plan de sollicitation est également incliné (ou à 45°) sur les deux côtés de la base ($\text{tang}\,\varphi = 1$),													
$\frac{b\,c^2}{b'\,c'^2} =$	1	.....	.....	1,004	1,127	1,363	$\frac{b\,c^2}{b''\,c''^2} =$	1,363	1,231	1,151	.....	.....	1,000
Quand le plan de sollicitation est parallèle à l'une des diagonales, en sorte que la flexion se fait *autour de l'autre* ($\text{tang}\,\varphi = 2$),													
$\frac{b\,c^2}{b'\,c'^2} =$	1	.....	.....	1,000	1,066	1,292	$\frac{b\,c^2}{b''\,c''^2} =$	1,292	1,179	1,115	.....	.....	1,000
Quand le prisme est sollicité *de champ*, ou quand le plan de sollicitation à la flexion est parallèle aux grands côtés ($\text{tang}\,\varphi = \infty$),													
$\frac{b\,c^2}{b'\,c'^2} =$	1	.....	.....	1,116	1,212	1,386	$\frac{b\,c^2}{b''\,c''^2} =$	1,386	1,175	1,042	.....	.....	1,000
Et si la section la plus exposée était de celles qui ne peuvent se courber par la torsion, on aurait (formule 330 pour $b = 2c$), quel que soit φ :													
$\frac{b\,c^2}{b'\,c'^2} =$	1	1,033	1,058	1,125	1,231	1,413	$\frac{b\,c^2}{b''\,c''^2} =$	1,413	1,201	1,074	0,980	0,937	0,687

Ainsi, quand le prisme est sollicité à plat, une section qui serait astreinte à rester plane n'aurait pas besoin d'avoir de plus grandes dimensions que celles qui peuvent se gauchir librement.

134. *Flexion et torsion simultanées de prismes ayant d'autres bases que le cercle et le rectangle. — Application au cylindre elliptique.* — La formule générale (296) de l'art. 124 sera toujours applicable à ces divers prismes qui peuvent être en même temps sollicités à l'extension et au glissement transversal par des forces P_x, P_y, P_z.

Nous rappellerons, à la *récapitulation* finale (art. 136), les expressions des glissements dus à la torsion, à y introduire pour les sections du troisième, du quatrième et du huitième degré.

Considérons ici, seulement, le cylindre à base d'ellipse dont le grand et le petit axe, parallèles aux y et aux z, sont $2b$ et $2c$. D'après les expressions de l'art. 107 (formules 241 et 242)

$$G'\gamma''_{xy} = -\frac{M_x}{2I}z, \quad G''\gamma''_{xz} = \frac{M_x}{2I'}y,$$

la formule (296) deviendra, avec $\varepsilon''_1 = \frac{1}{4}$, en négligeant $\frac{P_x}{\omega}$ ainsi que les parties γ'_{xy}, γ'_{xz} des glissements dues aux actions transversales et en mettant pour I, I′ leurs valeurs, ainsi que M″ pour M_x :

$$(334)\quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = \max \dfrac{3}{8R}\cdot\dfrac{4M'}{\pi bc}\left(\dfrac{\cos\varphi}{c^2}z + \dfrac{\sin\varphi}{b^2}y\right) \\ \quad + \sqrt{\left[\dfrac{5}{8R}\cdot\dfrac{4M'}{\pi bc}\left(\dfrac{\cos\varphi}{c^2}z + \dfrac{\sin\varphi}{b^2}y\right)\right]^2 + \left(\dfrac{2M''}{\pi bc}\right)^2\left(\dfrac{z^2}{c^4T'^2} + \dfrac{y^2}{b^4T''^2}\right)}. \end{array} \right.$$

Le maximum doit être cherché par rapport aux deux variables y, z liées par

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

car le point dangereux doit se trouver sur le contour de la section.

Si l'on prend l'un des deux cas les plus simples, $\sin\varphi = 0$ ou $\cos\varphi = 0$, la différentiation du second membre de (334) conduit bien à une équation du premier degré donnant la valeur de z ou

de y qui en rend nulle la différentielle; et l'on obtient plus facilement encore une pareille équation si l'on ne différentie qu'après avoir égalé cette expression (334) à une indéterminée, et transposé pour chasser le radical, en faisant finalement l'indéterminée $= 1$ et sa différentielle $= 0$.

Mais on reconnaît bientôt que les valeurs de z ou de y ainsi trouvées sont étrangères à la question du maximum qu'il s'agit de déterminer. Et cela ne doit point étonner, car l'expression (334) pour $\sin\varphi = 0$ ou $\cos\varphi = 0$ est, dans les cas extrêmes $M'' = 0$ ou $M' = 0$, du premier degré en z ou y, ou son carré est du premier degré en z^2 ou y^2; or, on sait que l'on n'obtient pas, par la différentiation, le maximum d'une fonction du premier degré dont la variable ne peut prendre que des valeurs limitées (art. 121).

Ce qu'il y a donc de mieux à faire, dans chaque cas, c'est-à-dire pour chaque valeur de l'angle φ, du rapport $\frac{M''}{M'}$ des moments de flexion et de torsion, etc., ce sera de chercher le maximum par un tâtonnement numérique ainsi que nous l'avons conseillé en général à l'article 121.

On en est dispensé lorsque, T' étant $=$ T'', le prisme est sollicité *à plat* à la flexion, ou parallèlement au petit axe $2c$ des bases, c'est-à-dire lorsque $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$; car le point dangereux répond alors évidemment à $y = 0$, $z = c$, ou à l'une des extrémités de ce petit axe, ce qui donne, $b' c'^2$ et $b'' c''^2$ étant les valeurs à attribuer à $b c^2$ quand $M'' = 0$ et quand $M' = 0$,

$$(335) \qquad b c^2 = \frac{3}{8} b' c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} b' c'^2\right)^2 + (b'' c''^2)^2};$$

formule dont on tire les mêmes conséquences (art. 131, 127) que de la formule toute semblable (283) obtenue pour le prisme rectangle sollicité à plat.

Mais si le prisme elliptique est *sollicité de champ*, il faut déjà un tâtonnement pour déterminer le point dangereux et la condition de résistance. En effet, en faisant $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$,

$T' = T'' = T$, et en ayant égard à ce que, dans les cas extrêmes $M'' = 0$, $M' = 0$, l'on a respectivement

$$(336) \qquad 1 = \frac{4M'}{R\pi b'^2 c'}, \quad 1 = \frac{2M''}{T\pi b'' c''^2}$$

l'équation (333) devient, vu que $\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$ sur le contour :

$$(337) \qquad 1 = \max. \frac{3}{8}\frac{b'^2 c'}{b^2 c}\frac{y}{b} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{b'^2 c'}{b^2 c}\frac{y}{b}\right)^2 + \left[1 - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}\right]\left(\frac{b'' c''^2}{b c^2}\right)^2};$$

ou si, pour faire cesser l'indétermination, nous nous donnons le rapport des axes $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''}$ d'où $\frac{b'^2 c'}{b^2 c}\, b c = b' c'^2$:

$$(338) \quad bc^2 = \max. \frac{3}{8}\frac{y}{b} b' c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{y}{b} b' c'^2\right)^2 + \left[1 - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}\right](b'' c''^2)^2}.$$

Tant que $\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)(b'' c''^2)^2$ est $< \left(\frac{5}{8} b' c'^2\right)^2$, ou que $\frac{b'' c''^2}{b' c'^2} < \frac{0{,}625}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}}$,

cette expression est croissante avec $\frac{y}{b}$; son maximum, ou le point dangereux, répond à $\frac{y}{b} = 1$, ou au sommet qui est à l'extrémité du grand axe $2b$, comme s'il n'y avait que flexion. Mais, au delà, le maximum *peut* avoir lieu pour $y < b$, ou ailleurs qu'à ce sommet : et c'est cette discontinuité, dont nous avons parlé en général à l'article 121, qui est cause que le maximum ne saurait être obtenu par la différentiation.

Soit, par exemple, $\frac{b}{c} = 2$.

Voici les diverses valeurs du quotient de l'expression du second membre de (338) par $b' c'^2$; celles en chiffres plus gros sont les plus grandes de chaque ligne :

POUR $\frac{y}{b} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,91	0,95	0,99	$\frac{y}{b} = 1$
Pour $\frac{b''c''^2}{b'c'^2} = 1/2$	0,500	.....	0,583	.....	0,682	.....	.....	0,794	0,854	0,917	0,981	.....	1,015	.....	1,048
$= \sqrt{1/2}$	0,707	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	1,051	.....	1,073	.....	1,093
$= \sqrt{3/4}$	0,866	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	1,070	.....	1,087	1,101	1,104
$= 1$	1,000	.....	1,068	.....	1,121	.....	.....	1,158	1,170	1,178	1,182	1,179	1,178	.....	1,175
$= \sqrt{2}$	1,414	.....	.....	.....	1,500	1,508	1,500	1,490	1,469	1,436	.....	.....	.....	.....	1,319
$= 2$	2,000	2,031	2,065	2,053	2,043	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	1,554
$= 4$	4,00	4,044	4,017	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

D'où il suit que lorsqu'un prisme à base elliptique, dont l'axe $2b$ est double de l'axe $2c$, doit résister à la fois à un effort qui tend à le fléchir de champ ou parallèlement à sa grande dimension $2b$, et à un effort qui tend à le tordre, l'on a, pour déterminer le produit bc^2 du demi-grand axe par le carré du demi-petit axe, après avoir calculé les valeurs $b'c'^2$, $b''c''^2$ de ce produit dans l'hypothèse où il ne serait soumis qu'à l'effort tendant à fléchir, et dans l'hypothèse où il ne serait soumis qu'à l'effort qui tend à le tordre, la table suivante, qui donne également l'abscisse y du point où la rupture tend à s'opérer :

POUR $\frac{b''c''^2}{b'c'^2} =$	0	1/2	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{3/4}$	1	POUR $\frac{b'c'^2}{b''c''^2} =$	1	$\sqrt{1/2}$	1/2	1/4	0
On a $\frac{bc^2}{b'c'^2} =$	1	1,048	1,093	1,104	1,182	Et $\frac{bc^2}{b''c''^2} =$	1,182	1,059	1,032	1,011	1
Et $\frac{y}{b} =$	1	1	1	1	0,9	.....	0,9	0,45	0,2	0,1	0

Les valeurs de $\frac{\gamma}{b}$ montrent que le point dangereux reste à l'extrémité du grand axe $2b$ tant que le rapport $\frac{b''c''^2}{b'c'^2}$ mesurant l'influence relative de la torsion et de la flexion ne dépasse pas $\frac{1}{2}\sqrt{3}=0{,}866$ $\left(\text{ce qui excède légèrement la limite inférieure } \frac{0{,}625}{\sqrt{1-\frac{c^2}{b^2}}}=0{,}7217\right)$; qu'ensuite il parcourt successivement tous les points de chaque quart de la circonférence elliptique, mais en n'atteignant les extrémités du petit axe $2c$ que lorsque l'effort de flexion devient nul relativement à celui de torsion.

On voit aussi, par la comparaison avec l'avant-dernière ligne de chiffres du dernier tableau de l'art. 133, que l'influence de la simultanéité des deux sortes d'effets est bien plus faible pour le prisme à base d'ellipse, *sollicité à fléchir de champ*, que pour le prisme rectangle sollicité de même et ayant le même rapport 2 : 1 entre les deux dimensions transversales.

CHAPITRE XIII.

RÉSUMÉ DE CE MÉMOIRE, RÉCAPITULATION DES FORMULES ET RÈGLES PRATIQUES, ET EXEMPLES D'APPLICATION NUMÉRIQUE.

135. *Résumé général.* — On peut résumer comme il suit ce qui a été exposé avec détail dans le courant de ce Mémoire :

1° Les équations de l'équilibre intérieur des solides élastiques, établies d'une manière élémentaire au chapitre II pour des grandeurs quelconques des déplacements (art. 3 à 22), et qui donnent très-facilement les forces quand on connaît ceux-ci (art. 1, 23, 29), mais qu'on ne sait pas intégrer généralement de manière à en tirer les déplacements lorsque ce sont les forces qui sont connues (1, 23, 29, 34, etc.), peuvent fournir, néanmoins, beaucoup de résultats utiles en les traitant par une méthode mixte ou semi-inverse, qui consiste (2, 23, 30, 32, 34 à 44, 45 à 51) à se donner une partie des forces et en même temps une partie des déplacements ou de leurs relations mutuelles, et à chercher par une ana-

lyse exacte quels sont, en conséquence, les autres déplacements et les autres forces.

2° Ainsi, l'on fait cesser l'incertitude qui pouvait planer encore sur la solution connue du problème simple de la traction longitudinale des prismes à base quelconque, par des forces uniformément distribuées sur leurs deux bases (art. 29, 30, 32). L'on justifie également, sans faire les hypothèses gratuites et même fausses sur lesquelles on la fonde ordinairement, la formule usitée $M_y = \frac{EI}{\rho}$ du moment de flexion d'un prisme (art. 36, et 34 à 41), en y substituant une double formule (art. 42) lorsque le plan de flexion doit être différent du plan de sollicitation a fléchir, mais en montrant qu'elles ne sont rigoureusement vraies que pour un mode particulier d'application des forces qui font fléchir, et en donnant le moyen de calculer les effet de glissement et de courbure des sections (40, 43) que ces formules ne comprennent pas.

On justifie de cette même manière (art. 57) la formule de Coulomb $M_x = G\frac{\pi R^4}{2}\theta$ du moment de torsion d'un cylindre droit à section circulaire, en faisant voir (57) qu'elle exige aussi, pour être exacte, un mode particulier de distribution des forces sur les bases et dans leur plan.

Enfin l'on arrive, principalement pour la torsion des prismes de diverses formes, à un grand nombre d'autres résultats non encore connus, tous exacts et rigoureux sous des conditions analogues, relatives au mode d'application des forces sur les bases et dans leur plan.

3° Dans la pratique, bien que les forces qui étendent, fléchissent ou tordent les prismes puissent n'être pas appliquées et distribuées aux extrémités de cette manière-là, les résultats peuvent toujours être adoptés avec toute l'approximation désirable. L'expérience le montre à l'égard des formules déjà connues d'extension et de flexion de prismes quelconques, et de celle de torsion du cylindre circulaire, ce qui prouve qu'à de très-petites distances

des points d'application, la distribution des efforts se règle naturellement, à l'intérieur de ces solides, à très-peu près de la manière voulue pour rester la même plus loin dans ses autres parties, en sorte qu'elle se rapproche rapidement de l'état limite représenté par les formules. On peut, par une raison toute semblable, adopter les formules nouvelles, qui sont fondées sur les mêmes principes, et en faire usage avec la même confiance qu'on se sert des anciennes, relatives, soit à l'extension et à la flexion, soit à la torsion réduite au cas des cylindres circulaires (art. 2, 33, 41, 58).

4° La théorie ancienne de la torsion des prismes, fondée sur la supposition que la résistance de leurs fibres est proportionnelle à la distance de l'axe, ou que leurs sections planes orthogonales restent planes, et qui donne, par conséquent, pour le moment des forces le produit $GJ\theta$ du coefficient d'élasticité de *glissement* G par la torsion θ et par le moment d'inertie polaire J de la section, n'est vraie que pour le seul cas où Coulomb l'a établie, c'est-à-dire pour le cas où la section est un cercle (l'*élasticité* étant supposée égale dans tous les sens transversaux). Pour toute autre forme du contour, le plan de la section se change en une surface courbe. Si, par exemple (art. 57), la section est elliptique, le plan devient un paraboloïde hyperbolique, en sorte que la section éprouve un *gauchissement* dû à l'inégalité des deux dimensions. Si la section est carrée, elle éprouve (76) une autre espèce de gauchissement ou de courbure due à ce qu'elle a des parties saillantes, et des angles *auprès desquels toute section doit nécessairement s'incliner de manière à rester normale aux arêtes vives* (art. 68, 115), qui, de droites qu'elles étaient, sont devenues des hélices. Et si cette section est rectangulaire, elle éprouve à la fois ces deux sortes de gauchissement (84), et son équation ne peut s'exprimer qu'en série d'exponentielles et de sinus (art. 70).

5° De cette courbure ou de ce gauchissement, il résulte (57, 62, 71, 76, 88) que les fibres ou éléments longitudinaux du prisme s'inclinent moyennement moins, pour une torsion donnée, sur les éléments superficiels des sections, ou glissent moyennement

moins les unes contre les autres, que si ces sections fussent restées planes. La résistance, ou la réaction élastique du prisme contre la torsion opérée, est donc moindre que ne l'indique l'ancienne théorie, étendue aux bases non circulaires; en sorte que l'expression $M_x = G J \theta$ qu'elle donne pour le moment de cette réaction (θ étant la torsion par unité de longueur, et J le moment d'inertie de la section autour de son centre) est trop forte, non-seulement pour une section rectangle comme l'a reconnu M. Cauchy, mais même pour une section carrée.

Dans ce cas d'un prisme à section carrée, il faut, pour avoir la vraie valeur du moment M_x, multiplier l'expression $GJ\theta$ par 0,843 (art. 77). Si la section est rectangulaire, il faudrait la multiplier par un nombre décroissant indéfiniment avec le rapport du plus petit au plus grand côté (art. 85 ou table finale art. 138), ou il faut multiplier par un nombre entre 0,843 et 1 la formule de M. Cauchy qui revient à $M_x = \frac{4 G \theta}{\frac{1}{I} + \frac{1}{I'}}$, I et I′ étant les moments d'inertie de cette section autour de ses deux médianes ou axes de figure. Le coefficient 1 convient au cas des prismes minces ou plats (74), où l'un des deux termes du dénominateur est négligeable devant l'autre. Cette même dernière formule est tout à fait exacte, sans avoir besoin de coefficient de correction, si la section est une ellipse (53).

Ces résultats (en ce qui regarde les sections carrées ou rectangles) sont confirmés par les expériences de Duleau et de Savart (78, 86).

Il est entendu qu'ils ne sont applicables *qu'aux valeurs très-petites de l'inclinaison maximum des fibres sur les sections,* en sorte que, même dans les limites de stabilité de la contexture, ils pourraient cesser de s'appliquer si cette inclinaison devenait notable.

6° Il y a une infinité de bases, autres que l'ellipse et le rectangle, pour lesquelles on peut déterminer exactement et d'une manière simple les lois de la torsion des prismes. On peut même

choisir à volonté, parmi les intégrales particulières d'une certaine équation $\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0\right)$ l'expression du déplacement longitudinal u donnant le gauchissement et les glissements, et en déduire immédiatement (art. 91) la forme du contour de la base du prisme dont les points éprouveraient ce déplacement par la torsion. En se bornant aux bases dont l'équation est algébrique et finie, et d'abord à celles qui sont symétriques et égales dans deux sens rectangulaires, l'on trouve, par la discussion de l'équation du quatrième degré, que si la base est un carré à côtés curvilignes légèrement concaves (formé par la rencontre de deux hyperboles), M_x n'est (art. 101) que les 0,78 de $GJ\theta$; et, en discutant l'équation du huitième degré, que si la base est une sorte d'étoile à quatre pointes arrondies dont les deux petits diamètres sont la moitié des grands, M_x est seulement les 0,54 de $GJ\theta$, en sorte que, pour même moment d'inertie de la base, un pareil prisme résisterait deux fois moins à la torsion qu'un cylindre circulaire. La faiblesse de ce résultat s'explique en considérant que les quatre saillies cèdent et s'infléchissent de manière à rester à peu près perpendiculaires aux fibres, d'où il suit qu'il ne faut pas compter sur les pièces à côtes ou à nervures pour les parties des constructions soumises à un effort de torsion.

En passant aux sections non-symétriques ou non égales dans les deux sens, l'on trouve, entre autres résultats nombreux (art. 105, notes), par l'équation du troisième degré, que *si la base est un triangle équilatéral,* on a justement $M_x = 0{,}6\ GJ\theta$, et, par celle du quatrième degré, que si la base se compose de deux orbes séparés, distants de quatre fois leur diamètre, on a seulement $M_x = 0{,}0186\ GJ\theta$, ou $1/54^{\text{ième}}$ seulement du produit $GJ\theta$.

La résistance élastique à une torsion donnée, bien loin d'être proportionnelle, pour diverses sections, à leur moment d'inertie polaire, est à peu près, *pour même quantité de matière ou même superficie ω de la section,* en raison inverse de ce moment J, et l'on a, en général, $\frac{M_x}{G\theta} =$ de $\frac{1}{39}$ à $\frac{1}{45}$ de $\frac{\omega^4}{J}$. La section circulaire est donc

celle de plus grande résistance pour une quantité donnée de matière.

7° Si, de l'évaluation de la réaction ou résistance élastique à une torsion donnée, l'on passe à la recherche de la résistance à la rupture ou à la disjonction des fibres par torsion, l'on trouve que les points appelés *dangereux* par M. Poncelet (art. 25), c'est-à-dire les points où la désagrégation risque le plus de se manifester, ne sont pas les points les plus éloignés de l'axe de torsion, comme le voulait l'ancienne théorie, mais sont au contraire *les points du contour de la section qui sont les plus proches de cet axe.*

Ainsi, pour une section elliptique (art. 61), les points dangereux sont aux extrémités du plus petit des deux axes de figure.

Pour une section rectangulaire (82, 88), ils sont aux milieux des deux plus grands côtés. Pour le carré curviligne du quatrième degré (103) et pour l'étoile du huitième degré (104) ils sont aux extrémités des deux plus petits diamètres; et, pour le triangle équilatéral, aux milieux des côtés. La raison en est que les sections, sollicitées à ployer de manière à rester généralement perpendiculaires ou presque perpendiculaires aux arêtes du prisme les plus éloignées de l'axe, doivent, par cela seul, prendre sur les arêtes les plus proches une plus grande inclinaison : or, c'est cette inclinaison mutuelle acquise par des lignes et par une surface primitivement à angle droit qui mesure le danger relatif de disjonction par glissement des sections l'une sur l'autre, et aussi des fibres l'une devant l'autre.

Cette inclinaison la plus grande de la fibre ou de l'arête (non vive) sur la section devenue courbe est facile à calculer dans chaque cas; elle est, généralement, $1^{\text{fois}},35$ à 2 fois ce qu'elle serait au même point si la section restait plane. On peut dresser ainsi une table des coefficients numériques dont il faut affecter des expressions d'une forme simple pour avoir, sans recourir aux séries et autres formules compliquées, la limite à imposer au moment des forces qui font tordre, pour ne mettre nulle part la cohésion en péril.

Cette situation du point dangereux est clairement montrée (art. 62, 76, 88) par des épures ou par des reliefs[1]. Elle est confirmée par l'expérience, car la torsion désagrége les barres de fer ou de bois en produisant des fentes longitudinales; et si l'on tord un prisme de caoutchouc rectangulaire ou carré, l'on voit les lignes droites tracées transversalement sur ses faces se courber en S de manière à rester normales aux quatre arêtes vives, et à s'incliner sur les arêtes intermédiaires, de manière à prendre le maximum d'inclinaison sur celles qui passent par les milieux des grands côtés des bases.

La résistance à la rupture par torsion, pour même quantité de matière ou pour même superficie de la section, décroît encore plus, à mesure de l'augmentation du moment polaire J, que la résistance élastique à une torsion donnée.

8° Ces résultats sont tout à fait indépendants du rapport qui peut exister entre les *élasticités* longitudinale et transversale du prisme (art. 50). On peut les étendre au cas où les élasticités de glissement ne sont pas les mêmes, non plus que les cohésions, dans les divers sens transversaux; il suffit pour cela de substituer (106 à 114), dans les formules de résistance élastique, au rapport des deux dimensions principales des sections, le rapport de leurs quotients par les racines carrées des élasticités dans leurs sens respectifs, et d'introduire d'une manière analogue les deux *cohésions principales* dans les formules de résistance à la rupture (108, 113, 138). Il en résulte que lorsque l'élasticité transversale n'est pas constante, les sections des cylindres circulaires se *gauchissent* par la torsion comme les sections des cylindres elliptiques.

9° Les lois de la torsion des prismes creux s'obtiennent par les mêmes formules que celles de la torsion des prismes pleins, sous

[1] Mon ancien camarade M. Bardin, chef des travaux graphiques à l'École polytechnique, doit bientôt ajouter, à sa jolie collection de modèles en plâtre, cinq reliefs représentant des portions de prismes tordus et les formes courbes affectées par leurs sections primitivement planes.

cette condition générale (art 116 à 118), que les équations des contours de la section extérieure et de la section intérieure ou d'évidement ne diffèrent que par une constante.

10° Lorsqu'un prisme est à la fois sollicité à l'extension longitudinale, au glissement transversal, à la flexion dans deux sens perpendiculaires et à la torsion, l'on n'a (119, 120), pour obtenir les déplacements totaux de ses points, qu'à ajouter ou *composer* simplement ensemble ceux qui auraient lieu s'il n'était soumis qu'à chacune de ces quatre sortes d'efforts.

11° Pour avoir alors la condition de la résistance de sa matière à ces actions simultanées, il faut (24 à 27) exprimer que nulle part et en aucune direction la proportion de l'écartement ou du rapprochement des molécules n'excède une certaine limite au delà de laquelle il y aurait danger de rupture prochaine ou éloignée, et qui peut varier avec la direction si le corps (du reste homogène) n'a pas la même contexture en tous sens. L'expression analytique qui en résulte (art. 121) se simplifie dans les cas les plus usuels (122), et peut alors se démontrer directement d'une manière facile (123). On en déduit, entre autres conséquences pratiques, que pour avoir le cube du diamètre d'un cylindre circulaire capable de résister à la fois à un effort qui tend à le fléchir et à un effort qui tend à le tordre (comme un arbre tournant de machine sur lequel sont montées deux roues d'engrenage ou deux poulies à courroies), il faut (128, 129) prendre les trois huitièmes de la valeur qu'on donnerait à ce cube si le cylindre n'éprouvait que le premier effort, et l'ajouter à la racine carrée de la somme des secondes puissances des cinq huitièmes du même cube, et de la valeur qu'on lui attribuerait si le cylindre n'éprouvait que le second effort; ce qui donne un résultat excédant quelquefois de plus de moitié le plus considérable de ceux qu'on obtient en regardant l'effort de flexion et l'effort de torsion comme s'exerçant isolément et successivement. La même règle s'emploie pour déterminer l'aire de la section d'un boulon ou d'un rivet sollicité à la fois à 'extension et au cisaillement. Elle s'applique encore pour avoir le

produit de la largeur par le carré de l'épaisseur d'un prisme rectangle sollicité à fléchir *à plat*, et en même temps à tordre (131). Mais lorsqu'il est sollicité ou *de champ*, ou obliquement à ses faces latérales, la règle est un peu différente parce que le point *dangereux* peut se trouver ailleurs qu'au milieu d'un des côtés de la base (132). On en déduit d'autres règles pour les *prismes courts* sollicités à rompre à la fois par flexion et par glissement sans torsion (126), en distinguant les cas où la section la plus exposée est dans l'impossibilité de s'infléchir (125, 127).

136. *Récapitulation des formules et règles pratiques.*

Soient, en général,

a, la longueur d'une pièce solide prismatique ou presque prismatique[1], dont l'*axe* passant par les centres de gravité des sections qui lui sont perpendiculaires, est rectiligne.

ω, l'aire de l'une de ces sections transversales.

I et I′ le *plus petit et le plus grand moment d'inertie* de ω autour de droites qui y sont tracées par son centre, ou les moments d'inertie autour de ses deux *axes principaux*.

y et z, les coordonnées transversales d'un point quelconque, ou du centre d'un élément quelconque $d\omega$ de la section, par rapport à ces deux axes principaux d'inertie, qu'on suppose avoir les mêmes directions sur toutes les sections. En sorte que $I = \int_0^\omega z^2 d\omega$, $I' = \int_0^\omega y^2 d\omega$.

x, la coordonnée longitudinale, comptée sur l'axe de la pièce.

$J = I + I'$, le moment d'inertie *polaire* de ω, ou son moment d'inertie autour de son centre de gravité.

[1] Bien que, dans les chapitres II à XI, nous ne nous soyons occupés que de prismes, nous croyons pouvoir étendre approximativement les résultats, pour la pratique, aux pièces ou portions de pièces dont la section varie lentement et avec continuité, ce qui nous permettra de donner quelques formules *d'égale résistance*.

r, le rayon vecteur $= \sqrt{y^2 + z^2}$; en sorte que $J = \int_0^\omega r^2 \, d\omega$.

r, plus particulièrement, le rayon de la section ω si elle est circulaire.

$2b$ et $2c$ son plus grand et son plus petit côté si elle est rectangulaire, ou son plus grand et son plus petit axe si elle est d'une forme elliptique ou analogue.

Soient, cette pièce ou portion de pièce venant à être sollicitée par diverses forces extérieures que *l'on suppose agir seulement aux extrémités ou très-proche des extrémités* (les faces latérales n'étant soumises, intermédiairement, qu'à la pression atmosphérique dont on n'a pas à tenir compte si les bases la supportent également et si l'on ne compte les déplacements qu'en sus de ceux qu'elle a produits):

P_x, P_y, P_z les sommes de composantes, dans les sens x, y, z, des forces qui agissent à l'une des extrémités (les mêmes sommes, pour les forces agissant à l'autre extrémité, doivent pour l'équilibre être égales et contraires).

$M_x = M''$, $M_y = M' \cos \varphi$, $M_z = M' \sin \varphi$ les trois sommes des moments de ces forces: 1° autour de l'axe des x, ou de l'axe de la pièce; 2° et 3° autour des deux axes principaux de la section ω, parallèles aux y et aux z.

En sorte que M_x ou M'' est le *moment de torsion*

Et $M' = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ le *moment de flexion*

auxquels doivent être égaux et opposés le moment, autour de l'axe longitudinal x de la pièce et le plus grand moment, autour de transversales menées sur ω par son centre, des actions intérieures ou *pressions* qui s'exercent à travers les divers éléments $d\omega$ d'une même section;

Et $\varphi = \text{arctang} \frac{M_z}{M_y}$ est l'angle que forme le *plan de sollicitation à fléchir* ou le plan du moment M', avec le *plan de plus facile flexion* qui est le plan xz.

Soient, par suite des déplacements que ces forces ont fait éprouver aux points de la pièce solide :

ψ, l'angle (différent de φ toutes les fois qu'on n'a pas $I = I'$, ou $\varphi = o$ ou $\frac{\pi}{2}$) que fait, avec le même plan xz de plus facile flexion, le *plan de flexion effective*, ou le plan dans lequel se courbera l'axe de la pièce.

ρ, le rayon de la courbure prise par cet axe, à l'endroit où il traverse la section ω.

ρ_y, ρ_z les rayons de courbure, au même endroit, des projections de la courbe d'axe sur les plans xy, xz.

θ, la *torsion* de la pièce, ou l'angle très-petit dont une section voisine de ω a tourné devant celle ω, dans le sens de y en z, divisé par la petite distance de ces deux sections; cet angle étant évalué par l'arc parcouru à l'unité de distance de l'axe de torsion.

En sorte que si θ est constant d'un bout à l'autre, et si α est le nombre des degrés sexagésimaux dont l'une des sections extrêmes a tourné devant l'autre, l'on a

$$\theta = \frac{1}{a}\frac{2\pi}{360}\alpha.$$

δ_x la *dilatation longitudinale*, ou la proportion très-petite de l'augmentation de longueur (positive ou négative) d'une petite portion de la *fibre* ou de l'élément prismatique ayant l'élément $d\omega$ pour section droite.

γ_{xy}, γ_{xz} les *glissements* dans les sens xy, xz, au centre de l'élément $d\omega$, ou les diminutions très-petites (positives ou négatives) éprouvées par les angles primitivement droits formés, avant les déplacements, par une petite ligne matérielle parallèle aux x, et par de petites lignes matérielles parallèles aux y et aux z positifs, se croisant à ce centre de $d\omega$.

$\gamma_x = \sqrt{\gamma^2_{xy} + \gamma^2_{xz}}$ le *glissement principal* en cet endroit, ou la diminution de l'angle primitivement droit de la petite ligne x qui s'est inclinée sur l'axe, avec le plan de l'élément $d\omega$ qui s'est incliné généralement aussi sur son plan primitif.

$\mathcal{g}$, le plus grand glissement principal aux divers points de la section.

γ, le nombre (qu'on trouve compris entre 1 et 2) par lequel il faut multiplier l'inclinaison que la torsion donne, sur l'axe, à l'arête du prisme qui en est la plus rapprochée, pour avoir le plus grand glissement $\mathcal{g}$, ou l'inclinaison prise par cette même arête sur l'élément de la section, que la torsion a incliné aussi.

Soient, enfin, pour la matière dont la pièce solide est composée:

E_x, ou simplement E *le coefficient* d'élasticité d'extension longitudinale, ou un nombre tel que $E\partial_x\, d\omega$ soit la force de traction capable de donner la dilatation ∂_x à la fibre ayant pour base l'élément $d\omega$ de la section et n'éprouvant aucune action latérale dans un sens perpendiculaire à sa longueur.

R_x, ou simplement R un nombre tel que $\frac{R}{E}$ exprime la plus grande valeur que l'on puisse faire acquérir à cette dilatation ∂_x sans risquer de produire, à la longue, une rupture ou une désagrégation (voyez art. 24).

G', G'' les *coefficients d'élasticité de glissement* dans les sens xy, xz, ou des nombres tels que $G'\mathcal{g}_{xy}\, d\omega$, $G''\mathcal{g}_{xz}\, d\omega$ soient les efforts à appliquer *tangentiellement* à l'élément $d\omega$ dans les sens y et z pour produire les glissements $\mathcal{g}_{xy}$, $\mathcal{g}_{xz}$.

(On suppose que la matière, homogène quoique de contexture inégale en divers sens, a trois plans de symétrie de contexture, qui sont nécessairement des plans principaux d'élasticité, se coupant parallèlement aux x, y, z.)

T', T'' des nombres tels que $\frac{T'}{G'}$, $\frac{T''}{G''}$ représentent les limites à imposer aux glissements $\mathcal{g}_{xy}$, $\mathcal{g}_{xz}$ pour que les dilatations obliques qui en sont la conséquence ne mettent pas en péril la cohésion de la matière.

G, la valeur de G' et G'' quand ils sont égaux.

T, la valeur de T' et T'' quand ils sont égaux.

En sorte qu'alors, s'il n'y a pas de dilatation dans les sens x, y, z, la condition de résistance à la rupture est simplement

$$T = \text{ou} > G\mathcal{g}.$$

On aura les formules suivantes :

A. *Formule générale de résistance à la rupture, de la pièce solide sollicitée simultanément à s'étendre ou se contracter longitudinalement, à fléchir, à tordre et à se déformer par des glissements transversaux inclinant ses fibres sur ses sections.*

Observation. Cette formule, qui est exacte, 1° quand $\mathcal{g}_{xy} = 0$, $\mathcal{g}_{xz} = 0$ à la fois; 2° quand $\partial_x = 0$; 3° quand $\mathcal{g}_{xy} = 0$ *ou* $\mathcal{g}_{xz} = 0$ au point de maximum (par exemple quand le prisme est rectangulaire et a ses faces latérales perpendiculaires aux y et aux z); 4° quand $G' = G''$, $T' = T''$, est approchée dans les autres cas.

(a) $1 = \text{ou} > \text{maximum de } \frac{1-\varepsilon''_1}{2}\frac{E\partial_x}{R} + \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon''_1}{2}\frac{E\partial_x}{R}\right)^2 + \left(\frac{G'\mathcal{g}_{xy}}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G''\mathcal{g}_{xz}}{T''}\right)^2}$,

formule où il faut faire

$\varepsilon''_1 = \frac{1}{5}$ à $\frac{1}{3}$ (voyez art. 122, 128) : on peut, sans altérer sensiblement les résultats faire constamment cette quantité inconnue $= \frac{1}{4}$, ou :

(a′) $$\frac{1-\varepsilon''_1}{2} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1+\varepsilon''_1}{2} = \frac{5}{8};$$

(a″) $$E\partial_x = \frac{P_x}{\omega} + M'\left(\frac{\cos\varphi}{I}z + \frac{\sin\varphi}{I'}y\right);$$

R successivement égal à sa valeur relative aux dilatations proprement dites, ou aux ∂_x positifs, et à sa valeur relative aux compressions, ou aux ∂_x négatifs, en changeant alors le signe du terme hors du radical pour le rendre positif.

(a‴) $$\mathcal{g}_{xy} = \mathcal{g}'_{xy} + \mathcal{g}''_{xy}, \quad \mathcal{g}_{xz} = \mathcal{g}'_{xz} + \mathcal{g}''_{xz}.$$

$\mathcal{g}'_{xy}$ et $\mathcal{g}'_{xz}$ étant les portions de glissement (le plus souvent négligeables) dues aux actions transversales $P_y = G' \int \mathcal{g}'_{xy} d\omega$, $P_z = G'' \int \mathcal{g}'_{xz} d\omega$ et qui, lorsque les sections peuvent s'infléchir

librement, sont données par les formules du cas de glissement seul (ci-après, paragraphe D, formules d_1 à d'''_1).

$\mathfrak{g}''_{xy}$ et $\mathfrak{g}''_{xz}$ étant les portions de glissements dues à la torsion, et données en fonction de θ, et, par suite, du moment $M_x = M''$, quand les sections peuvent gauchir librement, par les formules du cas de torsion seule (ci-après, paragraphe G et H, formule $\mathfrak{g}''_1$, $\mathfrak{g}''_2$, etc., h'_1, h'_2).

(a^{iv}) Mais $G'\mathfrak{g}'_{xy}$ étant pris $= \frac{P_y}{\omega}$, et $G''\mathfrak{g}'_{xz} = \frac{P_z}{\omega}$ si la section ω, *de forme quelconque*, est dans une de ces situations exceptionnelles où elle ne peut prendre l'inflexion en doucine que tendent à lui donner les actions transversales (voyez art. 125).

(a^{v}) Et $G'\mathfrak{g}''_{xy}$ étant pris $= \frac{-M_z G'}{G'I + G''I'} z$, et $G''\mathfrak{g}''_{xz} = \frac{M_z G''}{G'I + G''I'} y$ si cette section est dans une de ces situations exceptionnelles où elle ne peut prendre le gauchissement que la torsion tend à donner à toute section non circulaire.

B. *Extension longitudinale seule.*

(b) $$P_x = E\omega\,\delta_x; \quad \delta_x = \frac{P_x}{E\omega}.$$

(b′) Condition de résistance de la rupture :

$$\text{limite de } P_x = R\omega; \text{ ou } \omega = \text{ou} > \frac{P_x}{R}.$$

C. *Compression longitudinale seule.*

(c), (c′). Mêmes expressions (b), (b′) en donnant une autre valeur à R. On en donnerait aussi une autre à E, si l'on devait dépasser sensiblement les limites des effets non permanents. — Il est entendu aussi que P_x reste au-dessous de la force capable de faire fléchir par compression, et dont nous ne nous occupons pas ici.

D. *Glissement seul, des sections les unes devant les autres transversalement (cisaillement), ou des fibres les unes contre les autres (fente longitudinale).*

D_1. Si la section plane peut librement s'infléchir en doucine (art. 124, 125) :

1° Quand cette section est une ellipse, P_y étant $= 0$ (art. 40, form. 84, 85),

$$(d_1)\quad \begin{cases} \mathcal{G}'_{xy} = -\dfrac{P_z}{G'\omega}\dfrac{yz}{c^2}\dfrac{4+8\dfrac{\varepsilon G'}{E}\dfrac{b^2G''}{c^2G'}}{3+\dfrac{b^2G''}{c^2G'}}, \\ \mathcal{G}'_{xz} = \dfrac{4}{3}\dfrac{P_z}{G''\omega}\left[1-\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{\left(1-6\dfrac{\varepsilon G'}{E}\right)\dfrac{b^2G''}{c^2G'}}{6+2\dfrac{b^2G''}{c^2G'}}\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}-3\dfrac{y^2}{b^2}\right)\right]. \end{cases}$$

N. B. Si P_y n'est pas nul, l'on n'a qu'à ajouter des expressions composées réciproquement en $P_y, y, z, b, c, G', G'', \varepsilon, \varepsilon'$ comme celles-ci le sont en $P_z, z, y, c, b, G'', G', \varepsilon', \varepsilon$.

2° Quand cette section devient un cercle, ou quand $b = c = r$, $G' = G'' = G$, $\dfrac{\varepsilon G'}{E} = \dfrac{\varepsilon' G''}{E} = \dfrac{1}{10}$

$$(d'_1)\quad \mathcal{G}'_{xy} = -\frac{6}{5}\frac{P_z}{G\omega}\frac{yz}{r^2}+\frac{7}{5}\frac{P_y}{G\omega}\left(1-\frac{y^2}{r^2}-\frac{1}{7}\frac{z^2}{r^2}\right),\quad \mathcal{G}'_{xz} = \frac{7}{5}\frac{P_z}{G\omega}\left(1-\frac{z^2}{r^2}-\frac{1}{7}\frac{y^2}{r^2}\right)-\frac{6}{5}\frac{P_y}{G\omega}\frac{yz}{r^2}.$$

3° Quand la section est une *fausse ellipse*, courbe $\dfrac{y^4}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ comprise entre l'ellipse et le rectangle circonscrit[1], sollicitée seulement dans le sens z, en supposant $G' = G'' = G$, $\dfrac{\varepsilon G'}{E} = \dfrac{1}{10}$

$$(d''_1)\quad \begin{cases} \mathcal{G}'_{xy} = -\dfrac{P_z}{5GI}yz = -\dfrac{7}{10}\dfrac{P_z}{G\omega}\dfrac{y^2}{c^2},\quad \mathcal{G}'_{xz} = \dfrac{2}{5}\dfrac{P_z}{GI}(c^2-z^2) = \dfrac{7}{5}\dfrac{P_z}{G\omega}\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right) \\ \text{(outre } I = \dfrac{2}{7}c^2\omega\text{, l'on a } \omega = 3{,}4960\,bc). \end{cases}$$

4° Quand la section est un rectangle dont les côtés sont $2b$, $2c$ parallèlement aux y et z, $\mathcal{G}'_{xy}$ et $\mathcal{G}'_{xz}$ ont des expressions en

[1] *Mémoire sur la flexion*, présenté le 20 novembre 1854. Comptes rendus de l'Académie, t. XXXIX, p. 1029.

série trigonométrique compliquée, mais pouvant être approximativement réduites (fin de l'art. 40), à

$$(d'''_1)\quad \begin{cases} \mathfrak{g}'_{xy} = \dfrac{3}{2}\dfrac{P_y}{G'\omega}\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right), \text{ lorsque } c\sqrt{G'} = \text{ou} < b\sqrt{G''} \\ \mathfrak{g}'_{xz} = \dfrac{3}{2}\dfrac{P_z}{G''\omega}\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right) \text{ lorsque } b\sqrt{G''} = \text{ou} < c\sqrt{G'}. \end{cases}$$

Conditions de résistance à la rupture, pour toutes ces sections, $\mathfrak{g}'^{0}_{xy}$, $\mathfrak{g}'^{0}_{xz}$ étant les valeurs de $\mathfrak{g}'_{xy}$, $\mathfrak{g}'_{xz}$ au centre ou pour $y=0$, $z=0$

$$(d^{IV}_1)\qquad 1 = \text{ou} > \left(\frac{G'\mathfrak{g}'^{0}_{xy}}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G''\mathfrak{g}'^{0}_{xz}}{T''}\right)^2,$$

ce qui fait, approximativement,

$$(d^{V}_1)\qquad \text{Section rectangle } \omega = \text{ou} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{P_y^2}{T'^2}+\frac{P_z^2}{T''^2}},$$

ou, *exactement*, quand $P_y = 0$, $\dfrac{\varepsilon G''}{E} = \dfrac{1}{10}$:

$$(d^{VI}_1)\qquad \text{Section elliptique } \omega = \text{ou} > \frac{P_z}{T''}\,\frac{4+1{,}6\dfrac{b^2G''}{c^2G'}}{3+\dfrac{b^2G''}{c^2G'}}.$$

Section circulaire $b^2=c^2$, $G''=G'$, ou, plus généralement section elliptique $b^2G''=c^2G'$, et section en fausse ellipse $\dfrac{y^4}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ quand $G'=G''$ quel que soit le rapport entre b et c :

$$(d^{VII}_1)\qquad \omega = \text{ou} > \frac{7}{5}\frac{P_z}{T''};\ \text{limite } P_z = \frac{5}{7}\,T''\,\omega.$$

Ou, section elliptique et section rectangulaire (celle-ci exactement comme l'autre, en faisant le calcul au moyen de la formule trigonométrique du Mémoire cité sur la flexion) :

POUR $\dfrac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} =$	4	2	4/3	1	4/5	2/3	1/2	2/5	1/3	0
SECTION RECTANGULAIRE.										
$\omega = \text{ou} > \dfrac{3}{2}\dfrac{P_z}{T''}$ multiplié par	0,676	0,849	0,907	0,940	0,961	0,971	0,983	0,989	0,993	1
SECTION ELLIPTIQUE.										
$\omega = \text{ou} < \dfrac{7}{5}\dfrac{P_z}{T''}$ multiplié par	0,899	0,942	0,977	1	1,015	1,028	1,035	1,040	1,043	1,050

D_2. Si la section, de *forme quelconque*, est dans une de ces situations où elle ne peut prendre d'inflexion (art. 125):

$$(d_2)\qquad \vartheta'_{xy} = \frac{P_y}{G'\omega},\quad \vartheta'_{xz} = \frac{P_z}{G''\omega},$$

$$(d'_2)\qquad \text{Résistance à la rupture } \omega = \text{ou} > \sqrt{\frac{P_y^2}{T'^2} + \frac{P_z^2}{T''^2}},$$

$$(d''_2)\qquad \text{ou lim. } P = T\omega, \text{ si } T' = T'' = T \text{ et si l'on fait } \sqrt{P_y^2 + P_z^2} = P.$$

D_3 *S'il y a incertitude*, prendre les expressions (d_1) à (d_1^{VII}) qui supposent une inflexion, plutôt que celles (d_2) à (d''_2) qui n'en supposent pas, parce qu'elles donnent plus de sécurité.

E. *Flexion seule.*

$$(e)\qquad \text{Inclinaison } \psi \text{ du } \textit{plan de flexion effective}, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{I}{I'}\operatorname{tang}\varphi.$$

Il est compris entre le plan de sollicitation, qui fait l'angle φ, et le plan xz de plus facile flexion. La déviation $\varphi - \psi$ est à son maximum quand $\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\frac{I}{I'}}$.

$$(e')\qquad \begin{cases} \text{Courbure } \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M'}{E}\sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{I^2} + \dfrac{\sin^2\varphi}{I'^2}}, \\ \text{Ses projections } \dfrac{1}{\rho_z} = \dfrac{\cos\psi}{\rho} = \dfrac{M'\cos\varphi}{EI},\quad \dfrac{1}{\rho_y} = \dfrac{\sin\psi}{\rho} = \dfrac{M\sin\varphi}{EI'}. \end{cases}$$

Flèche, ou plus grande ordonnée de l'axe fléchi, à une distance a du point où le moment de flexion est $M' = Pa = a\sqrt{P_y^2 + P_z^2}$:

$$(e'')\qquad \begin{cases} f = \dfrac{Pa^3}{3E}\sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{I^2} + \dfrac{\sin^2\varphi}{I'^2}} = \dfrac{a^3}{3E}\sqrt{\left(\dfrac{P_z}{I}\right)^2 + \left(\dfrac{P_y}{I'}\right)^2} \\ \text{Ses projections } f_z = \dfrac{Pa^3\cos\varphi}{3EI} = \dfrac{P_z a^3}{3EI},\quad f_y = \dfrac{Pa^3\sin\varphi}{3EI'} = \dfrac{P_y a^3}{3EI'}. \end{cases}$$

Dilatations (positives ou négatives) des fibres par suite de la flexion

$$(e''')\qquad \delta_x = \frac{z\cos\psi + y\sin\psi}{\rho} = \frac{M'\cos\varphi}{EI}z + \frac{M'\sin\varphi}{EI'}y.$$

$$(e^{IV})\qquad \begin{cases} \text{Résistance à la rupture } R \underset{\text{ou}}{=>} \max.\dfrac{M'\cos\varphi}{I}z + \dfrac{M'\sin\varphi}{I'}y, \\ \text{ou } R \underset{\text{ou}}{=>} \max.\left(\dfrac{P_z}{I}z + \dfrac{P_y}{I'}y\right)a, \end{cases}$$

ou

$$(e^v)\quad \begin{cases} \text{Section rectangle, lim. } M' = \dfrac{4\,R\,b^2c^2}{3\,(b\cos\varphi + c\sin\varphi)}\,;^1 \\ \text{Section elliptique, lim. } M' = \dfrac{\pi\,R\,b^2c^2}{4\sqrt{b^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

Si l'on a, ou $I = I'$, ou $\varphi = 0$, ces formules se réduisent à celles connues suivantes (v étant la distance $= z\cos\varphi + y\sin\varphi$ d'un point quelconque de la section à une perpendiculaire au plan de sollicitation menée par son centre, et v′ sa plus grande valeur)

$$(e_1, e'_1, e''_1, e'''_1, e^{IV}_1)\quad \psi = 0,\ \frac{1}{\rho} = \frac{M'}{I},\ f = \frac{Pa^3}{3EI},\ \delta_x = \frac{M'}{EI}v,\ \text{lim. } M' = \frac{RI}{v'},$$

(e_2, etc.). Si $\varphi =$ angle droit, mêmes formules sauf I′ au lieu de I.

N. B. On se dispense de donner les valeurs particulières et très-connues du moment d'inertie I et du quotient $\frac{I}{v'}$, pour les diverses formes des sections.

F. *Flexion, avec extension ou compression longitudinale.*

Mêmes formules que pour la flexion seule, sauf, au lieu de (e''') et (e^{IV}) :

$$(f''')\text{ et }(f^{IV})\quad \begin{cases} \delta_x = \pm\dfrac{P_x}{E\omega} + \dfrac{M'\cos\varphi}{EI}z + \dfrac{M'\sin\varphi}{EI}y; \\ R = \text{ou} > \text{max.}\ \pm\dfrac{P_x}{\omega} + \dfrac{M'\cos\varphi}{I}z + \dfrac{M'\sin\varphi}{I'}y. \end{cases}$$

Le signe inférieur du $\pm$ est relatif au cas où P_x tend à comprimer; mais on doit prendre alors toujours le second membre de la seconde équation positivement.

G. *Torsion seule.*

1° Cas d'égale contexture transversale, ou de $\begin{cases} G' = G'' \text{ (représenté par G)} \\ T' = T'' \text{ (représenté par T).} \end{cases}$

Observations. 1° C'est sous la première forme des expressions

[1] Cette formule fournit des résultats très-différents de ceux de la formule $\text{lim. } M' = \dfrac{4\,R\,b\,c\,(b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi)}{3\,(b\sin\varphi + c\cos\varphi)}$ donnée, dans quelques ouvrages, en supposant que la plan de flexion effective se confond toujours avec le plan de sollicitation à fléchir.

de M_x et lim. M_x qu'il est le plus commode de les employer. Leurs autres formes ont pour objet principal d'en comparer les valeurs pour diverses formes de section, à *égale superficie* ω, ou pour même quantité de matière;

2° La *limite de* M_x résulte constamment de la substitution, dans la première expression de M_x, à la place de $G\theta$, de sa valeur tirée de celle de γ égalée à $\frac{T}{G}$;

3° Il n'est pas besoin, lorsqu'il n'y a que torsion, de considérer s'il y a quelque section astreinte à rester plane, ou empêchée de se gauchir, car les valeurs $M_x = G\theta J$, limite de $M_x = \frac{TJ}{\text{(le plus grand rayon vecteur)}}$ qu'on aurait pour cette section exceptionnelle, sont toujours plus fortes que celles ci-après, qui conviennent aux autres sections.

G_1. *Section* circulaire, *de rayon* r.

$$(g_1) \qquad \omega = \pi r^2,\ I = I' = \frac{\pi r^4}{4},\ J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{\omega^2}{6{,}2832},$$

$$(g'_1) \quad M_x = G\theta\frac{\pi r^4}{2} = G\theta J;\ \text{ou } M_x = \frac{G\theta\omega^2}{2\pi} = \frac{G\theta\omega^2}{6{,}2832} = \frac{G\theta\omega^4}{4\pi^2 J} = \frac{G\theta}{39{,}4784}\frac{\omega^4}{J},$$

$$(g''_1) \qquad \gamma_{xy} = -\theta z,\ \gamma_{xz} = \theta y,\ \gamma = \theta r,\ \text{ou } \gamma = 1,$$

(g'''_1) Résist. à rupt. par torsion : lim. $M_x = \frac{\pi r^3}{2}T = \frac{TJ}{r} = \frac{T\omega^3/2}{2\sqrt{\pi}} = \frac{T\omega^3/2}{3{,}5449}$.

G_2. Section elliptique $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ b > c$.

$$(g_2) \qquad \omega = \pi bc,\ I = \frac{\pi bc^3}{4},\ I' = \frac{\pi b^3 c}{4},\ J = \frac{\omega}{4}(b^2 + c^2) = \frac{\omega^2}{6{,}2832.\frac{2bc}{b^2+c^2}}.$$

$$(g'_2) \quad M_x = G\theta\frac{\pi b^3 c^3}{b^2+c^2} = \frac{4G\theta}{\frac{1}{I}+\frac{1}{I'}} = \frac{G\theta\omega^2}{3{,}1416\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)} = \frac{G\theta\omega^4}{4\pi^2 J} = \frac{G\theta}{39{,}4784}\frac{\omega^4}{J}.$$

$$(g''_2) \quad \gamma_{xy} = \frac{-2b^2\theta}{b^2+c^2}z,\ \gamma_{xz} = \frac{2c^2\theta}{b^2+c^2}y,\ \gamma = \frac{2b^2}{b^2+c^2}\theta c;\ \text{ou } \gamma = \frac{2}{1+\frac{c^2}{b^2}}.$$

$$(g''_2) \qquad \text{Lim. } M_x = \frac{\pi b c^2}{2} T = \frac{2I}{c} T = \frac{T\omega^{3/2}}{3{,}5449\sqrt{\frac{b}{c}}}.$$

G$_3$. Section carrée. Côté $2b$.

$$(g_3) \qquad \omega = 4b^2,\ I = I' = \frac{4}{3}b^4,\ J = \frac{8}{3}b^4 = \frac{\omega^2}{6},$$

$$(g'_3) \qquad \begin{cases} M_x = 2{,}249233\ G\theta b^4 = 0{,}843462\ G\theta J \\ \quad = 0{,}8833\ \dfrac{G\theta\omega^2}{2\pi} = \dfrac{G\theta\omega^2}{7{,}1136} = \dfrac{G\theta}{42{,}6812}\dfrac{\omega^4}{J}, \end{cases}$$

$$(g''_3) \qquad \begin{cases} \gamma = 1{,}35063\, b\theta, \text{ ou } \gamma = 1{,}35063; \\ \gamma_{xy}(\text{pour } z = b) = \gamma_{xz}(\text{pour } y = b) = \gamma' b\theta, \\ \dfrac{\gamma'}{\gamma} \text{ étant donné pour chaque valeur de } \dfrac{y}{b} \text{ ou } \dfrac{z}{b} \text{ par la deuxième} \\ \text{partie de la table finale, colonne } \dfrac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 1. \end{cases}$$

$$(g'''_3) \qquad \begin{cases} \text{Lim. } M_x = 1{,}66534\, b^3 T \\ \quad = 0{,}6245\dfrac{2I}{b} T = 0{,}7379\dfrac{T\omega^{3/2}}{2\sqrt{\pi}} = \dfrac{T\omega^{3/2}}{4{,}8039}. \end{cases}$$

G$_4$. Section rectangle, côtés $2b$, $2c$; $b > c$.

$$(g_4) \quad \omega = 4bc,\ I = \frac{4}{3}bc^3,\ I' = \frac{4}{3}b^3c,\ J = \frac{4}{3}bc(b^2+c^2) = \frac{\omega^2}{6.\dfrac{2bc}{b^2+c^2}}.$$

$$(g'_4) \quad M_x = \mu G\theta bc^3 = \mu' G\theta.\frac{16b^3c^3}{3(b^2+c^2)} = \mu'\frac{4G\theta}{\frac{1}{I}+\frac{1}{I'}} = \frac{G\theta\omega^2}{16\frac{b}{\mu}\frac{c}{}} = \frac{G\theta}{\frac{192}{\mu}\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)}\frac{\omega^4}{J},$$

μ étant un coefficient entre 2,249 et 5,333 pris dans la table finale; ou $\mu = \frac{16}{3} - \lambda\frac{c}{b}$, λ étant pris dans la même table, mais ne variant qu'entre 3,08 et 3,36, ou étant représenté approximativement et empiriquement par

$$\lambda = 3{,}36\left(1 - \frac{c^4}{12b^4}\right);$$

Et μ', variable de 0,843 à 1, étant pris dans la même table, mais restant à peu près constant $= 0{,}85$ jusqu'à $\frac{b}{c} = 2$.

(g''_4) g_{xy} (pour $z=c$) $= -\gamma' c\theta$; g_{xz} (pour $y=b$) $= \gamma'_1 b\theta$; $g = \gamma c\theta$;

γ (entre 1,35 et 2), $\frac{\gamma'}{\gamma}$ et $\gamma'_1 = \frac{\gamma'_1}{\gamma_1}\gamma_1$ étant pris dans la table finale.

$$(g'''_4) \qquad \text{Lim. } M_x = \frac{\mu}{\gamma} b c^2 T = \frac{3}{8}\frac{\mu}{\gamma}\frac{2I}{c} T = \frac{T\omega^{3/2}}{8\frac{\gamma}{\mu}\sqrt{\frac{b}{c}}}.$$

$\frac{\mu}{\gamma}$ étant fourni par la même table. Ou bien l'on peut prendre empiriquement et approximativement

$$(g^{IV}_4) \qquad \text{Lim. } M_x = \frac{40 b^2 c^2 T}{15 b + 9 c} = \frac{T\omega^{3/2}}{2\left(\sqrt{\frac{b}{c}} + 0{,}6\sqrt{\frac{c}{b}}\right)}.$$

G_5. Section triangulaire équilatérale; k le côté.

$$(g_5) \qquad \omega = \frac{\sqrt{3}}{4}k^2,\ J = 2I = 2I' = \frac{k^4\sqrt{3}}{48} = \frac{\omega^2\sqrt{3}}{9},$$

$$(g'_5) \qquad M_x = \frac{3}{5} G J\theta = 0{,}6\, G J\theta = \frac{G\theta\omega^2}{5\sqrt{3}} = \frac{G\theta\omega^2}{8{,}685} = \frac{G\theta\omega^4}{45\sqrt{3}\,J},$$

(g''_5) $g_{xy} = 0$ et $g_{xz} = -\left(\frac{k}{4} - \frac{z^2}{k}\right)\theta\sqrt{3}$ sur le côté parallèle aux y; $\gamma = 1{,}5$,

$$(g'''_5) \qquad \text{Lim. } M_x = \frac{0{,}8J\sqrt{3}}{k} T = \frac{k^3}{20} T = \frac{2\sqrt[4]{3}}{15} T\omega^{3/2} = \frac{T\omega^{3/2}}{5{,}6988}.$$

G_6. Section carrée curviligne à angles arrondis $\frac{y^2+z^2}{r_0^2} - 0{,}4\,\frac{y^4 - 6y^2z^2 + z^4}{r_0^4} = 0{,}6$.
(Équation polaire $\frac{r^2}{r_0^2} - 0{,}4\,\frac{r^4}{r_0^4}\cos 4\alpha = 0{,}6$; $2r_0$ est le plus grand diamètre, $r_0\sqrt{2}$ est le plus petit.)

$$(g_6) \qquad \omega = 2{,}0636\, r_0^2,\ J = 2I = 2I' = 0{,}7174\, r_0^4 = 1{,}01085\,\frac{\omega^2}{6}.$$

(g'_6) $M_x = 0{,}5873\, G\theta\, r_0^4 = 0{,}8186\, G\theta J = \dfrac{G\theta\omega^2}{7{,}2507} = \dfrac{G\theta}{43{,}045}\dfrac{\omega^2}{J}$.

(g''_6) $\begin{cases} g_{xy} = -\theta r\left(\sin\alpha + 0{,}8\dfrac{r^2}{r_0^2}\sin 3\alpha\right),\ g_{xz} = \theta r\left(\cos\alpha - 0{,}8\dfrac{r^2}{r_0^2}\cos 3\alpha\right); \\ g = 0{,}7\sqrt{2}.\,\theta r_0 = 0{,}99\,\theta r_0;\ \gamma = 1{,}400. \end{cases}$

(g'''_6) $\qquad$ Lim. $M_x = 0{,}5933\, r_0^3\, T = \dfrac{T\,\omega^3/_2}{4{,}9967}$.

G_7. Section carrée curviligne du quatrième degré, à angles aigus et côtés concaves à $\frac{1}{22}$ de flèche environ, $(y^2+z^2+2yz\sqrt{2}-r_0^2)(y^2+z^2-2yz\sqrt{2}-r_0^2)=0$ (ou, équation polaire $\dfrac{r^2}{r_0^2} - 0{,}5\dfrac{r^4}{r_0^4}\cos 4\alpha = 0{,}5$); $2r_0$ est le plus grand diamètre, 0,6436. $2r_0$ est le plus petit.

(g_7) $\omega = 1{,}7628\, r_0^2$, $J = 2I = 2I' = 0{,}5259\, r_0^4 = 1{,}0155\dfrac{\omega^2}{6}$.

(g'_7) $M_x = 0{,}4088\, G\theta\, r_0^4 = 0{,}7783\, G\theta J = \dfrac{G\theta\omega^2}{7{,}5921} = \dfrac{G\theta}{45{,}34}\dfrac{\omega^4}{J}$.

(g''_7) $\begin{cases} g_{xy} = -\theta r\left(\sin\alpha + \dfrac{r^2}{r_0^2}\sin 3\alpha\right),\ g_{xz} = \theta r\left(\cos\alpha - \dfrac{r^2}{r_0^2}\cos 3\alpha\right); \\ g = \theta r_0\sqrt{2\sqrt{2}-2} = 0{,}9102\, r_0;\ \gamma = \sqrt{2} = 1{,}4142. \end{cases}$

(g'''_7) $\qquad$ Lim. $M_x = 0{,}4492\, r_0^3\, T = \dfrac{T\,\omega^3/_2}{5{,}2103}$.

G_8. Section en étoile à quatre pointes arrondies, du huitième degré. (Équation polaire $\dfrac{r^2}{r_0^2} - a\dfrac{r^4}{r_0^4}\cos 4\alpha + \dfrac{a}{4}\dfrac{r^8}{r_0^8}\cos 8\alpha = 1 - \dfrac{3a}{4}$, où $a = \dfrac{48}{49}.\dfrac{16}{17}$; $2r_0$ est le plus grand diamètre; le plus petit est moitié moindre $= r_0$.)

(g_8) $\omega = 1{,}2202\, r_0^2$, $J = 2I = 2I' = 0{,}2974\, r_0^4 = 1{,}1985\dfrac{\omega^2}{6}$.

(g'_8) $M_x = 0{,}15983\, G\theta r_0^4 = 0{,}5374\, G\theta J = \dfrac{G\theta\omega^2}{9{,}3152} = \dfrac{G\theta}{47{,}41}\dfrac{\omega^4}{J}$.

$$(g''_8)\quad \begin{cases} \mathcal{G}_{xy} = -\theta r\left(\sin\alpha + 2a\frac{r^2}{r_0^2}\sin 3\alpha - a\frac{r^6}{r_0^6}\sin 7\alpha\right), \\ \mathcal{G}_{xz} = \theta r\left(\cos\alpha - 2a\frac{r^2}{r_0^2}\cos 3\alpha + a\frac{r^6}{r_0^6}\cos 7\alpha\right), \\ \mathcal{G} = 0{,}737695\,\theta r_0,\ \gamma = 1{,}4754. \end{cases}$$

$$(g'''_8)\qquad \text{Lim. } M_x = 0{,}21667\ T\ r_0^3 = \frac{T\omega^{3/2}}{6{,}2209}.$$

G_9. Section d'une autre forme que celles ci-dessus.

Si l'on n'a pas le loisir de construire, en donnant des valeurs numériques convenables aux coefficients des équations en y et z ou en r et α de l'art. 91, une courbe fermée qui se rapproche du contour de la section donnée, on se contentera de mesurer son aire ω et son moment polaire J. Et, du nombre par lequel il faudra diviser ω^2 pour avoir J, ainsi que de la forme du contour (art. 115), l'on déduira, par analogie avec celles ci-dessus, les grandeurs approchées des nombres par lesquels il faut diviser $G\theta\omega^2$, ou plutôt $\frac{G\theta\omega^4}{J}$, pour avoir M_x, et $T\omega^{3/2}$ pour avoir lim. M_x.

H. *Torsion seule.*

2° Cas d'inégale contexture, mais de trois plans de symétrie ou principaux d'élasticité se coupant suivant les x, y, z.

H_1 Section elliptique ou circulaire $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$$(h_1)\qquad M_x = \theta\,\frac{\pi b^3 c^3}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} = \frac{4\theta}{\frac{1}{G'I} + \frac{1}{G''I'}}.$$

$$(h'_1)\qquad \mathcal{G}_{xy} = \frac{-2\frac{b^2}{G'}\theta}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}}z,\quad \mathcal{G}_{xz} = \frac{2\frac{c^2}{G''}\theta}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}}y.$$

$$(h''_1)\quad \begin{cases} \text{Lim. } M_x = \frac{\pi b c^3}{2}T' = \frac{2I}{c}T' & \text{si } \frac{b}{c} > \frac{T'}{T''} \\ \text{ou } = \frac{\pi b^3 c}{2}T'' = \frac{2I'}{b}T'' & \text{si } \frac{b}{c} < \frac{T'}{T''}. \end{cases}$$

H_2. Section rectangle ou carrée; côtés $2b$, $2c$: soit $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} > 1$.

$$(h_2)\quad M_x = \mu\, G'\theta\, b c^3 = \mu'\theta\, \frac{16\, b^3 c^3}{3\left(\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}\right)} = \mu'\, \frac{4\theta}{\frac{1}{G'I} + \frac{1}{G''I'}}.$$

μ étant un coefficient entre 2,249 et 5,333 donné par la table finale; ou $\mu = \frac{16}{3} - \lambda\, \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}$, λ étant donné par la même table, mais ne variant qu'entre 3,08 et 3,36, ou étant représenté empiriquement et approximativement par $\lambda = 3{,}36 - 0{,}28\, \frac{c^4 G'^2}{b^4 G''^2}$.

Et μ, variable de 0,843 à 1, donné aussi par la table, et restant à peu près constant = 0,85 jusqu'à $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 2$.

(h'_2) $\left\{ \begin{array}{l} g_{xy}\,(\text{pour } z = c) = -\gamma'\, c\theta;\ g_{xz}\,(\text{pour } y = b) = \gamma'_1\, b\theta \\ g_x\,(\text{pour } y = o,\ z = c) = \gamma\, c\theta;\ g_x\,(\text{pour } y = b,\ z = o) = \gamma_1\, b\theta \end{array} \right\}$ $\gamma, \gamma_1, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{\gamma'_1}{\gamma_1}$ étant donnés par la table.

(h''_2) Lim. M_x = la plus petite des deux quantités $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{\gamma}\, b c^2\, T' \\ \text{et } \frac{\mu}{\gamma_1}\, \frac{c^2 G'}{b^2 G''}\, b^2 c\, T''. \end{array} \right.$

Les quotients $\frac{\mu}{\gamma}$, $\frac{\mu}{\gamma_1}\frac{c^2 G'}{b^2 G''}$ sont donnés par la même table, pour chaque valeur de $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$.

I. *Extension et glissement transversal.*

Comme on a alors (paragraphe A, formule a'') simplement $E\,\partial_x = \frac{P_x}{\omega}$, et comme les plus grandes valeurs de $G' g'_{xy}$, $G'' g'_{xz}$ sont égales respectivement (paragraphe D) à $\frac{P_y}{\omega}$, $\frac{P_z}{\omega}$ multipliés par 1 si la section reste plane, et, si elle s'infléchit, par des coefficients

numériques dépendant de sa forme, la formule générale (a) de résistance à la rupture donne, en faisant $\varepsilon'' = 1/4$:

$$(i)\quad \omega = \frac{3}{8}\omega' + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\omega'\right)^2 + \omega''^2}$$

ω' et ω'' étant les superficies à donner à la section si la pièce n'était sollicitée respectivement qu'à l'extension, et qu'au glissement ou cisaillement.

D'où l'on déduit que

POUR $\frac{\omega''}{\omega'} =$	1	1/3	1/2	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1	POUR $\frac{\omega'}{\omega''} =$	1	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1/2	1/3	1
On a $\frac{e}{e} =$	1	1,083	1,175	1,319	1,554	Et $\frac{e}{e} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1

N. B. Cette formule est applicable aux petits boulons ou aux rivets à la fois tendus et cisaillés sans être fléchis.

J. *Flexion et glissement transversal.*

Lorsque les forces qui font fléchir ont des sommes de composantes dans un sens transversal, la flexion est accompagnée de *glissement* dans ce sens, et les sections primitivement planes tendent à se courber en doucine ou en S.

(j'), (j'') et (j'''). *Inclinaison* ψ *du plan de flexion, courbure* $\frac{1}{\rho}$, *dilatations longitudinales* δ_x. Comme au paragraphe E (flexion seule), formules (e), (e'') et (e''').

Flèche. Au lieu de (e''), on prendra pour la flèche f et ses projections f_z, f_y, pour tenir compte du glissement :

$$(j'')\quad \begin{cases} f_z = \dfrac{M' \cos\varphi}{3EI'}\left(a^2 + \tau_z \dfrac{3E}{2G''}c^2\right) = \dfrac{P_y a^3}{3EI}\left(1 + \tau_z \dfrac{3E}{2G''}\dfrac{c^2}{a^2}\right), \\ f_y = \dfrac{M' \sin\varphi}{3EI'}\left(a^2 + \tau_y \dfrac{3E}{2G'}b^2\right) = \dfrac{P_z a^3}{3EI'}\left(1 + \tau_y \dfrac{3E}{2G'}\dfrac{b^2}{a^2}\right). \end{cases} \quad \text{et } f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}.$$

τ_z ayant les valeurs suivantes (quand $G' = G''$, $\varepsilon G = 0{,}1\,E$); et τ_y ayant les mêmes valeurs quand on met b pour c, c pour b.

	SECTION RECTANGLE.								SECTION elliptique.	SECTION circulaire.
Pour $\frac{c}{b} =$	1/4	1/2	3/4	1	5/4	2	4	∞		
$\tau_2 =$	0,68	0,85	0,91	0,94	0,96	0,98	1,0	1	$\frac{2c^2 + 0{,}8\,b^2}{3c^2 + b^2}$	0,7

J_1. Si rien n'empêche le plan des sections de s'infléchir en doucine, l'on calculera la résistance dans la double supposition où il n'y aurait que flexion (paragraphe E) et où il n'y aurait que glissements (paragraphe D, formules $d^{IV}{}_1$, $d^{V}{}_1$, $d^{VI}{}_1$, $d^{VII}{}_1$), et l'on adoptera, pour les dimensions à donner, le plus fort des résultats de ce double calcul.

J_2. Si l'une des sections les plus exposées, ou pour lesquelles le moment de flexion M′ est le plus considérable, est de celles dont le plan ne peut s'infléchir, on prendra (paragraphe A, formules a, a′, a^V):

$$(j_2)\qquad \left\{ 1 = \text{ou} > \max.\ \frac{3}{8}\frac{M'}{R}\left(\frac{\cos\varphi}{I}z + \frac{\sin\varphi}{I'}y\right) + \sqrt{\left[\frac{5}{8}\frac{M'}{R}\left(\frac{\cos\varphi}{I}z + \frac{\sin\varphi}{I'}y\right)\right]^2 + \left(\frac{P_y}{T'\omega}\right)^2 + \left(\frac{P_z}{T''\omega}\right)^2}. \right.$$

(j'_2) Si la section est rectangle on remplacera simplement z par c, y par b en effaçant *maximum*.

Exemple pour le cas $P_y = 0$, $\varphi = 0$

$$(j''_2)\qquad \left\{ \begin{array}{l} 1 = \frac{3}{8}\frac{b'c'^2}{bc^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{b'c'^2}{bc^2}\right)^2 + \left(\frac{b''c''}{bc}\right)^2}, \\ b', c' \text{ étant les dimensions à donner s'il n'y avait que flexion; } b'c'^2 = \frac{3M'}{4R}, \\ b'', c'' \qquad \textit{idem} \qquad \text{s'il n'y avait que glissement, } b''c'' = \frac{P_z}{4T''}. \end{array} \right.$$

D'où, pour la largeur $2b$ du prisme rectangle, si l'on se donne la demi-épaisseur $c = c' = c''$

$$(j'''_2)\qquad b = \frac{3}{8}b' + \sqrt{\left(\frac{5}{8}b'\right)^2 + b''^2}.$$

En sorte que

POUR $\frac{b''}{b'} =$	0	1/4	1/3	1/2	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1	POUR $\frac{b'}{b''} =$	1	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1/2	1/3	1/4	0
On a $\frac{b}{b} =$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554	Et $\frac{b}{b''} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1

Et, pour l'épaisseur $2c$, si l'on se donne la demi-largeur $b = b' = b''$,

POUR $\frac{c''^2}{c'^2} =$	1/8	1/4	1/2	2/3	3/4	1	POUR $\frac{c'^2}{c''^2} =$	1	3/4	2/3	1/2	1/4	1/8	0
On a $\frac{c}{c'} =$	1	1,050	1,193	1,255	1,285	1,372	Et $\frac{c}{c''} =$	1,372	1,283	1,253	1,191	1,096	1,047	1

Il n'y aura lieu d'appliquer ces formules de résistance que pour les prismes très-courts.

K. *Flexion et torsion.*

K$_1$. *Section circulaire.* On suppose $G' = G''$, $T' = T''$ représenté par T, ou un axe de symétrie de contexture parallèle à l'axe de la pièce.

$$(k_1)\quad r^3 = \frac{3}{8}r'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8}r'^3\right)^2 + (r''^3)^2}$$

r rayon à donner à la section,

r' sa valeur s'il n'y avait que flexion, $r'^3 = \dfrac{4\,M'}{\pi R}$,

r'' *idem* s'il n'y avait que torsion, $r''^3 = \dfrac{2\,M''}{\pi T}$.

En sorte que

POUR $\frac{r''^3}{r'^3} =$	0	1/4	1/3	1/2	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1	POUR $\frac{r'^3}{r''^3} =$	1	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1/2	1/3	1/4	0
On a $\frac{r}{r'^3} =$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554	On a $\frac{r}{r''^3} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1

(k_1') *Même section.* Cas d'un arbre tournant cylindrique, sollicité en sens opposés par deux engrenages et deux courroies.

Même formule (k_1) et même tableau en prenant pour M″ l'expression (322) de l'art. 129, et, pour M′, la plus grande des deux valeurs de l'expression (321) contre l'une ou l'autre roue ou poulie. — On tiendra compte du poids de l'arbre en négligeant d'abord son influence afin d'avoir une première approximation de la grandeur du rayon, puis on refera le calcul.

Même section circulaire. Cas où l'on en fait varier le rayon, pour donner à l'arbre l'*égale résistance.*

La formule (k_1) ou

$$(k_1'') \qquad \pi r^3 = \frac{3}{8}\frac{4M'}{R} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{4M'}{R}\right)^2 + \left(\frac{2M''}{T}\right)^2}$$

donnera les valeurs diverses de ce rayon en mettant pour M′ l'expression (321) fonction de la distance x de chaque section à l'une des extrémités.

Même section circulaire. Pièce d'un rayon variable, encastrée à un bout, et sollicitée à l'autre à fléchir et à tordre, par une force P dans une direction perpendiculaire à sa longueur, mais agissant au moyen d'un levier transversal d'une longueur k.

$$(k_1''') \quad 2R.\frac{\pi r^3}{5P} = \frac{3}{5}x + \sqrt{x^2 + k^2}$$

x distance de la section à l'extrémité sollicitée (on a supposé $T = \frac{4}{5}R$).

K_2. *Section rectangle en général.* Formules (324) ou (327) de l'art. 130, en cherchant par tâtonnement numérique, comme aux art. 132 et 133, le maximum, ou la situation du point dangereux.

Même section rectangle. Cas $\varphi = 0$ où la pièce fléchit à plat ou dans le plan de plus facile flexion; ce qui arrive, ou si elle est sollicitée dans ce plan, ou si elle est extrêmement mince,

$$(k_2) \quad bc^2 = \frac{3}{8}b'c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8}b'c'^2\right)^2 + (b''c''^2)^2}$$

$b'c'^2 = \frac{3M'}{4R}$ valeur à donner à bc^2 s'il n'y avait que flexion,

$b''c''^2 = \frac{\gamma}{\mu}\frac{M''}{T'}$ valeur à lui donner s'il n'y avait que torsion.

En sorte que :

pour $\frac{b''c''^2}{b'c'^2} =$	0	1/4	1/3	1/2	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1	pour $\frac{b'c'^2}{bc^2} =$	1	$\sqrt{1/2} = 0{,}707$	1/2	1/3	1/4	0
On a $\frac{bc^2}{b'c'^2} =$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554	$\frac{b'c'^2}{bc^2} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1

Même section. Prismes rectangles sollicités dans des plans faisant divers angles avec les faces.

1° *Section carrée*, ou cas $b = c$; et tang $\varphi = 0$; $= 1/2$; et $= 1$.

(k'_2) Voir le tableau des résultats, art. 132 (2e tableau).

2° *Section rectangle dont l'un des deux côtés est double de l'autre*, ou cas $b = 2c$, et tang $\varphi = 0$; $= 1/2$; $= 1$; $= 2$, et $= \infty$.

(k''_2) Voir le 3e tableau de l'art. 133.

K_3. *Section elliptique.*

(k_3) Si le prisme ou cylindre elliptique est sollicité à plat, ou dans le plan de plus facile flexion, se servir de la même formule (k_2) que pour la section rectangle.

(k'_3) S'il est fléchi ou *de champ* ou obliquement, appliquer les formules (336), (333) de l'art. 134 en cherchant le maximum par tâtonnement numérique, comme on a fait à cet article pour le cas $b = 2c$ et la flexion de champ.

(k''_3) Et voir, si l'on se trouve dans ce dernier cas ($b = 2c$ et flexion de champ), le 2e tableau du même article 134.

K_4. *Sections autres que le cercle, le rectangle, l'ellipse.*

(k_4) Appliquer la formule générale (a) et celle (a') du paragraphe A en puisant, au paragraphe G, les glissements $\gamma_{xy} = \gamma''_{xy}$, $\gamma_{xz} = \gamma''_{xz}$ d'où l'on éliminera θ au moyen des expressions de $M_z = M''$ du même paragraphe G, et l'on cherchera le maximum par tâtonnement numérique.

L. *Flexion, torsion, extension et glissements simultanés.*

Appliquer la formule générale (a) du paragraphe A en tâtonnant numériquement pour avoir le maximum.

Section circulaire par exemple, en négligeant l'effet des glissements étrangers à la torsion. Pour avoir le rayon r constant ou variable, résoudre numériquement l'équation (312) de l'art. 128

$$(1_1)\quad (R\pi r^3 - P_x r - 4M')\left(R\pi r^3 + \frac{1}{4}P_x r + M'\right) = 4\left(\frac{R}{T}\right)^2 M''^2,$$

où la force longitudinale P_x et le moment de torsion M'' sont constants pour chaque portion de la pièce, mais où le moment de flexion M' varie d'un bout à l'autre. On donnera à M' sa plus grande valeur si l'on veut que le rayon r soit constant.

137. *Exemples d'applications numériques.*

PREMIER EXEMPLE. *Flexion seule.* — Pièce rectangulaire sollicitée dans un sens oblique à ses faces latérales.

Une pièce rectangulaire horizontale en bois de chêne de 3 mètres de longueur et $0^m,30$ sur $0^m,10$ d'écarrissage est encastrée à un bout, de manière que ses faces latérales fassent des angles de 45 degrés avec l'horison, et elle est sollicitée à l'autre bout par un poids P.

On demande :

1° La limite à imposer à ce poids P pour que l'action continuée de sa charge ne puisse énerver la matière et la mettre en danger de rupture à une époque quelconque;

2° La grandeur et la direction de la *flèche* qu'il lui fera prendre, c'est-à-dire du déplacement transversal de l'axe à l'extrémité sollicitée.

Vu le rapport de la longueur aux deux autres dimensions, il n'y

a pas lieu de tenir compte de l'effet du glissement transversal. Et il n'y aura qu'à mettre dans les formules E de la *flexion seule*

$$a = 3,\ 2b = 0{,}3,\ 2c = 0{,}1,\ I = \frac{4}{3} b c^3 = 4c^4 = 0{,}000025,$$

$$I' = \frac{4}{3} b^3 c = 36 c^4 = 0{,}000225;\ \cos\varphi = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Et prenons $E = 1{,}200{,}000{,}000$, $R = 600{,}000$ comme on le fait le plus généralement[1].

Nous aurons

$$\text{Formule } (e'),\ \text{lim. } Pa = \frac{4 R b^3 c^3}{3 (b\cos\varphi + c\sin\varphi)} = 3 R c^3 \sqrt{2} = 225\sqrt{2} = 318{,}198$$

D'où, limite du poids $P = 106^{\text{kilog.}},066$ [2].

Formule (e), $\operatorname{tang}\psi = \frac{I}{I'} \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{9}$. Le plan de courbure de l'axe de la pièce est incliné de 1/9 seulement sur le plan (incliné lui-même à 45 degrés sur l'horizon) passant primitivement par cet axe et parallèle aux petites faces latérales du prisme[3].

$$\text{Formule } (e'')\ \text{flèche } f = \frac{P a^3}{4 E b c} \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4}} = \frac{P a^3 \sqrt{41}}{108\ E c^4} = \frac{P\sqrt{41}}{30000} =$$

$$= 0{,}00021344\ P.$$

Ou, si $P =$ sa limite $106^{\text{kilog.}},066$, $f = 0^{\text{mèt.}},0226$ [4].

[1] Leçons de M. Morin sur la résistance des matériaux, 1853, p. 203, 169.

[2] Avec la formule lim. $Pa = \frac{4 R b c (b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi)}{3 (b\sin\varphi + c\cos\varphi)}$ que l'on trouve dans divers ouvrages et qui a été établie dans la supposition que le plan de flexion est toujours celui de sollicitation (art. 42), on trouverait limite $Pa = 5 R c^3 \sqrt{2}$, ou un nombre trop fort dans la proportion de 5 à 3.

[3] En sorte que le plan de flexion, loin de se confondre avec le plan de sollicitation à fléchir, fait avec lui un angle de 39 degré environ.

[4] Avec la formule $f = \frac{P a^3}{3 E I''}$ que l'on trouve dans les mêmes ouvrages, I'' étant le moment d'inertie $\frac{4}{3}(b^3 c\cos^2\varphi + b c^3 \sin^2\varphi)$ de la section autour d'une horizontale qui y serait tracée par son centre, cette flèche serait seulement $\frac{P a^3}{60\ E c^4}$, ou un nombre trop faible dans la proportion de $\frac{1}{60}$ à $\frac{\sqrt{41}}{108}$ ou de 1 à 3,56.

DEUXIÈME EXEMPLE. *Torsion seule.* — Cylindre à base d'ellipse, d'égale contexture transversale.

Un cylindre en fonte de 5 mètres de longueur à base d'ellipse de $0^{m},20$ et $0^{m},10$ est encastré à un bout, et sollicité à l'autre, par deux forces de $300^{kilog.}$ chacune faisant couple et agissant simultanément au bout de bras de levier de 1 mètre. On demande : 1° sa torsion; 2° la plus grande inclinaison de sa fibre sur l'élément de la section; 3° la limite à imposer au moment des forces.

On a

$$a = 5,\ b = 0^{m},05,\ c = 0^{m},10,\ M_x = 600^{kil.\times mèt.}.$$

Prenons $G = 2\,000\,000\,000$ (M. Morin, p. 442-443),

$T = 2\,000\,000$ (le $\frac{1}{11}$ de la moyenne des efforts qui ont produit rupture immédiate, *idem*, p. 451).

On aura

Formule (g'_2), $600 = 2\,000\,000\,000 \frac{3,1416\,(0,05)^3\,(0,1)^3}{(0,05)^2+(0,1)^2}\theta = 62832\,\theta.$

D'où $\theta = 0,009\,55.$

Et, de $\theta = \frac{1}{a}.\frac{2\pi}{360}\alpha$, l'on tire l'angle $\alpha = \frac{360\,a}{2\pi}\theta = 2^{degrés},73,$

rotation de l'extrémité sollicitée.

Formule (g''_2), $g = \frac{2\,(0,1)^2}{(0,05)^2+(0,1)^2}.\ 0,05\,\theta = 0,08\,\theta = 0,000\,764,$

Formule (g'''_2), $\lim. M_x = \frac{3,1416.(0,05)^2.0,10}{2}\,2\,000\,000 = 785^{kil.\times mèt.},$

en sorte qu'on peut, avec des bras de levier de 1 mètre, appliquer des forces allant jusqu'à $392^{k},5$ chacune.

TROISIÈME EXEMPLE. *Torsion seule.* — Pièce rectangulaire d'inégale contexture transversale.

Soit une pièce rectangulaire en bois de sapin, d'un équarrissage de $0^{m},16$ sur $0^{m},24$ et d'une longueur de 9 mètres.

On demande : 1° Quelles forces faisant couple, et agissant au moyen de leviers de 1 mètre sur l'une des extrémités, la feront tourner de 2 degrés sexagésimaux devant l'autre extrémité qui est encastrée ?

2° Quel sera, alors, le plus grand glissement?

3° Quelle est la limite à imposer à ces forces?

On a

$$a = 9,\ b = 0{,}12,\ c = 0{,}08,\ \text{l'angle}\ \alpha = 2.$$

On prend ordinairement, pour cette matière, environ $G = 450\,000\,000$ et $T = 300\,000$. Mais on suppose que l'on ait des raisons de penser que les résistances spécifiques sont plus fortes dans le sens de la plus petite dimension, et que la comparaison de diverses expériences faites avec des bois de même provenance, pris dans la même situation par rapport à l'axe des arbres dont on les extrait, porte à adopter

$$G' = 400\,000\,000,\quad G'' = 500\,000\,000,$$
$$T' = 250\,000,\quad T'' = 350\,000.$$

Il en résulte

$$\frac{b}{c}\sqrt{\frac{G}{G'}} = 1{,}6770.$$

La table ci-après, art. 138, fournit par intercalation entre les lignes 1,60 et 1,70 ou 1,75,

$$\mu = 3{,}3484,\ \mu' = 0{,}8513,\ \gamma = 1{,}767,\ \gamma_1 = 0{,}877,$$
$$\frac{\mu}{\gamma} = 1{,}893,\ \frac{\mu}{\gamma_1}\frac{c^3G'}{b^3G''} = 1{,}360.$$

On aura donc formule (h_4), $M_x = \mu\, G'\, \theta\, bc^3$

$$M_x = 3{,}3484\ (0{,}12)\ (0{,}08)^3.\ 400000000\,\theta = 82290\,\theta.$$

Si l'on n'avait pas sous la main la table des valeurs du coefficient μ, mais qu'on se souvînt que celui beaucoup moins variable

μ', dont il faut affecter la formule trouvée par M. Cauchy, est d'environ 0,85, on aurait

$$M_x = 0{,}85\,\frac{\frac{16}{3}(0{,}12)^3(0{,}08)^3}{\frac{(0{,}12)^2}{400}+\frac{(0{,}08)^2}{500}}\cdot 1000\,000\,\theta = 82190\,\theta,$$

ce qui ne diffère pas sensiblement de la valeur précédente.

Donc,

$$\theta = \frac{2\pi\alpha}{360\alpha} = \frac{2\pi.2}{360.9} = 0{,}0038785.$$

$M_x = 82290\,\theta = 319^k,14$. Les forces à appliquer aux bras de levier sont $159^k,57$ chacune.

Formule (g''_4). Glissement g_{xz} (au milieu du petit côté $2c$) $= 0{,}877.\ 0{,}12\,\theta = 0{,}10524\,\theta$

Glissement $-g_{xy}$ (au milieu du grand côté $2b$) $= 1{,}767.\ 0{,}08\,\theta = 0{,}14136\,\theta$.

Comme le rapport de ces deux glissements est plus considérable que le rapport des deux quotients $\frac{G''}{T''}$, $\frac{G'}{T'}$, le point dangereux, pour lequel $G''g_{xz}$ ou $-G'g_{xy}$ risque le plus d'excéder T'' ou T', est au milieu du plus grand côté.

Mais sans même entrer dans cette discussion relative au glissement, la position de ce point sera donnée par le plus petit des deux nombres fournis par la double formule (h''_2) donnant limite M_x. On a:

1re formule (h''_2), lim. $M_x = 1{,}893\,(0{,}12)\,(0{,}08)^2\,250\,000 = 368^{k.\times m.}$

2e formule, lim. $M_x = 1{,}360\,(0{,}08)\,(0{,}12)^2\,350\,000 = 548^{k.\times m.}$

D'où il résulte bien que le point dangereux est au milieu de $2b$ et qu'il faut adopter $368^{k.\times m.}$ pour la limite du moment des forces qui font tordre; ce qui fait deux forces de 184^k chacune.

QUATRIÈME EXEMPLE. *Extension et glissement transversal.* — Boulon ou rivet.

Un petit boulon ou un rivet en fer supporte, après le serrage de

son écrou, ou après sa pose à chaud, une traction évaluée 1,000 kilogrammes.

Et il est dans le cas de se trouver soumis transversalement (par exemple en vertu des tractions que doivent supporter des tôles qu'il assemble) à une force de 1,200 kilogrammes tendant à le rompre par cisaillement.

On demande la section à lui donner.

En admettant que par chaque millimètre carré on puisse lui faire supporter au maximum un effort de traction de 5 kilogrammes,

Et un effort de cisaillement de 4 kilogrammes,

Il faudrait lui donner, s'il n'était soumis qu'à la traction, une section de 200 millimètres;

Et s'il n'était soumis qu'au cisaillement, une section de 300 millimètres.

On a donc, formule (I), $\omega' = 200$, $\omega'' = 300$.

Section à lui donner

$$\omega = \frac{3}{8}.\ 200 + \sqrt{\left(\frac{5}{8}.\ 200\right)^2 + (300)^2} = 400 \text{ millimètres carrés},$$

c'est-à-dire un diamètre de $0^m,02257$.

Cinquième exemple. *Flexion et torsion simultanées.* — Arbre de transmission de mouvement, dans une machine.

Soit (deuxième figure de l'art. 129) un arbre tournant horizontal cylindrique en fonte de 5 mètres de longueur sur lequel sont montées, à 1 mètre de distance de chaque extrémité, deux roues d'engrenage, ou deux poulies de courroies, pesant $200^{kil.}$ et $100^{kil.}$; la seconde d'un diamètre de 1 mètre, sur laquelle s'exerce tangentiellement une résistance de $2{,}000^{kil.}$; et, la première, d'un diamètre plus grand, en sorte que la puissance qui y est appliquée, aussi tangentiellement, n'est, y compris ce qui est nécessaire pour vaincre les frottements, que $1{,}100^{kil.}$: ces deux forces agissant dans des directions qui font, de part et d'autre du plan vertical passant par l'axe, des angles de 45 degrés,

On demande le diamètre à donner à l'arbre pour résister aux efforts combinés de flexion et de torsion auxquels il est soumis.

Il faut faire, dans les formules de l'art. 129, auxquelles renvoient celles K :

$$P = 1100,\ P' = 2000,\ \varpi = 200,\ \varpi' = 100,\ a = 5,\ a' = a'' = 1,$$

$$\rho' = 0{,}50,\ \cos\alpha = \cos\alpha' = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos(\alpha + \alpha') = 0.$$

Soient ρ'' (rayon du deuxième tourillon) $= 0{,}05$; f (coefficient de son frottement) $= 0{,}10$.

Pour la fonte, prenons $R = 7\,500\,000$, $T = 2\,000\,000$,

Et attribuons provisoirement à l'arbre dont la grosseur est encore inconnue, un poids $\Pi = 500^{k}$.

Formule (322). Moment tendant à tordre $M'' = P'\rho' + \frac{f\rho''}{\sqrt{1+f^2}}\mathfrak{R} = 1{,}000 + 0{,}005\ \mathfrak{R}$.

Et l'on a, pour la résultante $\mathfrak{R}$ des forces pressant le deuxième tourillon (formule analogue à celle 321) :

$$\mathfrak{R}^2 = \left(P\frac{a'}{a}\right)^2 + \left(P'\frac{a-a''}{a}\right)^2 + \left(\varpi\frac{a'}{a} + \varpi'\frac{a-a''}{a} + \frac{\Pi}{2}\right)^2 + 2P\frac{a'}{a}\frac{a-a''}{a}\cos(\alpha+\alpha') +$$

$$+ 2\left(\varpi\frac{a'}{a} + \varpi'\frac{a-a''}{a} + \frac{\Pi}{2}\right)\left(P\frac{a'}{a}\cos\alpha + P'\frac{a-a''}{a}\cos\alpha'\right) =$$

$$= (220)^2 + (880)^2 + (370)^2 + 2.370\,(220+880)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1535279,$$

ou $\mathfrak{R} = 1239^{kil.}$, et

$$M'' = 1{,}006^{kil.\times mèt.}.$$

Le moment de flexion M' a pour valeur la plus grande de celles que prend la formule (321) en faisant successivement $x = a' = 1$ et $x = a - a'' = 4$ dans les expressions (320) des moments composants qui y entrent. Comme ces deux valeurs sont $\sqrt{898596}$ et $\sqrt{2408891}$, il faut prendre la seconde. Donc

$$M' = 1552^{kil.\times mèt.}.$$

On aurait, en conséquence, pour le cube du rayon de l'arbre :

1° S'il n'était soumis qu'à la flexion

$$r'^3 = \frac{4\,M'}{\pi R} = 0{,}000\,26348 \text{ (d'où } r' = 0^m{,}064);$$

2° S'il n'était soumis qu'à la torsion

$$r''^3 = \frac{2\,M''}{\pi T} = 0{,}000\,32022 \text{ (d'où } r'' = 0{,}068).$$

Donc, cube du rayon à lui donner (formule k_1)

$$r^3 = \frac{3}{8} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2} = 0{,}000\,458886,$$

ou

$$r = 0^{mèt.}{,}07713.$$

Le poids de l'arbre de ce rayon sera 729 kilogrammes. La substitution de ce nombre à celui 500 n'aura pas assez d'influence pour obliger à recommencer le calcul.

Si, pour économiser la matière, l'on voulait rendre l'arbre d'égale résistance en faisant varier son rayon r, la formule (k''_1) donnerait, avec celles (321) et (322), x étant la distance de chaque section au premier tourillon,

$$\left\{ \pi r^3 = \frac{3}{8} \cdot \frac{4\,M'}{7\,500\,000} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \cdot \frac{4\,M'}{7\,500\,000}\right)^2 + \left(\frac{2.1006}{2\,000\,000}\right)^2} \right.$$

$$\left. M' \text{ représentant } \sqrt{1561127 - 1098004\,x + 366522\,x^2 - 28079\,x^3 + 4356\,x^4}. \right.$$

138. TABLE RELATIVE A LA TORSION DES PRISMES RECTANGLES

DONT LES COEFFICIENTS D'ÉLASTICITÉ DE GLISSEMENT SONT G', G'' DANS LES SENS y, z DES CÔTÉS $2b$, $2c$ DES BASES, ET POUR LESQUELS T', T'' SONT LES PLUS GRANDS EFFORTS TANGENTIELS DANS CES DEUX SENS, PAR UNITÉ SUPERFICIELLE, OU $\frac{T'}{G'}$, $\frac{T''}{G''}$ LES LIMITES À IMPOSER AUX GLISSEMENTS g_{xy}, g_{xz}.

VALEURS du rapport $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$ (ou de $\frac{b}{c}$ quand l'élasticité est égale dans les sens transversaux).	MOMENT DE TORSION M_x. Formule $M_x = \left(\frac{16}{3} - \lambda \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}\right) G'\theta b c^3$.	Formule $M_x = \mu G'\theta b c^3$.	Formule $M_x = \mu' \frac{4\theta}{\frac{1}{G'I} + \frac{1}{G''I'}} = \mu' \frac{16 b^3 c^3 \theta}{3\left(\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}\right)}$.	PLUS GRAND GLISSEMENT PRINCIPAL. au milieu des côtés $2b$. $-g_x = -g_{xy} = \gamma c\theta$.	au milieu des côtés $2c$. $g_x = g_{xz} = \gamma_1 b\theta$.	LIMITE À IMPOSER au moment des forces s'il n'y a que torsion. (On prendra la plus petite.) Point dangereux au milieu de $2b$. Lim. $M_x = \frac{\mu}{\gamma} b c^2 T'$.	Point dangereux au milieu de $2c$. Lim. $M_x = \frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''} b^2 c T''$.
	VALEURS de λ.	VALEURS de μ.	VALEURS de μ'.	VALEURS de γ.	VALEURS de γ_1.	VALEURS de $\frac{\mu}{\gamma}$.	VALEURS de $\frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''}$.
1,00	3,08410	2,24923	0,84346	1,35063	1,35063	1,66534	1,66534
1,05	3,12256	2,35908	0,84353	1,39651	.....	1,68954	
1,10	3,15653	2,46374	0,84373	1,43956	.....	1,71146	
1,15	3,18554	2,56330	0,84403	1,47990			
1,20	3,21040	2,65788	0,84443	1,51753	.....	1,75363	
1,25	3,23196	2,74772	0,84492	1,55268	1,13782	1,76970	1,54556
1,30	3,25035	2,83306	0,84552	1,58544	.....	1,7852	
1,35	3,26632	2,91379	0,84611	1,61594	.....	1,80316	
1,40	3,28002	2,99046	0,84679	1,64430	.....	1,81868	
1,45	3,29171	3,06319	0,84889	1,67265			
1,50	3,30174	3,13217	0,84830	1,69512	0,97075	1,84776	1,43402
1,60	3,31770	3,25977	0,84996	1,73889	0,91489	1,87463	1,39180
1,70	3,32941	3,37486	0,85174	1,77649			
1,75	3,33402	3,42843	0,85267	1,79325	0,84098	1,91170	1,33107
1,80	3,33798	3,47890	0,85362	1,80877	.....	1,92334	
1,90	3,34426	3,57320	0,85559	1,83643			
2,00	3,34885	3,65891	0,85756	1,86012	0,73945	1,96703	1,15286
2,25	3,35564	3,84194	0,86266	1,90546			
2,50	3,35873	3,98984	0,86779	1,93614	0,59347	2,06072	1,07566
2,75	3,36023	4,11143	0,87283	1,95687			
3,00	3,36079	4,21307	0,87772	1,97087	.....	2,13767	
3,333	//	//	//	//	0,44545	//	//
3,50	3,36121	4,37299	0,88687	1,98672	.....	2,20111	
4,00	3,36132	4,49300	0,89509	1,99395	0,37121	2,25332	0,757
4,50	3,36133	4,58639	0,90231	1,99724	.....	2,29636	
5	3,36133	4,66162	0,90902	1,99874	0,29700	2,33200	0,628
6	3,36133	4,77311	0,91982	1,99974	.....	2,38687	
6,667	3,36133	//	//	//	0,22275	//	//

VALEURS du rapport $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$ (ou de $\frac{b}{c}$ quand l'élasticité est égale dans les sens transversaux.	MOMENT DE TORSION M_x. Formule $M_x = \left(\frac{16}{3} - \lambda \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}\right) G'\theta b c^3$.	Formule $M_x = \mu G' \theta b c^3$.	Formule $M_x = \mu' \frac{4\theta}{\frac{1}{G'I} + \frac{1}{G''I'}} = \mu' \frac{16 b^3 c^3 \theta}{3\left(\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}\right)}$.	PLUS GRAND GLISSEMENT PRINCIPAL. au milieu des côtés $2b$. $-g_x = -g_{xy} = \gamma c\theta$.	au milieu des côtés $2c$. $g_x = g_{xz} = \gamma_1 b\theta$.	LIMITE À IMPOSER au moment des forces s'il n'y a que torsion. (On prendra la plus petite.) Point dangereux au milieu de $2b$. Lim. $M_x = \frac{\mu}{\gamma} b c^2 T'$.	Point dangereux au milieu de $2c$. Lim. $M_x = \frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''} b^3 c T''$.
	VALEURS de λ.	VALEURS de μ.	VALEURS de μ'.	VALEURS de γ.	VALEURS de γ_1.	VALEURS de $\frac{\mu}{\gamma}$.	VALEURS de $\frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''}$.
7	3,36133	4,85314	0,92854	1,99995	.....	2,42663	
8	3,36133	4,91317	0,93561	1,99999	0,18564	2,45660	
9	3,36133	4,95985	0,94145	2,00000	.....	2,47993	
10	3,36133	4,99720	0,94634	2,00000	0,14858	2,49860	
20	3,36133	5,16527	0,97091	2,00000	0,07341	2,58264	
50	3,36133	5,26611	0,98779	2,00000	.....	2,63306	
100	3,36133	5,29972	0,99380	2,00000	.....	2,64986	
∞	3,36133	5,33333	1,00000	2,00000	0,00000	2,66667	

GLISSEMENTS PRINCIPAUX EN D'AUTRES POINTS DES CÔTÉS $2b$, $2c$ QUE LE MILIEU (POUR LES PROBLÈMES OÙ IL Y A EN MÊME TEMPS FLEXION ET TORSION).

On a $-g_{xy}$ (pour $z = c$ ou sur les côtés $2b$) $= \gamma' c\theta$; g_{xz} (pour $y = b$ ou sur les côtés $2c$) $= \gamma_1 b\theta$.

VALEURS DE $\frac{\gamma'}{\gamma}$					VALEURS DE $\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}$			
POUR	POUR $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 1$	POUR $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 1,5$	POUR $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 2$	POUR $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 4$	POUR	POUR $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 1$	POUR $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 2$	POUR $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 4$
$\frac{y}{b} = 0$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	$\frac{z}{c} = 0$	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9932	0,9949	0,9962	0,9991	0,1	0,9932	0,9932	0,9933
0,2	0,9750	0,9795	0,9846	0,9973	0,2	0,9750	0,9729	0,9729
0,3	0,9429	0,9526	0,9639	0,9928	0,3	0,9429	0,9384	0,9383
0,4	0,8963	0,9127	0,9321	0,9842	0,4	0,8963	0,8887	0,8885
0,5	0,8333	0,8572	0,8857	0,9678	0,5	0,8333	0,8224	0,8220
0,6	0,7510	0,7820	0,8196	0,9371	0,6	0,7510	0,7369	0,7363
0,7	0,6447	0,6811	0,7260	0,8793	0,7	0,6447	0,6282	0,6278
0,8	0,5063	0,5441	0,5916	0,7695	0,8	0,5063	0,4892	0,4885
0,9	0,3185	0,3497	0,3896	0,5540	0,9	0,3185	0,3044	0,3040
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	0,0000	0,0000	0,0000

HISTOIRE

ANATOMIQUE ET PHYSIOLOGIQUE

DES SCORPIONS,

PAR M. LÉON DUFOUR.

Adeo me occupaverunt hæc omnia, ut, supra humana erectus, sanitatem ipsamque vitam vilipenderem dum liceret visceribus animalium spectandis immorari...

O. F. Muller. *Zool. Dan.*

PROLÉGOMÈNES.

Les travaux des Cuvier, Marcel de Serres, Muller, Meckel, Treviranus, Duvernoy, Dugès, Newport, Blanchard, Milne Edwards, ont donné une grande impulsion à l'anatomie des scorpions. J'y ai aussi contribué. Il est des questions si difficiles qu'il faut le concours, je ne dis pas de plusieurs savants, mais souvent de plusieurs générations, pour arriver à l'établissement définitif de la vérité. D'ailleurs, bien que notre arachnide compte par sa taille parmi les plus grands articulés à respiration aérienne, son anatomie offre infiniment plus de difficultés que celle des

petits insectes hexapodes, à raison de son organisation plus compliquée, conséquemment plus parfaite.

Après ma publication de si ancienne date sur l'anatomie du scorpion, j'ose encore descendre dans la lice avec l'espoir de trouver à glaner sur les traces de si habiles scrutateurs, d'ajouter quelques faits, d'en confirmer d'autres, de redresser des erreurs que des circonstances plus opportunes m'ont permis de constater, enfin d'envisager sous un autre point de vue physiologique la structure tant extérieure qu'intérieure d'animaux qui, par leur position dans le cadre zoologique, forment un organisme de transition d'un haut intérêt de science.

Quand je songe qu'il y a quarante ans passés je disséquais, dans l'ardeur de mes explorations en Espagne, des centaines de *scorpio occitanus* vivants, je remercie le ciel d'avoir accordé à mes vieux jours la faveur si inespérée de porter encore un scalpel moins novice dans les entrailles ou vivantes ou récemment privées de la vie de ce même scorpion. Saint-Sever, ma résidence, n'est point et ne saurait être, à cause de sa température, ainsi qu'on le verra bientôt, la patrie de ce primate des arachnides. Il a donc fallu me procurer ailleurs ces animaux. Mon fils, Gustave Dufour, jeune médecin militaire, et mon neveu, M. Laboulbène, interne des hôpitaux de Paris, allèrent, sur ma recommandation, au printemps de 1850, à la chasse de l'*occitanus*, à Port-Vendres, aux bords de notre Méditerranée, et m'apportèrent une cinquantaine de ces scorpions pleins de vie et de santé. Ce précieux convoi avait été disposé de manière que chaque individu était séquestré, isolé dans des prisons cellulaires. Peu de temps auparavant, un entomologiste instruit de Madrid, M. Perez Arcos, avait eu l'obligeance de m'en expédier un petit nombre.

Mes nouveaux hôtes, dont j'avais jadis étudié les habitudes et le genre de vie, je les élevai, je les soignai en imitant les conditions de leur sol natal. Le succès a pleinement répondu à mes sollicitudes empressées, à mon amour de la science.

Pour donner à mon travail quelque valeur comparative et pour sauvegarder mon contrôle à l'égard de mes devanciers, j'ai cherché à couler à fond l'anatomie de l'*occitanus* frais de tous les âges et de tous les sexes, mais j'ai tenu à m'exercer aussi sur de nombreux individus de ce même type conservés dans l'alcool. J'y ai également ajouté les autopsies de huit autres espèces, la plupart exotiques, retirées des liqueurs conservatrices et que je ferai connaître bientôt.

S'il est nécessaire et même indispensable de disséquer les cadavres récents de ces arachnides pour apprécier le véritable état normal des viscères, il est incontestable aussi que certains organes, certains tissus se jugent mieux quand on les étudie après un séjour plus ou moins prolongé dans l'esprit de vin, qui leur donne plus de consistance et les rend plus isolables. Je citerai pour exemples le foie, les nerfs, les muscles. Il est même des circonstances où un certain degré d'altération, de décomposition des tissus est devenu nécessaire pour constater des particularités anatomiques.

Cuvier, Treviranus, Dugès ont disséqué l'*europæus;* Duvernoy, le *palmatus,* l'*afer,* l'*occitanus*, l'*europæus;* Muller, Newport, Milne Edwards, l'*afer.* Les sujets de ces dissections étaient tous conservés dans l'esprit de vin. Quant à moi, j'ai pris pour type de mes investigations l'*occitanus,* la plus grande des espèces d'Europe, celle qui a servi aux expériences de Redi et de Maupertuis. Je ne crois pas me

tromper en avançant que je suis le seul qui ait eu le précieux avantage de disséquer ces animaux vivants ou récemment morts.

Loin de moi toute idée de controverse intempérante. En procédant, le scalpel à la main, au contrôle des autres anatomistes, je saurai, dans la constatation des faits, tenir compte des différences produites par le degré de conservation des sujets disséqués. Ami de la science, j'en comprends les difficultés et les amorces; une longue expérience m'a appris que c'est souvent par le dédale des erreurs qu'on arrive à la vérité, et j'attache autant de prix à reconnaître les premières qu'à rendre hommage à la seconde.

Je l'avoue sans détour, il n'est point dans la trempe de mon intelligence de m'engager dans les subtilités de cette anatomie, dite transcendante, qui veut tirer le fin du fin. Je m'incline humblement devant cette habileté des doigts, cette acuité des yeux, cette sagacité de l'esprit, qui font apercevoir dans le filet nerveux d'un scorpion quatre ordres de fibres constitutives dont on règle les attributions physiologiques[1]. *Non nobis tantas componere lites!* Mon ambition actuelle se bornera à cette anatomie matérielle, grossière si l'on veut, qui met en relief la forme, la structure, les connexions, et qui permet d'en déduire ou expérimentalement ou rationnellement les actes fonctionnels.

Mes dissections se sont généralement opérées sur des planchettes de cire noire immergées dans l'eau, mais un bon nombre ont pourtant eu lieu à sec, soit sur des individus ouverts vivants, soit sur ceux préalablement éthérisés ou chloroformisés. Tantôt j'ouvrais par une incision médiane, soit dorsale, soit ventrale, le tégument, dont je rabattais et je fixais les lambeaux sur les côtés; tantôt j'incisais avec

[1] Newport, *Ann. des sciences nat.* 3e série, I, p. 56.

précaution tout le pourtour de la carapace thoraco-abdominale et je la renversais en arrière, tout en étudiant scrupuleusement les connexions qui se rompaient dans ce renversement. Des ciseaux à pointes acérées, des pinces fines à bout droit ou crochu, des loupes à divers foyers, un microscope à grossissement de trois à quatre cents diamètres, des épingles, des pinceaux, voilà mon arsenal de dissection. Aux dépens de mes yeux, je m'aidais souvent d'un rayon direct de soleil projeté sur mon sujet. Pour l'éthérisation, je plaçais simplement le scorpion vivant dans un flacon, j'y versais quelques gouttes d'éther sulfurique ou de chloroforme, et je bouchais aussitôt. En moins de quatre ou cinq minutes la résolution des membres était complète. Un fait n'avait à mes yeux une valeur positive, un caractère authentique que par une constatation plusieurs fois réitérée. Je faisais autant de procès-verbaux que d'autopsies, puis je les dépouillais pour la rédaction définitive. De plus, indépendamment des croquis pris immédiatement, je conservais toutes les pièces à l'appui dans de petits flacons à la solution de deutochlorure de mercure. Tel est en peu de mots le procédé de mes investigations anatomiques.

Par sa construction extérieure, par son tégument solide, ses palpes didactyles, son foie pulpeux, le scorpion touche aux *crustacés,* dont il s'éloigne surtout par son appareil respiratoire et son genre de vie atmosphérique ou terrestre. Son foie, son organe central de la circulation, la structure de ses poumons, son céphalothorax, ses yeux multiples, le nombre de ses pattes, ses habitudes l'associent aux *aranéides,* dont il diffère par un tégument abdominal corné et segmentaire, ainsi que par la présence des peignes et une queue articulée mobile, terminée par une ampoule à

venin. L'existence de stigmates, celle d'un système nerveux ganglionnaire et de vaisseaux biliaires vestigiaires, le rattachent aux *insectes*, dont le distancent tous les traits que je viens d'énumérer.

Comme on le voit par cette esquisse comparative, le scorpion, tout en prenant son rang naturel à la tête des arachnides, intéresse vivement la science par des traits anatomiques qui allient ce genre aux groupes des articulés tant supérieurs qu'inférieurs. Ici, comme dans tous les animaux, l'anatomie intérieure vient justifier, consacrer l'habileté de la classification fondée sur les formes extérieures. Il existe dans le fait entre les conditions viscérales et les agents organiques du dehors une sublime et consolante harmonie.

En confirmation de l'idée que je viens d'émettre, et pour l'intelligence des considérations physiologiques que j'exposerai bientôt, je vais faire connaître sommairement quelques-uns des actes de la vie extérieure de l'*occitanus*, sujet fondamental de mes recherches. L'application pourra en être faite à la généralité des espèces.

Essayons d'abord un aperçu de géographie entomologique sur cet arachnide, en reproduisant quelques considérations exposées dans mon ancien mémoire. Les scorpions, en général, habitent les contrées chaudes des diverses parties du monde et ne s'élèvent jamais dans les montagnes à des hauteurs où croissent les plantes sous-alpines. Mais cette tolérance climatérique peut présenter des modifications suivant les espèces. Je ne m'occuperai que des deux scorpions d'Europe que j'ai plus particulièrement étudiés, l'*occitanus* et l'*europæus*. Nous y trouverons deux nuances d'habitat ou de tempérament dont on pourra peut-être faire l'application aux espèces exotiques, lorsqu'on aura pris

plus de soin à s'assurer de leur vie privée, de leurs habitudes.

L'*occitanus* se trouve plus spécialement dans les lieux incultes, dépouillés et arides de la zone végétale de l'olivier et du caroubier, sur le littoral méditerranéen. J'évalue ce littoral à une largeur de huit à dix lieues environ. Toutefois, il faut tenir compte de certaines conditions du sol, comme l'humidité, l'ombrage, qui modifient singulièrement cet habitat.

En procédant du nord au sud, la patrie de l'*occitanus* commencerait à peu de distance au sud de Montpellier, à Souvignargues, d'où Maupertuis l'avait fait venir pour ses expériences; elle se continuerait à Cette, Narbonne, Port-Vendres, etc., mais ne dépasserait pas Perpignan. A partir de cette dernière cité, pour aller à Barcelone, en passant par Figuières et Gironne, il ne s'en est point offert un seul à mes recherches. Après le Llobregat, rivière à deux lieues au sud de Barcelone, on ne cesse pas de le rencontrer dans tous les terrains secs de la basse Catalogne, des frontières orientales de l'Aragon, du royaume de Valence, de celui de Murcie, de Grenade, enfin de nos possessions algériennes.

Que de pierres n'ai-je point soulevées pendant deux années d'actives explorations dans le Guipuscoa, la Navarre, le haut Aragon, sans y avoir découvert un seul *occitanus !* Je l'ai vainement cherché dans les deux Castilles et en particulier dans le plateau de Madrid; mais j'ai acquis depuis peu la certitude, par mon ami le professeur Graells, que ce scorpion n'est point rare dans l'Alcarria, contrée à quelques lieues au sud de Madrid. Or cette localité, que je ne connais point, semble faire une exception à la règle sur l'habitat littoral de l'*occitanus*. Il doit y avoir dans la

constitution physique de l'Alcarria des conditions qui expliquent cet habitat exceptionnel.

Voici maintenant une observation qui semble contrebalancer celle-là. Dans une excursion botanique que, dans l'été de 1812, je fis aux montagnes de *Porta-Cœli*, distantes au plus de cinq ou six lieues de la ville de Valence, je furetai scrupuleusement toutes les pierres, tous les abris de la base au sommet de ces monts, sans y rencontrer la trace d'un scorpion. Cependant les montagnes de Porta-Cœli sont dans cette bande littorale que j'ai assignée à la patrie de l'*occitanus*, mais leur élévation de quatre à cinq cents mètres au-dessus du niveau de la mer les rend inhabitables par ce genre d'arachnides, tandis que des plantes sous-alpines y prospèrent.

La présence de l'*occitanus* dans une contrée est un excellent thermomètre; elle devient l'indice constant d'une température élevée, d'un climat austral et d'un terrain sec. Jamais dans ces mêmes conditions je ne l'ai vu cohabiter avec l'*europæus;* ces deux arachnides semblent s'exclure réciproquement d'une même localité.

L'*europæus* s'accommode d'une température moins élevée; il se plaît dans les lieux sombres, non loin des habitations et même dans celles-ci. Du nord au midi, les premiers individus se rencontrent à Avignon et à Beaucaire, puis il y a une lacune occupée par l'*occitanus*, et on le retrouve aux alentours de Gironne et dans quelques points de la haute Catalogne. Tout récemment, je viens d'acquérir la certitude que l'*europæus*, qui n'avait jamais été signalé dans le sud-ouest de la France, se trouve dans les celliers et les caves du quartier des Chartrons, à Bordeaux. Y a-t-il été transporté par les bâtiments du commerce? Cela est possible comme il est pareillement possible que jusqu'à ce jour on

ne l'y ait jamais rencontré ou qu'on ait gardé le silence sur cet habitat. Quoi qu'il en soit, il y paraît acclimaté et s'y multiplie.

Malgré l'admirable conformité de composition et de structure extérieures qui caractérise les nombreuses espèces du vieux genre *scorpio,* le plus naturel, le plus homogène du monde, les classificateurs d'outre-Rhin, dévorés de la lèpre généromanique, l'ont impitoyablement démembré. Je prouverai bientôt anatomiquement combien est erroné le système fondé sur le nombre et la disposition des ocelles. Et pourquoi, au lieu d'écraser la science sous la multiplicité de noms plus ou moins hétérophoniques, ne s'est-on pas borné, pour nous faire arriver à l'espèce, but final des classifications, à de simples divisions? Cela eût été sage et d'une grande utilité pratique; mais la soif de célébrité n'eût point été satisfaite.

C'est sous les pierres qu'habite pendant le jour l'*occitanus.* Il est bien rare qu'on en rencontre plus de deux sous le même abri, et le plus souvent ils y vivent solitaires. L'instinct de leur conservation leur donne ce degré d'intelligence qui leur fait se creuser dans le sol une dépression pour se préserver d'être écrasés par la pierre et pour s'y tenir blottis. Ils ne sortent de leur tanière que le soir ou la nuit pour vaquer à leurs amours, pourvoir à leur subsistance et peut-être pour se livrer aux combats.

Dans leur ambulation ordinaire, qui s'exécute avec gravité et mesure, leurs palpes-pinces se portent en avant plus ou moins étendus pour sonder le terrain, reconnaître et éviter les obstacles, tandis que leur queue est toute longue, traînante. Cherche-t-on à les inquiéter, à les saisir ou sont-ils menacés d'un danger, les palpes-pinces se replolent à l'instant sur eux-mêmes, pour abriter de leurs bras arti-

culés les parties vulnérables de la tête. En même temps, la queue se recourbe avec prestesse sur le corps en se roidissant par la contraction de ses nombreux muscles. L'aiguillon venimeux se balance au-devant de la tête pour la défense ou pour l'attaque. Alors le premier mouvement du scorpion est une fuite rétrograde à la manière de l'écrevisse ou de plusieurs aranéides, comme certaines *epeira*, les *thomisus*, etc.

Pendant mon séjour en Espagne, j'ai souvent été témoin, en tenant enfermés dans un même bocal plusieurs individus de l'*occitanus*, de leur lutte acharnée, de leurs combats à outrance, où ils finissaient par s'entre-dévorer.

Le scorpion subit le même genre de mue que l'araignée, c'est-à-dire qu'il naît avec une forme déterminée et un ensemble de parties qui se conservent pendant toute sa croissance; mais, avant d'être définitivement adulte, il change plusieurs fois de peau. J'ai souvent trouvé sous les pierres des dépouilles entières de cet arachnide. J'ai vu aussi des femelles transportant sur le dos leurs jeunes petits, absolument à l'instar des *lycosa*.

Je réserve l'exposition de ce qui concerne les modes d'alimentation et de génération pour le chapitre de leurs appareils organiques respectifs.

Les espèces de scorpions soumises à mon scalpel sont les suivantes :

1. *Occitanus*, Latr., Milne Edwards, *Icon. du règne animal*, pl. XIX, fig. 1. Côtes méditerranéennes de France, Espagne, Algérie, etc.

2. *Palmatus*, Hempr., Lucas, *Arachn. Alger.*, pl. XVIII, fig. 2. Algérie, Constantine, Bône, etc.

3. *Australis*, Savigny. Égypte, pl. VIII, fig. 3. Algérie, Oran.

4. *Nigro lineatus*, Dufour[1]. Indes orientales.

[1] « *Nigro lineatus*. Octonoculus, testaceo lutescens, pectinibus 32 dentatis; ce-

5. *Leioderma*, Dufour[1]. Malabar.

6. *Afer*, Lin., Miln. Edw. *l. c.* pl. XVII-XVIII. Asie, Afrique.

7. *Biaculeatus*, Latr.[2], Gerv., *Arachn.* pl. XXIII, fig. 3. Guyane.

8. *Longicauda*, Latr.[3]. Latr. *Hist. nat. ins.* t. VII, p. 126. Guyane.

9. *Europæus*, Schrank., Miln. Edw. *l. c.* pl. XIX, fig. 2. France méridionale, Espagne septentrionale.

Dans ma manière d'envisager l'organisme, voici l'ordre qui m'a semblé le plus naturel, le plus physiologique pour l'exposition de l'anatomie intérieure. On comprend déjà par cette dernière expression mon dessein de ne point aborder l'enveloppe tégumentaire, non plus que la composition et la structure du squelette dermique. Cela se trouve d'ailleurs dans tous les livres d'entomologie, dans tous les traités généraux. Je pourrai occasionnellement en dire quelque chose.

Deux grandes divisions se partagent mon travail. L'une est relative aux appareils organiques *généraux* dont l'influence s'exerce dans toutes les fonctions, comme les appareils *sensitif, circulatoire, musculaire* des cavités splanchniques; l'autre concerne les appareils *spéciaux* qui président, dans l'ordre de leur importance physiologique, à la *respiration*,

« phalo-thoracis truncati granulis in lyram dispositis; abdominis segmentis dorso « tricarinatis; cauda articulis brevibus subtetraedris subtus nigro carinatis; digitis « manu longioribus dentatis serrulatisque. Long. 2 1/2 poll.

« *Occitani* forma, color, magnitudo et cephalo-thoracis granula aliter delineata. »

[1] *Leioderma.* « Octonoculus lævissimus subfuscus; pedibus pallidioribus; cephalo- « thorace emarginato bilobo; pectinibus 13 dentatis; manibus latissimis asperatis; « caudæ articulis granulosis. Long. 4 poll. »

[2] *Biaculeatus.* « Octonoculus fuscus, pedibus pallidis; pectinibus 32 dentatis; « caudæ longæ articulis elongatis, terminali sub aculeo unispinoso; tibiis lævibus. « Long. 3 poll. »

[3] *Longicauda.* « Octonoculus nigro fucescens; pectinibus 19 dentatis; digitis « manu longioribus gracilibus; caudæ corpore longioris articulo terminali sub aculeo « unispinoso. Long. 2 1/2 poll. »

Je ne comprends pas comment, dans les ouvrages monographiques sur les scorpions, on a omis de citer cette espèce, parfaitement signalée par Latreille.

à la *digestion*, à la *génération*, aux *secrétions* particulières ou indépendantes. Aux appareils de cette seconde division se rattachent, d'une manière naturelle et en même temps logique, les actes qui en émanent directement. Ce sera rapprocher ainsi l'effet de la cause, l'esprit de la matière ou, ce qui est tout un, la fonction de l'organe.

BIBLIOGRAPHIE.

Peu d'anatomistes ont porté directement le scalpel dans les entrailles du scorpion, mais beaucoup d'auteurs en ont parlé. C'est ainsi que la science marche, c'est ainsi qu'elle a marché et qu'elle marchera. Je vais essayer une petite statistique chronologique des principaux ouvrages qui ont traité du même sujet que moi. Cela me dispensera d'étaler dans mon texte cette profusion de citations qui n'aboutit guère qu'à distraire l'attention et à dévorer le papier.

1. Meckel (J. F.) (*Beytr. zur vergleich. Anat. d. Scorp.* 1808) est le premier zootomiste qui ait abordé la dissection du scorpion. Privé de précédents et n'ayant à opérer que sur des sujets de l'*europæus* à l'alcool, il était difficile que ses figures et ses descriptions ne fussent point plus tard taxées d'ébauches défectueuses. C'est un document primitif et pour cela un document respectable.

2. Cuvier (Georges) avait dès 1810 publié des aperçus d'anatomie sur l'*europæus* dans un rapport sur les travaux de la classe des sciences physiques. Ces aperçus, assez incomplets, ont été reproduits dans les *Leçons d'anatomie comparée*, publiées par M. Duvernoy, qui n'a pas manqué de les mettre au niveau des progrès de la science.

3. Treviranus (G. R.) (*Ueber den inner. etc. der Scorpion.* 1812) avait reçu de Cuvier, à Paris, de nombreux individus de l'*europæus* à l'esprit

de vin. Quand on songe aux difficultés d'une semblable dissection sur le plus petit des scorpions, on admire les prodiges du scalpel et de la sagacité de l'anatomiste; on est étonné que les erreurs n'aient pas été plus multipliées. C'est ce travail qui a circulé, et qui a perpétué beaucoup d'erreurs dans les compilations et les traités généraux.

4. Marcel de Serres (*Vaiss. dors. des anim. artic.* 1813) a publié sur l'anatomie de l'*europæus* des généralités assez vagues, parfois hasardées, résultat cependant de ses propres dissections et recommandables par leur date.

5. Dufour (Léon). En juin 1817, je publiai (*Journ. de phys. et hist. natur.*, t. LXXXIV) mes *Recherches anatomiques et observations sur le scorpion roussâtre* (*occitanus*). Si j'eusse connu alors les travaux de Meckel et de Treviranus, le mien aurait été certainement moins incomplet. Mes dissections dataient de 1810 à 1812, et je n'en coordonnai les matériaux qu'en 1817. Le recueil où je les insérai était peut-être mal choisi pour leur publicité, et j'ai éprouvé plus tard qu'il était ignoré des auteurs et des compilateurs étrangers. J'ai aussi récemment présenté à l'Académie des sciences une exposition sommaire de l'anatomie des scorpions, insérée dans ses comptes rendus de janvier 1851.

6. Muller (Jean) (*Anat. des scorp.;* dans Meckel, *Arch. der Anat. und Physiol.*, vol. III, 1818) a disséqué l'un des plus grands scorpions connus, l'*afer*, mais plus ou moins altéré par les liqueurs conservatrices. Dans des conditions aussi défavorables, le laborieux et habile scalpel de Jean Muller ne lui permettait pas de révéler toute la vérité. Je ne connais de ses recherches que des calques fidèles de ses figures et l'explication de celles-ci.

7. Duvernoy. Indépendamment des faits généraux que ce savant de premier ordre a puisés dans les archives de la science et judicieusement classés dans son immense répertoire des *Leçons d'anatomie comparée* de G. Cuvier (1835-1840), il a lui-même disséqué plusieurs espèces de scorpions, et il a consigné les résultats de ses travaux, soit dans le VIII^e^ volume de ces *Leçons*, soit dans les comptes rendus de l'Académie des sciences, 1850 et 1851.

8. Dugès (*Anat. et physiol. compar.*, 1838-39). On était d'autant plus en droit de trouver des faits positifs dans les ouvrages d'un observateur aussi éminent, qu'il habitait la patrie des scorpions, à Montpellier. Hélas! il n'a disséqué que l'*europæus*, encore en nombre fort restreint, et vrai-

semblablement des sujets à l'alcool. Aussi tout est vague et morcelé dans le peu de lignes consacrées à cette occasion.

9. Newport (*Transact. philos. Soc. roy. de Londres*, 1843) a publié un travail considérable avec des figures sur l'anatomie du scorpion, et en particulier sur celle de l'*afer*. Il n'a exercé son scalpel que sur des sujets à l'alcool. Je ne connais point le texte original. Je n'ai eu à consulter qu'un extrait inséré dans les *Annales des sciences naturelles*, ainsi que les calques exacts de ses figures et les copies de quelques-unes de celles-ci gravées dans l'atlas du règne animal.

10. Milne Edwards. Je ne connais de ce savant zoologiste, sur l'anatomie des scorpions, que quelques figures insérées dans le *Règne animal illustré* (1837).

11. Blanchard (Émile) a consacré, dans les *Annales des sciences naturelles pour 1849*, quelques lignes relatives à la circulation et à la respiration des scorpions.

12. Enfin, j'ai consulté divers traités généraux d'anatomie comparée, notamment ceux de Cuvier, par le professeur Duvernoy, de Carus, de Von Siebold.

CHAPITRE PREMIER.

APPAREIL SENSITIF.

Cet appareil a été assez bien vu quant aux ganglions abdominaux et caudaux, qui sont d'une facile dissection, mais pour le cerveau et le ganglion thoracique, centres nerveux principaux, ils ont été défectueusement décrits et figurés. Je n'en excepte point l'élégante figure si habilement symétrisée de M. Newport, représentant l'ensemble du système nerveux d'un androctone.

L'appareil sensitif du scorpion diffère surtout de celui de l'araignée par l'absence dans celle-ci de ganglions abdominaux, fait anatomique bien remarquable et déjà signalé.

J'exposerai successivement le cerveau, le ganglion thoracique, le ganglion stomatogastrique, les ganglions abdominaux, les ganglions caudaux et à chacun de ces centres nerveux les paires de nerfs qui en naissent.

ARTICLE PREMIER.

CERVEAU, YEUX, OCELLES.

1° *Cerveau.* — Le scorpion n'a pas de *tête* proprement dite, cela est vrai. Celle-ci se trouve, non pas seulement soudée, mais continue, confondue avec le thorax, et de là le nom de *céphalothorax* imposé par la science. Toutefois, dans le scorpion comme dans les autres arachnides, la partie antérieure du céphalothorax se fait remarquer ou par plus d'exhaussement, ou par un relief particulier ou par des empreintes symétriques, et elle est seule le siége, soit des yeux, soit des pièces qui entrent dans la composition buccale. L'autre partie donne, à droite et à gauche, attache aux membres de l'animal. Ainsi, quoique la science n'admette point et ne puisse pas effectivement admettre dans le scorpion une tête et un thorax, la nature a pourtant réservé ses droits

anatomiques, car au-dessous de la voûte céphalothoracique il existe en avant un cerveau, plus en arrière un ganglion thoracique.

Le scorpion a donc un *cerveau*. Cet organe, inaperçu par Treviranus, confondu par Muller avec le ganglion thoracique, mieux saisi par M. Newport, admis sans contestation par M. Duvernoy et Von Siebold, est, dans sa situation naturelle, assis, presque sessile sur la partie antérieure et dorsale du ganglion thoracique, confirmant ainsi la fusion de la tête et du thorax. La carcasse musculo-cartilagineuse de l'intérieur du céphalothorax ou la *vertèbre thoracique* de Muller, que je décrirai bientôt, en rend la dissection difficile. Il a un petit volume, vu la grandeur de l'animal, ce qui dépose déjà pour la faible intelligence et l'industrie bornée de cette bestiole. Il est subarrondi, lenticulaire plutôt que convexe, libre à son bord postérieur, qui est arrondi, plus ou moins bilobé à sa partie antérieure (ou plutôt supérieure), où prennent naissance les nerfs optiques; il a une faible teinte jaunâtre, tandis que le ganglion thoracique est blanc mat. Cette teinte dépend positivement d'une très-fine membrane, sorte de méninge ou d'arachnoïde, qui, en s'étendant sur le vaisseau dorsal circulatoire, en impose singulièrement dans l'appréciation des connexions de celui-ci avec le cerveau. Je suis parvenu à dépouiller ce dernier de cette si légère tunique, et alors on constate mieux sa forme bilobée. En lui donnant résolument le nom de cerveau, je me fonde et sur la texture spéciale de sa pulpe, qui a une mollesse de beaucoup supérieure à celle des véritables ganglions, et sur ses attributions physiologiques comme centre des sens. Je ne saurais donc partager l'opinion des anatomistes qui envisagent ce cerveau comme formé de deux ganglions. Dans les articulés qui ont une tête distincte du corselet, par exemple dans les insectes parfaits, le cerveau remplit exactement la cavité crânienne, il en a la configuration plus ou moins sphéroïdale, et il se divise profondément en deux grands lobes égaux, en deux hémisphères. Il en est tout autrement dans le scorpion à cause de l'absence d'une tête particulière.

En disant que cet organe est presque sessile sur le ganglion thoracique, j'ai entendu exprimer son mode de connexion avec ce dernier; connexion qui a été mal étudiée par les anatomistes. Elle a lieu par de larges et courts piliers entre lesquels se trouve une ouverture, un hiatus, dont l'étroitesse est proportionnée à la ténuité de l'œsophage qui le traverse. C'est cet hiatus qui constitue ce qu'on appelle généralement le *collier œsophagien.*

En arrière, le bord libre du cerveau semble si étroitement uni au vaisseau dorsal, qu'on croirait facilement à la continuité du tissu entre ces deux organes. Cette illusion tient à la membrane arachnoïde qui les revêt l'un et l'autre. J'en reparlerai au chapitre de l'appareil circulatoire.

Lorsque j'ai avancé que le cerveau était *plus ou moins* bilobé, j'ai voulu faire pressentir que l'échancrure antérieure de cet organe était sujette à varier pour sa profondeur. Cela tiendrait-il uniquement au plus ou moins d'habileté du scalpel ou au degré de déplacement de cet organe dans ses connexions normales? Le plus souvent, les lobes sont bien prononcés, comme renflés, ventrus. C'est cette forme que mon crayon a prise pour modèle, et je l'ai retrouvée même dans les scorpions retirés des liqueurs conservatrices. D'autres fois, l'échancrure est à peine marquée, et les angles qui la limitent sont peu saillants.

Quoi qu'il en soit, les nerfs optiques *oculaires* naissent de ces lobes ou angles, et se portent directement aux globes des grands yeux. Les optiques *ocellaires* prennent leur origine à ces mêmes lobes, mais plus en arrière que les oculaires et un peu en dessous de ces prolongements cérébraux.

Dans d'innombrables autopsies, j'ai eu beau mettre à de persévérantes épreuves et mon scalpel et mes yeux pour explorer le pourtour ainsi que la surface du cerveau du scorpion, je n'y ai jamais découvert que les paires de nerfs destinés aux organes de la vue. Aucun autre nerf n'en part. Qu'on me permette d'accorder quelque valeur à ce fait négatif, tant dans l'intérêt de la physiologie que dans celui de la classification et de la technologie anatomique.

Les scorpions, comme tous les arachnides, sont privés d'*antennes*, ils sont *aceres*, et Latreille était dans le vrai, lorsque, dans son immortel *Genera*, il donna à ces animaux cette dénomination. Non, les scorpions n'ont point d'antennes. Si des novateurs, tourmentés de l'idéal d'une unité de conformation organique trop absolue, ont nommé les longs bras préhensibles du scorpion des *antennes-pinces*, et les mandibules des *palpes didactyles*, la nature donne par mon scalpel un formel démenti à cette technologie si perturbatrice, si désespérante pour les esprits sensés. Personne ne saisit avec plus d'empressement que moi les lois générales qui régissent la diversité des organismes; je suis toujours heureux de rattacher à ces lois les petits êtres auxquels, depuis plus d'un demi-siècle, je consacre, avec une passion non encore affaiblie, les loisirs de ma profession. Imbu d'une sobriété innée pour les innovations, je n'ai jamais manqué l'occasion d'appliquer aux animaux inférieurs la nomenclature anatomique des notabilités organiques, lorsqu'il y avait dans les viscères similitude de fonctions. Mais je ne me laisse point aller à des conséquences outrées ou forcées; je sais faire la différence de l'*analogie* avec la *conformité;* je ne prétends pas imposer à la nature des lois, des bornes que son omnipotence réprouve.

Si je ne me trompe, c'est un fait commun à tous les animaux articulés pourvus d'antennes, que leur cerveau fournit et les nerfs optiques et les nerfs antennaires et les véritables nerfs palpaires, tandis que c'est aux ganglions thoraciques que prennent leur origine les nerfs destinés aux leviers locomoteurs et aux organes préhensibles. Or, je le répète bien haut, les scorpions n'ont point d'antennes, aussi leur cerveau n'offre-t-il pas le moindre vestige de nerfs antennaires. Cette négation anatomique est, à mes yeux, un témoignage irréfragable, une condamnation sans appel de la fausse interprétation donnée par la plupart des classificateurs aux *chélipalpes*, qu'ils considèrent comme des antennes métamorphosées. Et, puisque j'ai prononcé ce nom de *chélipalpes*, je veux m'expliquer sur son acception technique. Elle est fondée sur

l'analogie de ces bras à pinces avec les palpes des araignées. C'est de ma part une concession provisoire. Ces chélipalpes, reçoivent directement leurs nerfs du ganglion thoracique, de même que les pattes. Je conteste donc formellement l'assertion de Von Siebold, qui fait naître du cerveau même les nerfs destinés aux mandibules qu'il appelle des *palpes maxillaires* (étrange abus des mots!) et aux chélipalpes. Je soutiens, moi, que les nerfs *mandibulaires* et *chélipalpaires* prennent leur origine au ganglion thoracique et non au cerveau.

2° *Yeux et ocelles.* — Après le savant mémoire de F. Muller sur les yeux et la vision des arachnides, il semble que le sujet soit épuisé, car il l'a traité de main de maître. J'y ajouterai néanmoins quelques faits pratiques.

A. Je redis que les nerfs optiques oculaires, ou des grands yeux médians, naissent du prolongement des angles de l'échancrure cérébrale. Ils sont bien séparés l'un de l'autre, très-simples, assez forts, d'une longueur qui dépasse trois ou quatre fois environ le diamètre du globe de l'œil. Dans leur situation naturelle, qui est horizontale, on comprendra que, pour aboutir à ce dernier, ils doivent être *redressés.*

Le globe oculaire du scorpion a, pour sa configuration, une remarquable ressemblance avec celui de la plupart des animaux de l'ordre supérieur. C'est un sphéroïde, mais moins convexe au segment qui correspond à la cornée vitrée du tégument. Ces yeux, séparés extérieurement par une fine crête tégumentaire, ont leurs globes fort rapprochés et établis sur un pannicule commun d'un tissu compacte, serré, blanchâtre, d'apparence fibreuse. Une légère couche adipeuse, un édredon que j'ai souvent constaté, s'observe au voisinage de l'insertion oculaire du nerf optique et se continue, sans solution, aux deux yeux... Sublime précaution de la nature! Malgré ce rapprochement et cette communauté d'assiette, les globes oculaires sont indépendants l'un de l'autre, et il n'est pas difficile de les évulser isolément par une traction bien ménagée de l'optique. Une membrane pigmentale noire embrasse comme

une calotte tout le globe jusqu'à la limite du segment qu'entoure la cornée, et s'étend aussi à l'étroit intervalle qui sépare les deux yeux. L'évulsion de l'œil dans les scorpions fraîchement mis à mort met en évidence, non-seulement la membrane pigmentale qui l'enveloppe, mais encore un lambeau flottant qui déborde comme une portion de voile, et ce lambeau s'est toujours rencontré de la même manière dans divers individus. Dans les autopsies des scorpions retirés des liqueurs conservatrices, ce lambeau flottant n'existe jamais et le *pigmentum* demeure exactement collé sur le globe de l'œil. Cette double observation prouve que ce pigmentum n'est pas un simple enduit, mais une membrane qui a de l'analogie avec la *choroïde* des yeux des grands animaux.

Un trait anatomique essentiel, et que je ne trouve mentionné par aucun de mes prédécesseurs, c'est l'existence au globe de l'œil d'un muscle subpyramidal qui, d'une part, s'implante à la partie postérieure de ce globe, et de l'autre, je crois, aux apophyses de la carcasse cartilagineuse du céphalothorax. N'y a-t-il qu'un seul de ces muscles à chaque globe oculaire ou bien en existe-t-il quelque autre pour établir l'antagonisme? Je n'en ai en effet constaté qu'un, mais je suis porté à croire qu'il n'est pas isolé.

Il est encore un autre trait inaperçu, même par F. Muller. Le segment du globe de l'œil recouvert par la cornée, qui lui transmet la première impression de la lumière, est entouré à sa base d'un anneau calleux, gris blanchâtre, dans une rainure duquel s'enchâsse la cornée, littéralement comme un verre de montre dans sa monture. C'est surtout dans la dissection des scorpions retirés de l'alcool, que l'énucléation du globe oculaire s'exécute avec facilité, en se désenchâssant nettement de cette rainure.

Le milieu ou l'aire du cercle calleux dont je viens de parler est brunâtre ou enfumé et mérite le nom d'*iris*. Je n'y ai point aperçu distinctement une *pupille*, le jeu de celle-ci n'étant sensible que lors de l'exercice de la vision. Mais j'ai rencontré plusieurs fois à la cornée vitrée ou tégumentaire une teinte brune dans son pourtour, résultat de son application immédiate pendant la vie

sur le pigment de l'œil, et au centre un point dénudé, translucide, trace de la pupille. On peut constater cette disposition en étudiant à contre-jour cette cornée à la simple loupe.

Le centre du globe oculaire serait occupé par une lentille globuleuse diaphane, que je n'hésite pas à regarder avec F. Muller comme un véritable *crystallin*. J'avoue que je ne suis point parvenu à l'isoler intégralement, je n'en ai vu que des fragments; mais j'ai foi entière dans l'assertion du célèbre anatomiste allemand.

Cette structure de l'œil du scorpion dont je viens d'esquisser les traits principaux, l'existence surtout d'un muscle oculaire que je suppose soumis à l'empire de la volonté, me donnent la conviction intime que, malgré l'immobilité de la cornée tégumentaire, qui n'est qu'une *paupière vitrée*, le globe de l'œil est susceptible d'exécuter, au-dessous de cette dernière, des mouvements propres. Le scorpion, aux habitudes nocturnes et ténébreuses, pourrait donc diriger à son gré les axes visuels de ses grands yeux! La vue de cet animal aurait-elle quelque analogie avec celle des oiseaux de nuit et du chat? Cela est possible, c'est même vraisemblable. Mais comment convertir cette présomption en fait démontré?

F. Muller a émis l'opinion que la forme fortement globuleuse du cristallin des grands yeux, et la convexité de la cornée, indiquaient dans les scorpions une excellente vue pour les objets rapprochés, mais une vue peu nette pour les objets distancés. Leurs habitudes sédentaires et leur genre de vie viennent à l'appui de cette idée de myopie, que je partage volontiers.

Les yeux des scorpions, tant les grands que les petits, ont été classés parmi les yeux *simples* ou *stemmates*, par opposition aux yeux *à réseaux* qui caractérisent la classe immense des insectes. Qu'on me permette de fournir encore, à l'occasion de ces yeux, un exemple assez intéressant de la marche graduelle de la nature dans ses plus petites, comme dans ses plus grandes créations. Je viens d'insinuer par plusieurs preuves anatomiques que les yeux

médians du scorpion jouissaient d'une certaine mobilité de l'axe visuel. N'y a-t-il pas là un mode spécial d'organisation, qu'on retrouvera sans doute dans d'autres arachnides, un progrès organique qui vient remplacer, quant à la vision, d'une part, le groupe des globules oculaires des cloportides, des myriapodes, etc.; de l'autre part, les innombrables facettes des yeux composés des insectes? Quelle piquante série de modifications se déroule dans la longue chaîne des articulés, depuis ces cornées rares et comme égarées de certaines scolopendres, jusqu'à la somptuosité des facettes oculaires de la libellule !

Avant d'aborder les ocelles, qu'on veuille bien se pénétrer de la condition de position des grands yeux. Placés au centre de la voûte céphalothoracique, qui est à poste fixe, il leur est physiquement impossible, vu leur direction latérale et l'immobilité de la cornée, de diriger un rayon visuel sur le sol ou support immédiat. Cette faculté est exclusivement réservée aux ocelles, comme je le dirai bientôt. Pour quiconque a étudié vivants les scorpions, il est bien positif que cet animal est blessé par l'impression de la vive lumière, et, pour ne parler que de l'*occitanus*, que j'ai plus particulièrement étudié *in loco natali*, jamais dans les plusieurs centaines que j'ai recueillies, je ne l'ai trouvé courant en plein jour sur le sol; constamment je le découvrais blotti sous les abris, et reculant aussitôt devant le grand jour. Dans une captivité où je cherchais à l'entourer des conditions hygiéniques de sa terre natale, c'est toujours au coucher du soleil que je le surprenais sortant de sa tanière, explorant l'enceinte de sa prison, heurtant, grattant les obstacles pour reconquérir une liberté impossible. Un jour, un de mes scorpions captifs se trouvait tellement bien placé contre la paroi interne de sa prison vitrée, que je pouvais suffisamment approcher ma loupe pour surprendre ses grands yeux. Ceux-ci, dans l'ombre, me parurent avoir le centre dénudé comme une pupille dilatée; je projetai un rayon de soleil sur sa tête, l'animal se recula, fut ébloui et l'œil devint tout noir. Je le laissai à l'abri de la vive lumière et ses yeux reprirent, après

un certain temps, leur pupille. J'ai renouvelé l'expérience à plusieurs reprises, et j'ai obtenu les mêmes résultats.

B. Les nerfs optiques *ocellaires,* dont j'ai indiqué plus haut l'origine au cerveau, ont une longueur dont la mesure est exprimée par la distance des ocelles aux yeux médians. D'une finesse plus que capillaire, ils demeurent longtemps simples, puis ils se divisent en trois nerfs qui vont se porter isolément aux trois globes ocellaires.

Ceux-ci, infiniment plus petits que les médians, ont comme eux une cornée vitrée très-convexe. Au-dessous du tégument corné, ils reposent sur une membrane souple et fibreuse où ils demeurent adhérents, lorsque après la macération on les évulse de leur cornée. Je les ai toujours vus noirs et j'y ai vainement cherché l'anneau calleux des grands yeux. Je dois penser que, dans l'exercice de la vision, le pigment se retire du centre pour former une pupille. Leur petitesse s'oppose à bien des constatations. Tout me porte à croire que les globes ocellaires sont immobiles. Leur position marginale, leur rapprochement du plan de support, par conséquent des objets qu'ils ont intérêt à saisir ou à éviter, semblent justifier l'opinion de F. Muller, qui pense que leur myopie est plus grande que celle des yeux médians. Ceux-ci, à raison de leur siége plus élevé, de leur grandeur et de leur mobilité, sont donc les sentinelles avancées de la vision, destinées à prévenir, à conjurer le danger. O sagesse infinie !

J'ai souvent dit, et je ne crains pas de le répéter, l'anatomie est appelée à confirmer ou à infirmer la classification, à redresser des erreurs. L'optique ocellaire de notre scorpion va nous en fournir un nouvel et incontestable exemple. Latreille avait attribué avec raison à l'*occitanus* huit yeux, dont six latéraux ou ocelles.

Dans mon mémoire de 1817, je reconnus, je figurai ce même nombre, et mon scalpel en établit la preuve anatomique irréfragable, dans la division de l'optique ocellaire en trois nerfs distincts. Les classificateurs germaniques, dans leur entraînement pour la création des genres, et leur prodigalité des yeux, en ont

donné douze à l'*occitanus*, devenu pour eux un *androctonus*. On a pris pour des ocelles de simples granules tégumentaires, et dans mes récentes investigations sur ce même *occitanus*, au lieu de deux granules, j'en ai trouvé jusqu'à six ou sept rangés contre la série des trois véritables ocelles. L'*australis*, aussi pour eux un *androctonus*, n'a non plus que trois globes ocellaires. Et que penser de la figure déjà citée de M. Newport, où le système nerveux d'un *androctonus* offre cinq globes ocellaires terminant un même nombre de nerfs? N'est-ce pas là une image purement théorique ou schématique?

L'*europæus*, placé par Lemprich dans son genre *scorpius* (pour ne pas dire *scorpio*... misères humaines!), et qui n'a effectivement que deux ocelles latéraux, m'a fourni, par l'étude des fœtus, un fait inaperçu jusqu'à ce jour et bien digne d'être signalé. Ces fœtus, que j'ai représentés, ont, à cet âge de la vie utérine, un céphalothorax avec trois points noirs latéraux très-distincts correspondant aux futurs ocelles. Dans une dissection heureuse de ces fœtus, j'ai détaché les ocelles de leur cornée tégumentaire, et quelle ne fut pas ma surprise en constatant, non pas deux, mais trois nerfs aboutissant aux trois ocelles embryonnaires? De ces derniers, soumis à une étude scrupuleuse, deux étaient contigus, comme confondus dans un seul et même germe. Il paraît qu'aux approches de la naissance, l'un moins saillant avorte, s'étiole, s'anéantit et n'est plus représenté à l'extérieur par une cornée vitrée. La nature, vous le voyez, ne déroge point ici à l'harmonie de ses créations échelonnées; elle a, par l'existence fœtale du troisième ocelle, et plus tard par son avortement, révélé à l'œil patient du microtomiste habitué à braver les difficultés, et la condition vestigiaire fugace de cet ocelle et sa constance dans le plan graduel de l'organisation.

J'ai aussi constaté, par la dissection, l'existence de trois nerfs ocellaires dans les scorpions *afer*, *palmatus*, *biaculeatus*, *leioderma* et *longicauda*, rangés par les classificateurs plus récents dans le genre *buthus*. Dans le *nigrolineatus*, espèce exotique si rapprochée

de l'*occitanus*, les trois nerfs ocellaires n'ont pas leur origine à un même point comme dans ce dernier; l'un, ou l'intermédiaire, est tout à fait séparé des autres.

ARTICLE II.

GANGLION THORACIQUE.

J'avais d'abord compris dans cet article, la description de la structure squelettique intérieure du plastron du scorpion, ainsi que celle de la carcasse cartilagineuse qui garnit la cavité céphalothoracique et qui couvre ou enchâsse ce grand ganglion, mais j'ai renvoyé cette double exposition au chapitre de l'appareil musculaire splanchnique.

Quelles incroyables difficultés pour mettre en évidence cet important centre nerveux, enseveli, enchevêtré si profondément au milieu de ces anfractuosités, de ces apophyses, de ces lames, de ces cloisons, de ces muscles; ici la vérité est certes au fond du puits, et pour la révéler, pour la traduire en lumière, que de sujets de tous les âges à sacrifier, à quelles épreuves de patience ne faut-il pas se vouer!

Je dirai par quels procédés je suis arrivé à la connaissance positive de ce ganglion et de ces diverses connexions. Pour m'assurer de l'existence des nerfs cruraux, j'ai employé deux méthodes : la première consiste, après avoir soigneusement enlevé la carapace céphalothoracique, à cerner avec la pointe du scalpel le pourtour immédiat du ganglion, de manière à trancher à leur origine les grands troncs nerveux; alors, en saisissant avec une pince les cuisses ou mieux les hanches des membres, et en tirant à soi avec ménagement, on voit, une fois ou autre, suivre la portion thoracique de quelque nerf crural. La seconde méthode est la contre-épreuve de la première; il faut amputer les hanches, abattre, déblayer les cloisons, les apophyses, pincer ensuite le ganglion et l'entraîner en le soulevant, en tout ou plus souvent en partie. Il n'est pas rare, pour peu qu'on soit heureux, d'aper-

cevoir les tronçons des nerfs cruraux encore attachés à ce centre nerveux.

Quant au corps même de celui-ci, je l'ai rarement bien vu dans les scorpions frais disséqués par la région dorsale. Les sujets retirés de la macération dans le deutochlorure de mercure, et attaqués par le dessous du plastron, m'ont souvent procuré la satisfaction de constater ce ganglion dans son intégrité. C'est par ces manœuvres, cinquante fois renouvelées, que j'ai finalement su la vérité. Je résumerai donc, dans quelques lignes, le résultat de mes nombreuses investigations.

J'appelle *ganglion thoracique*, par analogie avec ce qu'on observe dans la plupart des animaux articulés, ce grand centre nerveux que, par un étrange abus de technologie, Von Siebold dit être le premier *ganglion abdominal.* Il est enclavé dans les profondeurs du céphalothorax, ovalaire, mais échancré en avant; il a ses bords plus ou moins festonnés par le fait de l'insertion des grands troncs nerveux. Il émet sur ses côtés les quatre paires de nerfs *cruraux* pour les membres ambulatoires, une paire de nerfs *chélipalpaires,* et dans l'échancrure antérieure une paire moins forte de nerfs *mandibulaires.* En avant et en dessus, est assis le cerveau; en arrière, il est contigu au premier ganglion abdominal, origine du cordon rachidien. Sa texture est plus compacte, plus blanche, que celle des ganglions abdominaux; il ne repose point à nu sur le plancher corné du plastron ou sternum; dans sa vigilante sollicitude, la création a étendu là une couche adipeuse, une ouate des plus fines, qui le garantit.

Mais indépendamment de ces grands nerfs locomoteurs, une bonne lentille découvre entre leurs origines de fort petits nerfs en nombre indéterminable, insérés aux bords du ganglion thoracique et destinés aux muscles, aux tissus, aux viscères de cette partie du corps.

Dans la dissection de deux *occitanus* non adultes, qui avaient séjourné deux mois dans le deutochlorure, j'ai pu clairement constater que le ganglion thoracique, isolé sans lésion, avait une

ligne médiane longitudinale, soit en dessus, soit en dessous. Cette impression linéaire indique, sans nul doute, que pendant l'existence fœtale, ce ganglion est formé de deux moitiés semblables qui se soudent à la naissance, mais en laissant, pendant la période de croissance, la trace fugitive de cette union. Des faits analogues ne sont pas rares dans les organismes supérieurs.

Le système nerveux thoracique du scorpion a été mal défini, mal compris, par les anatomistes qui en ont parlé. Treviranus, dans son texte comme dans ses dessins, a été bien malheureusement inspiré; ce qu'il appelle cerveau est une masse confuse que l'imagination seule a symétrisée et qui n'offre une sérieuse ressemblance ni avec le légitime cerveau, ni avec le ganglion thoracique. F. Muller, au milieu de ses difficultueuses dissections, a entrevu les parties principales, mais il en a mal saisi la configuration, les connexions et les attributions. Son gros cerveau, qui est le ganglion thoracique; son petit cerveau, d'où il fait naître les nerfs des chélipalpes et des mandibules, en même temps que les optiques, témoignent assez haut et de son embarras descriptif et de l'hésitation parfois aventureuse de son crayon.

Maintenant, que l'on confronte mes figures actuelles, représentant, d'après nature, le ganglion thoracique, avec la *masse nerveuse* de M. Newport, pour me servir de son expression, avec ses nerfs cruraux si poétiquement ramifiés, et l'on jugera s'il est possible que nous ayons eu sous les yeux un même modèle. Et qu'on n'arguë point de la différence spécifique du scorpion; le système nerveux ne varie pas d'espèce à espèce, ni même de genre à genre, au moins notablement. Fort de mon scalpel pratique, et d'une indépendance sincère dans mon appréciation des faits scientifiques, je n'hésite point à déclarer que la figure de M. Newport relative au système nerveux du scorpion, est presque aussi théorique que celle à laquelle il donne cette épithète à l'occasion du système circulatoire. N'est-il pas évident, aux yeux de tout anatomiste qui a sérieusement disséqué des scorpions en bon état, que l'auteur de cette spécieuse figure a beaucoup puisé

dans son imagination, tant pour le corps du ganglion, que pour ce vaste faisceau terminal des nerfs, dont la destination est si embarrassante?

Que penser encore de l'opinion de Von Siebold, qui regarde notre ganglion thoracique comme le premier ganglion abdominal? N'est-il pas clair que Von Siebold n'a jamais disséqué à fond un céphalothorax de scorpion, ou qu'il a hasardeusement interprété les travaux de ses devanciers?

ARTICLE III.

GANGLION STOMATO-GASTRIQUE.

J'avais entièrement désespéré de découvrir dans le scorpion le système nerveux *stomato-gastrique* de Brandt, lorsqu'en octobre 1850, ayant disséqué un *occitanus* mort de sa mort naturelle, j'eus le bonheur d'entraîner, avec l'œsophage et vers son origine, un petit ganglion indépendant de la chaîne ganglionnaire ordinaire.

Ce ganglion est petit (impair, je crois), ovale-oblong, fixé en arrière de l'œsophage par plusieurs nerfs, tandis qu'en avant il s'atténuait en un cordon rompu qui me sembla formé de deux filets. D'où ce cordon a-t-il été arraché? Je l'ignore complétement. Toujours est-il que ce ganglion émet de chaque côte, non pas une seule paire de nerfs comme ceux de la grande chaîne abdominale, mais deux paires bien distinctes, destinées sans doute aux organes buccaux, puis il se termine par quatre nerfs qui s'épanouissent et s'enracinent dans les parois du tube digestif. Ainsi, il ne se continue pas en arrière par un cordon comme les ganglions de l'abdomen et de la queue.

C'est là, sans nul doute, le système nerveux stomato-gastrique de Brandt, déjà mentionné dans les insectes par Jean Muller, et bien avant ce dernier auteur par Succow et Audouin. Mais remarquez que Brandt n'a point signalé, dans les araignées qu'il a disséquées, l'existence de *ganglions stomato-gastriques;* il se borne à parler de nerfs partis du cerveau, pour aller se distribuer aux viscères

digestifs, sans connexions avec la chaîne ganglionnaire, et il indique l'analogie de ces nerfs avec ceux des crustacés et des insectes. (*Ann. des sc. nat.* IIe sér., V, p. 94).

Dans une note de son Manuel, Von Siebold cite à tort Dugès comme ayant parlé de ce système nerveux stomato-gastrique dans la dissection de la mygale aviculaire; mais on va juger de cette interprétation par la citation textuelle de Dugès. « J'ai cru voir aussi, dit-il, un filament impair fort grêle se porter sur la ligne médiane de l'estomac, mais il parassait partir d'une origine commune et membraniforme avec celle des deux plexus latéraux et ne faisant point système à part. » (*Ann. des sc. nat.* IIe sér., VI, p. 175).

ARTICLE IV.

GANGLIONS ABDOMINAUX.

Un fait, qu'après tant et tant d'autopsies je n'ai pourtant bien constaté que dans les dernières de celles-ci, c'est que le cordon rachidien abdominal du scorpion ne repose point à nu sur le panicule musculaire ventral. Il est positivement engagé entre les lobules inférieurs du foie. On peut s'assurer de ce fait en ouvrant, par la région ventrale, un jeune sujet à l'alcool.

J'ai longtemps cru, avec mes prédécesseurs, qu'il n'existait dans le scorpion que trois ganglions abdominaux, et en étudiant la distribution des nerfs aux poumons, j'avais été frappé de voir que sur quatre paires de ces organes de la respiration, trois tiraient leurs nerfs pulmonaires des trois ganglions admis par tout le monde, tandis que la première paire semblait les recevoir de l'intérieur du céphalothorax. Toujours préoccupé de l'idée de trois ganglions seulement, je me croyais autorisé, par plus de vingt autopsies, à penser que les nerfs de la première paire de poumons prenaient leur origine au grand ganglion thoracique lui-même. Je ne pouvais m'expliquer une origine aussi exceptionnelle, je ne me rendais pas compte de cette infraction aux lois physiologiques, je me sauvais de mon embarras en taxant d'anomalie cette disposition.

Voyez à quelles vicissitudes l'observateur le plus prudent, le plus défiant, le plus sincère dans la recherche des faits positifs peut être exposé, lorsque la constatation de ces faits s'accompagne de ces difficultés qui défient la portée de nos sens comme dans le cas actuel. Dans les premières autopsies de 1850, j'avais cru reconnaître, en arrière du grand centre nerveux thoracique, un ganglion. J'en avais consigné la figure dans mes croquis, je me sentais à l'aise par cette découverte; mais, dans un nombre considérable d'autres dissections, je ne retrouvai plus mon ganglion, et dans les procès-verbaux de mes autopsies, je m'accusais d'erreur. Je subis des mois entiers ma cruelle perplexité, ruminant incessamment une décision sur ce point, lorsque, tourmenté du mot anomalie inscrit en désespoir de cause, je ressaisis le scalpel avec l'intention bien arrêtée de poursuivre cette solution anatomique; je pris pour sujets deux scorpions non adultes, jetés deux mois auparavant dans le deutochlorure; je disséquai par la paroi ventrale. Après m'être débarrassé par un coup fort heureux de la carcasse thoracique, sans rompre la continuité du cordon rachidien avec le ganglion thoracique, ce qui est fort rare, le ganglion si convoité, longtemps si problématique, m'apparut escorté de ses nerfs pulmonaires; j'éprouvai une de ces joies saisissantes réservées aux amants passionnés de la science. Le fait matériel était donc acquis et authentique; il mit fin à tous mes scrupules, l'anomalie disparut, mon triomphe fut parfait.

La découverte de ce ganglion, inconnu à mes devanciers, venait rétablir l'harmonie entre les poumons et les ganglions abdominaux; le nombre quatre leur était commun. Son existence presque rudimentaire, à cet âge du scorpion, lui donnait encore plus de valeur à mes yeux, et elle m'enhardit à tenter de nouvelles investigations sur les sujets adultes. Je réussis à mettre ce ganglion en évidence dans ceux-ci. Plus tard je le trouvai plus grand, mieux caractérisé, dans l'*afer;* je le constatai dans l'*europæus* dans le *biaculeatus* et tout récemment (avril 1851) dans deux jeunes individus de l'*occitanus,* morts dans ma ménagerie cellulaire. J'ou-

bliais de dire que ce ganglion est limitrophe entre le céphalothorax et l'abdomen.

A son origine au centre nerveux thoracique ce ganglion, dans les très-jeunes sujets, ne semble qu'un léger renflement du cordon rachidien; mais son véritable trait anatomique et physiologique se trouve dans l'émission latérale des deux nerfs pulmonaires et dans le nerf impair de sa face inférieure. Je constatai aussi dans l'*occitanus* une paire de nerfs particulière à ce ganglion, car il n'en existe aucune trace dans les ganglions suivants. Ces nerfs naissent dans l'aisselle de l'origine des nerfs pulmonaires; il sont fins et se continuent assez loin sans se ramifier. Je suppose qu'ils appartiennent aux peignes, qui précisément se trouvent sous-jacents.

Les trois ganglions abdominaux qui suivent le premier sont bien plus prononcés que celui-ci, sans l'être néanmoins autant que ceux de la plupart des insectes; ils sont ellipsoïdaux et émettent chacun trois nerfs bien distincts, deux *latéraux* (et non quatre, comme l'avance Von Siebold) et un impair *inférieur*. Le premier de ces trois ganglions, qui est le second de la série, est placé à la hauteur de la seconde paire de poumons, à laquelle il envoie, en ligne à peu près directe, ses nerfs latéraux; il en est de même pour le ganglion suivant. Les nerfs latéraux du ganglion terminal marchent d'arrière en avant pour se rendre à la quatrième paire de poumons, c'est-à-dire qu'ils sont récurrents. Tous ces nerfs ne se bifurquent qu'à une certaine distance de leur origine; ils ne se distribuent pas exclusivement aux poumons; ils fournissent aussi des branches, des rameaux au panicule musculaire qui revêt le tegument, aux tissus circonvoisions, au parenchyme hépatique, au canal digestif et jusqu'à l'organe central de la circulation. J'ai, à diverses reprises, surpris les filets nerveux qui distribuaient la sensibilité à tous ces tissus.

Quant au nerf impair ou inférieur, qui naît du centre du ganglion, il répand ses ramifications infinies dans les viscères et les tissus de la cavité abdominale, et peut-être plus spécialement aux organes génitaux, étalés, comme on sait, dans toute l'étendue de

celle-ci. L'absence de ce nerf impair dans les ganglions caudaux vient puissamment appuyer ma présomption relative aux attributions physiologiques de ces nerfs impairs; ils seraient des *nerfs génitaux*.

Le cordon rachidien inter-ganglionnaire, soit à l'abdomen, soit à la queue, est toujours double comme dans les insectes (diptères exceptés), c'est-à-dire formé de deux filets plus ou moins contigus. Cette contiguïté est parfois telle, dans quelques individus, que la loupe a de la peine à distinguer le trait linéaire qui l'indique, et la pince est inhabile à séparer les deux filets; on se persuaderait alors facilement que ce cordon est simple. J'avoue même que, dans ma vieille pratique, ces cas exceptionnels m'ont fort embarrassé. En décembre 1850, je constatai le trait de cette contiguïté comme effacé dans un sujet tué par le froid, après une diète rigoureuse de trois mois. Dans l'animal vivant, j'ai clairement constaté, à travers la demi-pellucidité du tegument ventral, la disjonction de ces filets pendant certains actes de la vie. Ce cordon ne fournit dans son trajet aucun nerf propre.

A ce que je viens d'exposer sur le système nerveux abdominal du scorpion, j'ajouterai un fait resté inaperçu à mes devanciers. Un œil attentif décèle, dans le trajet abdominal du cordon rachidien des sachets adipeux grêles, cylindriques, variables pour leur nombre et leur longueur, et étroitement adhérents; le plus souvent ils sont courts et oblongs, mais parfois ils atteignent une longueur qui leur donne l'apparence d'un nerf. Il suffit de les saisir avec la pince pour se convaincre de l'illusion. La *moelle prolongée* de Jean Muller, qu'il dit sortir par la vertèbre thoracique, et qui, dans la figure 5 de la planche 1, semble un troisième filet nerveux accompagnant le cordon rachidien dans toute son étendue, pourrait bien n'être qu'un fourreau adipeux dont je parlerai tout à l'heure.

Avant Jean Muller, Treviranus était, je crois, tombé dans une méprise semblable à l'occasion de l'*europæus;* mais dans le texte, il attribue trois filets au cordon dans son trajet abdominal, tandis

que sa figure ne l'indique qu'avant le premier des trois ganglions de l'abdomen. Le burin donne donc un démenti au texte, et cette opposition est assez significative. Ainsi, la découverte, minime au premier abord, de ces sachets adipeux collés contre le cordon rachidien acquiert une véritable importance critique pour expliquer la méprise de ces deux célèbres anatomistes.

Voici encore à ce sujet un fait qui n'est point sans valeur. J'ai remarqué dans plusieurs autopsies de l'*afer* que le cordon inter-ganglionnaire abdominal, au lieu des sachets oblongs de l'*occitanus*, était enduit, enveloppé d'une couche adipeuse continue qui en masquait complétement la structure propre; il faut enlever avec le grattoir cet enduit pour mettre à nu les deux filets constitutifs de ce cordon. Dans la figure de Newport, le dessinateur, le graveur ou le copiste ont représenté ce cordon comme simple, et c'est là une erreur flagrante.

Quant à la *moelle prolongée* de J. Muller, qui se trouve détachée du cordon inter-ganglionnaire dont les deux filets sont largement écartés, je ne saurais m'en rendre raison.

ARTICLE V.

GANGLIONS CAUDAUX.

Quoique la queue des scorpions ait dans toutes les espèces six articles, il n'y existe que quatre ganglions. Ainsi, le nombre de ceux-ci n'est pas plus en harmonie avec celui de ces articles, que ceux de l'abdomen avec les segments tégumentaires de ce dernier. Ils sont bien plus arrondis que les abdominaux; ils manquent de nerf impair ou inférieur, et j'ai déjà, à l'occasion des nerfs génitaux, parlé de l'induction physiologique inspirée par cette absence. Ils n'émettent donc qu'une paire de nerfs latéraux. Ceux-ci, d'une brièveté en rapport avec le diamètre des articles de la queue, se distribuent à leurs puissants muscles ainsi qu'à l'intestin et au vaisseau circulatoire.

Le premier ganglion occupe l'articulation du dernier segment

abdominal avec le premier nœud caudal; les deux suivants, la seconde et la troisième de ces articulations, et le quatrième ou terminal, le commencement du quatrième nœud.

Ce dernier ganglion, le plus grand de tous, a trois paires de nerfs : l'une, près de son origine; la seconde, vers le milieu représentant les nerfs latéraux ordinaires; enfin, la troisième paire, plus positivement terminale, représente les doubles cordons rachidiens inter-ganglionnaires et se fait remarquer par un fort calibre. Elle correspond évidemment aux *nerfs génitaux* des insectes, parce qu'effectivement, dans ceux-ci, l'appareil de la génération est placé à la partie postérieure de l'abdomen. Une semblable dénomination est inapplicable aux scorpions, chez lesquels les organes générateurs, dans les deux sexes, aboutissent à la base et non au bout de l'abdomen.

Mais l'arme offensive et défensive de notre arachnide, cette ampoule qui recèle une glande vénénifique et que termine l'aiguillon instillateur du subtil poison, occupe le bout de la queue. C'est là un organe qui sauvegarde l'animal; c'est là que la nature a créé une infinité de muscles soumis à l'empire de la volonté et destinés à lui imprimer la direction exigée pour faire face à l'ennemi. Ce double faisceau des nerfs terminaux de la chaîne rachidienne distribue donc la sensibilité et l'irritabilité à la glande vénénifique et aux puissances musculaires qui la mettent en jeu.

CHAPITRE II.

APPAREIL CIRCULATOIRE.

C'est ici une des questions les plus difficiles et en même temps les plus litigieuses de l'anatomie des scorpions. Des hommes dont le savoir ne saurait être révoqué en doute, mais dont l'esprit est préoccupé d'idées trop absolues d'unité de conformation organique, ont imaginé que parce que le scorpion avait un cœur, des vaisseaux sanguins et des poumons, il était de toute nécessité qu'il eût un système complet de grande circulation, une aorte, des

artères, des veines, etc. Mais que ces savants, affranchis d'idées préconçues, veuillent bien descendre, le scalpel à la main, des hauteurs de l'échelle zoologique dans la série des organismes inférieurs, dans celle des animaux à sang blanc, et ils se convaincront que ceux-ci partagent, avec les sommités organiques, l'exercice régulier de toutes les grandes fonctions, quoique avec des organes et moins nombreux et moins compliqués. Ils s'assureront aussi que le même esprit créateur qui a fait l'homme et l'araignée, et dont la toute-puissance a si savemment réparti les formes et l'intelligence entre ces deux types extrêmes, sait atteindre un même but en diversifiant les moyens à l'infini.

Avant d'aborder le contrôle consciencieux des opinions émises au sujet de la circulation du scorpion par les savants dont les travaux ont devancé le mien, donnons la description de cet appareil tel que l'ont offert à mes yeux des autopsies sans nombre pratiquées sur des sujets de tous les âges et dans toutes les conditions de la vie et de la mort.

Considéré dans son ensemble, l'organe central de la circulation est un long vaisseau placé à la ligne médiane dorsale du corps, depuis la partie antérieure du céphalothorax, jusque dans le dernier article de la queue. Plus large dans son trajet abdominal et atténué en avant comme en arrière, il est, à proprement parler, fusiforme.

Nous y distinguerons trois portions, suivant les régions du corps qu'elles occupent : l'*abdominale*, la *céphalothoracique* et la *caudale*. Examinons-les séparément.

ARTICLE PREMIER.

PORTION ABDOMINALE, OU CŒUR.

Plus large et surtout plus fortement organisée que les autres, elle est spécialement désignée sous le nom de *cœur* et mérite cette dénomination. Ce cœur repose sur la gouttière médiane du foie en même temps qu'il est sous-jacent au panicule musculaire du

tegument dorsal. Il émet sur ses côtés des paires régulières et symétriques de vaisseaux sanguins. Hâtons-nous de le dire, si dans un sujet frais on l'ouvre par une incision longitudinale qui n'intéresse que sa paroi supérieure, on s'assure que, non-seulement il n'y existe qu'une seule cavité continue ou non interrompue, mais que la texture de ses parois est partout uniforme, identique.

L'existence d'une cavité unique dans le cœur du scorpion est un fait incontestable dont je revendique la découverte.

Ouvrez à l'air libre un scorpion *vivant* préalablement fixé sur une planchette, mettez à découvert le cœur sans le léser, et vous constaterez facilement les contractions et les dilatations alternatives de cet organe creux. Notez bien que ce n'est point une seule *systole,* une seule *diastole* pour toute la longueur du vaisseau, mais une série successive de ces actes, de telle façon, que l'impulsion circulatoire du sang s'exécute par jets ou par ondées. Celles-ci, attentivement observées, paraissent et disparaissent instantanément, et pourtant sont constantes pour leur nombre. Il y en a sept, autant que de paires de vaisseaux partant de ce cœur.

Dans cette même *vivisection* vous remarquerez que ce mouvement de palpitation demeure parfois suspendu momentanément, et alors les étranglements onduleux cessent, s'effacent *complétement.* Dans ce court instant, le cœur reste uni et égal dans toute son étendue. Puis les mouvements ondulatoires peuvent reprendre encore pour s'éteindre à la mort définitive. Ces mêmes résultats s'observent aussi dans les sujets éthérisés ou chloroformisés jusqu'à parfaite résolution, toutefois sans mort absolue. Combien de fois n'ai-je pas constaté alors, qu'au milieu de l'inaction et de l'insensibilité de toutes les parties, les battements du cœur se maintenaient seuls un certain temps; cet organe était l'*ultimum moriens.*

Voilà ce que l'observation directe m'a vingt fois démontré sur le scorpion disséqué à l'air libre dans un état de vie à divers degrés.

Exposons maintenant la composition et la structure du cœur.

Les mouvements de systole et de diastole du cœur, ainsi que sa texture anatomique, prouvent à l'évidence que c'est un organe d'impulsion. Il est revêtu de deux tuniques, l'une interne, l'autre externe. Elles avaient été signalées par Treviranus, mais peu ou mal décrites.

1° *Tunique interne ou propre.* — Elle se trouve en contact direct avec le liquide nutritif ou le sang. Elle donne immédiatement naissance aux vaisseaux circulatoires, est d'une finesse extrême et hyaline. On la croirait simplement membraneuse, mais elle est formée de fibres subannulaires, spiroïdes et élastiques, ainsi que le prouve le double fait suivant recueilli en novembre 1849 et en octobre 1850 sur de jeunes *occitanus,* depuis plus d'un an conservés dans l'alcool. Après avoir, par un heureux hasard du scalpel, dépouillé de la tunique externe quelques parties du cœur, je parvins à isoler les fragments tubuleux de la tunique propre. Je soumis ces fragments au microscope et j'y constatai les fibres spiroïdes dont j'ai parlé. Des lambeaux de cette tunique détachée présentaient des rubans fibreux qui s'enroulaient, par leur élasticité, absolument comme ceux de la tunique trachéenne des insectes; j'ai exprimé cela par une figure. Quoique dans le cours de mes longues investigations cette texture ne m'ait été révélée que deux fois, elle est, dans ma conviction, solidement établie. Je le répète, c'est sur de jeunes sujets que j'ai vu ce double fait.

Cette élasticité de la tunique propre du cœur est on ne peut plus favorable à cette impulsion réactive qui fait circuler le sang. Elle explique aussi l'inflexion des bords incisés des parois du cœur dans la vivisection de cet organe. Ce fait a donc sa double valeur d'anatomie et de physiologie.

J'observe que le tube formé par cette tunique propre paraît d'un fort petit diamètre, comparativement à celui du cœur avant sa dissection intime. Cette différence tient à l'épaisseur de la tunique externe.

2° *Tunique externe.* — Elle est, par sa texture comme par ses fonctions, parfaitement comparable aux parois musculaires du cœur

des grands animaux. Elle est fibro-musculaire, ainsi que l'avait déjà dit Treviranus, et ses fibres sont principalement longitudinales.

Il existe, à la paroi inférieure de cette tunique, un ordre particulier de muscles qui méritent de nous occuper. Ils ont été à peine entrevus par mes devanciers qui se sont livrés sur ce point à de singuliers écarts d'interprétation. Ces muscles, que j'appelle *cardiaques,* s'insèrent, d'une part, tout près de l'origine des vaisseaux sanguins émanés du cœur, et de l'autre au ruban musculaire longitudinal du panicule ventral à côté des muscles perforants; ce sont des filets grêles, dont le nombre et le calibre égalent ceux de ces vaisseaux. Il y en a donc sept paires. Et comme dans la plupart des dissections ils sont rompus, déchirés, on les voit déborder le cœur et en imposer d'autant mieux pour des troncs vasculaires, qu'à leur déchirure il y a des fibrilles qui simulent des ramifications. Entre les deux points d'insertion ils ont, quand on est assez heureux pour ne pas les rompre, une portion ventrue plus charnue, ce qui les rend fusiformes.

Ils traversent de haut en bas le foie comme les muscles perforants, mais la finesse de leurs tendons rend insensibles les pertuis de la pulpe hépatique qui leur livre passage.

A les juger par leurs attaches opposées ils doivent, dans leur inaction, brider, fixer le cœur, et dans leur contraction, ou tirer en bas cet organe, ou favoriser son action impulsive, suivant le mode de cette contraction.

Dans quelques sujets à l'alcool, favorablement altérés, je suis parvenu à séparer des portions tubuleuses assez considérables de cette tunique où demeuraient fixés ces muscles cardiaques, tandis que les troncs des légitimes vaisseaux circulatoires n'avaient point subi la désinvagination de cette tunique; j'ai fidèlement figuré ce fait.

J'avoue que, pendant plus de trente dissections, cette contiguïté, cette origine presque commune, cette analogie si insidieuse des vaisseaux circulatoires du cœur et des muscles cardiaques

m'avaient cruellement tourmenté pour en concilier les attributions physiologiques. Les observateurs scrupuleux qui ne transigent point avec leurs convictions, et qui savent se tenir en garde contre les élans d'une imagination aventureuse, comprendront ma situation d'esprit à l'endroit de la supposition de ce double vaisseau... Quel appât de séduction en faveur de l'existence d'artères et de veines, surtout après avoir jeté un regard étonné sur cette double circulation vasculaire si spécieusement représentée ou imaginée par Newport! Grâces au ciel je contenais l'impatience de mes interprétations, j'ai su persévérer dans mes incertitudes jusqu'à la révélation tardive de la vérité par le scalpel.

DES TRANSFORMATIONS CADAVÉRIQUES DU CŒUR.

Sous ce titre j'exposerai des faits, des expériences, des réflexions concernant les formes, ou mieux, les transformations que subit le cœur par l'effet des altérations cadavériques. Ces documents, en même temps qu'ils tendent à confirmer la véritable structure de l'organe pendant la vie, vont aussi mettre en relief les malheureuses erreurs de mes prédécesseurs, qui ont pris ces déformations pour un état normal.

Dans une femelle adulte, qu'immédiatement après sa mort *naturelle* j'avais plongée dans la solution du deutochlorure de mercure, d'où je ne la retirai, pour la disséquer, que vingt jours après, j'ai constaté le cœur tout d'une venue et sans le moindre indice de coarctations, absolument comme le cœur du scorpion vivant dans ces intervalles d'immobilité momentanée dont j'ai parlé plus haut. Ce fait, nullement isolé dans mes autopsies, je le signale comme spécimen en vue du contrôle ou de la critique que pourrait susciter mon écrit. Il a une portée physiologique qui mérite d'être mise en lumière. J'ai eu le soin de dire que ce scorpion avait succombé à une mort *naturelle;* qu'on daigne me prêter un moment d'attention! Dans l'extinction graduelle de la vie, les fonctions des organes cessent d'une manière insensible, sans qu'il se passe dans leur tissu aucune action brusque et violente; le cœur,

dont le sang se retire par degrés, demeure donc, faute de ce stimulant, avec ses parois uniformément relâchées. Lorsque, au contraire, on plonge l'animal plein de vie dans une liqueur délétère, il se trouve aussitôt en proie à une agitation extrême, à une lutte désespérée. Les tissus contractiles, soumis à des épreuves dont la violence dépasse toute mesure et toute appréciation, peuvent, dans ce supplice subit, conserver ou acquérir dans cette liqueur des coarctations, des raccourcissements fibrillaires permanents. La plupart des scorpions, tant européens qu'exotiques, de nos cabinets, de nos musées, ont indubitablement été précipités vivants dans l'alcool, où ils ont subi ce genre de mort violente. Les anatomistes qui m'ont précédé n'ont disséqué que de semblables sujets, et de là la différence de leurs résultats et des miens, de là des erreurs regrettables auxquelles ils ont été entraînés, pour ainsi dire à leur insu, et qui sont devenues une calamité pour la science.

Mais dans ces cas de mort subite, dans ces cruels supplices exigés par la science, il survient, après la cessation brusque de la vie, des effets d'un haut intérêt physiologique dans la question actuelle. Expliquons-nous. Cette contractilité de tissu après la la mort, signalée pour la première fois par Bichat dans sa féconde anatomie générale, s'exerce à des degrés différents sur les parois du cœur de nos scorpions. Ce sont ces résultats de contractilité cadavérique dont mon œil avide d'instruction a pu suivre pas à pas toutes les nuances de développement, toutes les curieuses morphoses.

Et d'abord, les parois du cœur, fendues longitudinalement pendant la vivisection, témoignent de leur élasticité organique, de leur contractilité texturale par la tendance des bords incisés à l'enroulement. Les fibres de ces parois, qui pendant la vie se contractent passagèrement pour produire les étranglements ondulaux et fugitifs dont j'ai parlé, ces fibres n'offrent aux lentilles les plus exigeantes aucune différence anatomique appréciable avec celles qui les avoisinent. C'est donc le principe vital seul, ce principe invisible, cet agent immatériel, qui, plus concentré,

plus énergique dans ces fibres contractiles, en détermine le raccourcissement instantané. Il faut sans doute s'incliner devant ce mystère physiologique, mais il faut aussi, dans un intérêt de science, en constater les effets, en utiliser l'enseignement.

En juin 1850, c'est-à-dire à l'époque où la vitalité du scorpion est le plus énergique, je pris une femelle vivante, presque adulte, mais encore vierge. Je pratiquai au tegument dorsal de l'abdomen une incision médiane, et tout aussitôt je plongeai l'animal dans l'eau pour l'asphyxier par submersion. Cette asphyxie s'accompagna de tous les signes d'une mort violente; je procédai immédiatement à l'autopsie. Je constatai au cœur des coarctations irrégulières peu prononcées, mais qui, après deux jours de macération sur le même chantier, se dessinèrent plus fortement et se *régularisèrent*. C'étaient alors comme de légères enflures allongées permanentes. Plus tard, ces enflures, dans ce même cadavre, se convertissaient, sous l'œil patient de l'observateur, en renflements ovalaires plus prononcés, noueux, presque moniliformes. J'assistais donc, sinon à la nouvelle création de ce cœur, du moins à ces changements à vue de sa configuration, au spectacle si saisissant, si instructif de ses métamorphoses cadavériques. C'est en face de ce phénomène que je réalisais l'extase d'O. Muller, exprimée dans l'épigraphe de mon travail.

Dans les individus qui ont séjourné des mois ou des années dans les liqueurs conservatrices, ce cœur plus condensé, plus altéré, plus déformé, est une colonne divisée extérieurement en intersections bien tranchées, imitant comme des articulations vertébriformes. Vous voyez ces colonnes ainsi représentées par la plupart des auteurs, même les plus modernes. Ces intersections, dont je ferai connaître bientôt la cause mécanique, et qui expriment le maximum de la déformation cadavérique, sont généralement au nombre de sept, comme celui des contractions onduleuses de cet organe pendant la vie, comme celui des segments tégumentaires du dos, comme celui des paires de vaisseaux sanguins fournis par ce cœur, comme celui des paires de muscles perforants et

des muscles cardiaques. Ce rapprochement numérique est remarquable. Mais, soit par l'effet d'une bizarrerie dans les convulsions de la mort, soit par un je ne sais quoi qu'on est convenu de taxer d'*anomalie*, j'ai quelquefois compté huit de ces intersections, et même dix dans le *palmatus*, si voisin comme espèce de l'*occitanus*. Ce sont là à mes yeux des exceptions.

Il est encore une circonstance qui, dans les sujets récemment morts, rend les coarctations plus promptes et plus marquées : c'est lorsque les vaisseaux latéraux du cœur ont été coupés ou rompus. Quand ces vaisseaux subsistent dans l'état de mollesse des parties, peu de jours après la mort, ils peuvent faire l'office de cordes qui maîtrisent un peu la contractilité des fibres. Dans un sujet tué par éthérisation et depuis deux jours en voie de dissection, je constatai le fait suivant qui confirme pleinement ce que je viens de dire : les vaisseaux d'un côté ayant été conservés, maintenus en place, et ceux de l'autre côté rompus, le cœur avait, dans ce dernier côté, de légers étranglements qui n'existaient pas du tout dans l'autre côté.

De cette configuration articulée du cœur, les auteurs n'ont pas manqué d'inférer l'existence intérieure de locules tout aussitôt décorés de l'appellation de *chambres*, de *ventricules*, etc. Et voyez toutes les erreurs enfantées par ces mots! J'ai prouvé moi, *ex visu*, que ce cœur n'a, dans son état normal, qu'une seule cavité indivisée. Mais ce dont ne se sont point aperçus ces anatomistes empressés, c'est que les intersections transversales qui limitent ces semblants d'articulations ne se voient qu'à la région supérieure ou dorsale du cœur; elles ne se continuent point annulairement, elles n'existent point du tout à la face inférieure de l'organe qui est unie et continue; ce fait est péremptoire. Qu'on ne le perde point de vue! nous l'expliquerons bientôt.

Si, après avoir débarrassé de tous ses liens, de toutes ses connexions, ce cœur au maximum de ses coarctations, vous parvenez à l'enlever intégralement et à le renverser, un singulier spectacle de configuration vient à l'instant frapper vos regards. Cet organe

est relevé de chaque côté de grosses saillies pyramidales symétriques, dont les paires sont en harmonie de nombre et de contiguïté avec les intersections dorsales. Cette double rangée d'apophyses séparées par des échancrures intercepte dans la ligne médiane un espace creusé en gouttière. La loupe la mieux servie qui plonge dans le fond de cette gouttière n'y constate, je me plais à le répéter, aucun indice d'intersections transversales.

Mais ces saillies pyramidales présentent encore un certain intérêt anatomique lorsqu'on a été à même d'en suivre tous les développements. Farcies, comme le cœur, de la matière *concrétée*, dont je parlerai bientôt, et revêtues des mêmes tuniques, elles fournissent, à leur sommet, attache aux muscles cardiaques décrits plus haut, c'est là un fait positif. Ils s'y maintiennent rarement implantés, mais on les rencontre assez souvent aux saillies naissantes des très-jeunes scorpions.

La formation de ces saillies dentiformes s'explique rationnellement. N'est-il pas évident, en effet, pour l'anatomiste qui s'est bien pénétré des connexions du cœur, et surtout des points d'intersection des muscles cardiaques, n'est-il pas évident et palpable que, dans les convulsions de la mort, la contraction brusque et plus ou moins permanente de ces muscles, en tirant sur les enveloppes de la face inférieure du cœur, a déterminé ces cornets conoïdes que le sang, alors liquide, a remplis, et où plus tard il s'est figé, concrété? Tel serait, suivant moi, le mécanisme de leur improvisation cadavérique.

Je finirai ce qui concerne ces coarctations, ces intersections par le fait suivant. Dans les scorpions dès longtemps macérés dans l'alcool où ils ont été précipités vivants, il arrive souvent qu'en enlevant la carapace ou tégument supérieur, de manière à détacher de celui-ci tout le pannicule peaussier, ce dernier demeure déposé, appliqué sur les viscères. Alors on distingue à ce pannicule autant d'empreintes linéaires transversales, qu'il existe d'espaces intersegmentaires à la carapace. Si maintenant on soulève avec précaution ce pannicule, on se convainc que ces empreintes corres-

pondent justement aux intersections du cœur. Ceci prouve sans réplique que ces dernières, ainsi que les empreintes, sont l'effet d'une pression purement mécanique exercée par les espaces intersegmentaires du tégument dorsal. Ces espaces intersegmentaires, ces articulations linéaires sont garnis, comme on sait, d'une membrane fibreuse, qui, suivant l'occasion, peut éloigner ou rapprocher les segments entre eux. Cette pression n'étant pas assez puissante pour trancher dans tout son diamètre le cœur, on conçoit facilement pourquoi les intersections n'existent point à la face inférieure de cet organe, et pourquoi encore la masse sanguine concrétée, dépouillée de ses tuniques, ne présente que très-superficiellement les intersections de son enveloppe dorsale.

J'ai parlé à diverses reprises de cœur *concrété;* je vais m'expliquer sur ce point. Tous les anatomistes auront pu constater sur les scorpions conservés depuis longtemps dans l'alcool, que le cœur est rempli, distendu par une matière opaque, coagulée ou même concrétée, de consistance sébacée, de couleur blonde comme la pulpe hépatique. On pourrait croire, au premier aspect, qu'elle est identique à celle-ci. Mais l'inspection microscopique met hors de doute leur différence d'organisation intime. Les éléments de la matière incluse du cœur sont bien plus petits que les éléments hépatiques, et l'on n'y voit pas les fragments membraneux qui existent au parenchyme du foie. Cet infarctus rend évidemment impossible toute injection du cœur.

VAISSEAUX DU CŒUR.

Ces vaisseaux naissent de chaque côté de cet organe par paires symétriques en nombre égal à celui des segments dorsaux de l'abdomen, c'est-à-dire de sept. Leurs troncs restent simples assez longtemps pour se bifurquer ensuite et se diviser enfin en ramifications nutritives, qui se perdent dans les viscères et les tissus.

Mes plus puissantes lentilles ne m'ont jamais révélé à l'origine de ces vaisseaux, qui sont les artères *systémiques* de M. Newport

aucune trace des intersections ou articulations représentées par cet anatomiste.

Je me suis assuré que quatre de ces paires vasculaires se distribuent plus directement aux poumons : ce sont les 3^{e}, 4^{e}, 5^{e} et 6^{e}. La 1re, la 2^{e} et la 7^{e} paire, ne correspondant point à ces organes pulmonaires, ont une autre destination.

Les vaisseaux pulmonaires se portent vers le milieu du bord antérieur du poumon en suivant à peu près la distribution des nerfs de ce nom. L'analogie permet de croire que les divisions extrêmes de ces vaisseaux percent l'enveloppe plévrale du poumon et vont se ramifier aux feuillets du parenchyme.

Mon culte pour la vérité et mon amour de la science m'obligent à déclarer que mes dissections de plusieurs centaines de scorpions pris dans toutes les conditions de vie et de mort ne m'ont fait voir dans l'appareil circulatoire rien qui ressemble à la figure si étrangement compliquée de M. Newport.

ARTICLE II.

PORTION CÉPHALO-THORACIQUE.

La portion atténuée du vaisseau dorsal qui pénètre dans le céphalothorax a été appelée, à droit ou à tort, *aorte* par M. Newport. Quoique son diamètre diminue brusquement à sa naissance du cœur, je n'ai rien vu là qui pût y faire présumer l'existence d'une valvule. Ses parois, infiniment plus fines que celles du cœur, et dépourvues de la tunique musculaire, lui donneraient plutôt à mes yeux les conditions anatomiques d'une *veine* que celles d'une *artère*. Je ne me prononce ni pour l'une ni pour l'autre de ces dénominations. Dans son trajet du céphalothorax, où il repose sur l'œsophage, il ne m'a paru émettre aucun vaisseau appréciable.

Mais un fait insidieux m'a longtemps préoccupé et tourmenté : c'est sa terminaison antérieure. Dans mes explorations si difficultueuses de l'intérieur du céphalothorax, j'avais été frappé de voir

ce vaisseau se fixer par une implantation brusque au bord postérieur du cerveau. Ce mode de connexion était tel et la continuité des deux organes si bien dissimulée, même aux plus puissantes lentilles, que l'on eût cru à une dilatation arrondie de ce vaisseau. L'illusion et l'erreur étaient d'autant plus faciles, qu'en enlevant le cerveau, j'entraînais constamment ce vaisseau. Je suis demeuré près d'une année sous le coup d'une terminaison aussi désespérante pour le physiologiste. Dans mes dernières dissections j'ai vu se dissiper en partie mes incertitudes sur ce point; mais toute la vérité n'est pas en évidence.

En octobre 1850, un beau scorpion femelle adulte mourut dans ma ménagerie de sa mort naturelle, et je procédai aussitôt à son autopsie. Je reconnus que, malgré la continuité apparente dont j'ai parlé, continuité qu'il faut attribuer à l'extension de la membrane arachnoïde du cerveau sur le vaisseau, celui-ci se prolongeait encore sous l'encéphale. J'ignore si là il se termine, comme le disent Dugès et M. Newport, par des divisions; je le perdis et, plus tard, je ne l'ai plus retrouvé.

ARTICLE III.

PORTION CAUDALE.

La richesse vasculaire de la queue du scorpion vient encore témoigner de l'importance physiologique de cette partie du corps. Là où finit le cœur, c'est-à-dire vers la base de ce dernier segment de l'abdomen qui est privé de poumons, commence le long vaisseau filiforme qui, s'engageant dans l'axe de la queue, y émet de nombreux vaisseaux jusque dans le nœud terminal, ou l'ampoule à venin.

Non-seulement le diamètre de ce vaisseau, que M. Newport appelle *artère caudale*, est infininiment moindre que celui du cœur, mais la texture fibro-musculaire ne se retrouve pas plus dans le prolongement caudal que dans le céphalothoracique. C'est là un double fait négatif qu'il importe de ne pas perdre de vue pour

comprendre la valeur anatomique du cœur. Les parois du vaisseau caudal sont donc membraneuses, fines, peu susceptibles d'imprimer au sang une impulsion énergique. Les vaisseaux latéraux qu'il émet sont disposés par paires symétriques et se ramifient peu après leur origine. Treviranus n'en a représenté que quatre, tandis que j'en ai rencontré cinq sans compter les deux branches bien fournies qui naissent de la bifurcation postérieure du tronc et qui se distribuent dans l'ampoule à venin.

MODE DE CIRCULATION.

Si l'on jette un coup d'œil analytique sur les ouvrages qui traitent de la circulation dans les scorpions, on y trouve inévitablement ces graves erreurs, ces fictions nées de dissections opérées sur des cadavres plus ou moins altérés par leur séjour dans les liqueurs conservatrices. Pour abréger cette revue, consultons le Manuel de Von Siebold (1849), qui résume les travaux de ses prédécesseurs.

Ce savant anatomiste n'a sûrement pas exercé son scalpel dans l'appareil circulatoire de notre arachnide, mais il a une foi fervente dans les observations et les figures de M. Newport. Ainsi, le cœur du scorpion serait *articulé*, il aurait *huit loges* qui fourniraient latéralement des *artères*, lesquelles se *continueraient* avec un *système veineux* (continuation révoquée en doute par Von Siebold lui-même). Des *veines* se distribueraient aux poumons, et le sang *revient* au cœur par des *vaisseaux particuliers*, en pénétrant dans chaque loge par *deux ouvertures* latérales. Le cœur, maintenu en place par des *muscles triangulaires* (que j'ai vainement cherchés), se terminerait en avant par une *aorte* se ramifiant aux appendices locomoteurs ainsi qu'aux viscères, et en arrière par une *artère* émettant un grand nombre de branches latérales, etc., etc., etc.

Tout cela inspiré, justifié par les hallucinantes figures de M. Newport. Mais en conscience, peut-on les juger sévèrement quand il les qualifie de *théoriques ?* En présence de cette épithète, le contrôle est paralysé, la critique désarmée. On ne saurait plus

voir dans cette image qu'une broderie élégante, un abus de l'esprit, des doigts, un entrain de juvénile imagination. Dans une science de faits matériels, n'y a-t-il pas délit flagrant de livrer à la circulation du monde savant une monnaie évidemment fausse, quoique si bien frappée?

Dans un écrit plus récent encore, publié en 1850 (*Annal. des sc. nat.*), M. Blanchard donne aussi libéralement huit chambres au cœur du scorpion; il admet des *lacunes* dans lesquelles le sang est épanché, comme dans les autres articulés, et revient de ces lacunes aux poumons. Explique qui pourra une semblable théorie de circulation ou de révolution dans un animal pourvu de cœur, de vaisseaux et de poumons! Tout ce qu'on peut charitablement dire à la décharge de M. Blanchard et de ses prédécesseurs, c'est que dans cette affaire il y a des circonstances atténuantes prises d'autopsies faites sur des sujets à viscères déformés ou altérés.

Ah! que ce même M. Blanchard, dans ce même recueil de 1850, était bien mieux inspiré, était bien plus dans le vrai en dotant la science d'une description illustrée de l'appareil circulatoire de l'araignée! C'est qu'alors il a disséqué des araignées vivantes ou récemment mortes. Aussi leur cœur est tout d'une venue et sans étranglement, tandis que certainement les figures de Dugès qui représentent multiloculaire le cœur de la lycose et de la mygale ont été prises sur des individus conservés dans l'alcool.

Ces deux anatomies des araignées, faites dans des conditions si différentes, ainsi que la grande analogie d'organisation entre les aranéïdes pulmonaires et les scorpions sont une heureuse et complète confirmation de ce que je viens d'exposer sur l'appareil circulatoire de ces derniers.

Ce serait sortir de mon sujet que de soumettre à un sérieux contrôle la physiologie de M. Blanchard relative au mode de circulation dans l'araignée. Je m'étonne seulement qu'en présence des faits anatomiques si fidèlement rendus par son habile pinceau, il ait pu s'abandonner à des assertions aussi inconciliables avec ces mêmes faits et à des contradictions aussi choquantes.

Mais quelle est donc, me dira-t-on, votre manière d'envisager la circulation dans les scorpions, auxquels vous n'attribuez et vous n'avez constaté qu'un seul ordre de vaisseaux? Comment le sang que les vaisseaux pulmonaires charrient aux poumons, pour lui faire subir l'action de l'air, retourne-t-il au cœur et va-t-il se distribuer à tous les tissus du corps pour y remplir sa mission nutritive?... Les mêmes vaisseaux pulmonaires peuvent-ils donc amener le sang désoxygéné aux organes respiratoires pour le ramener ensuite oxygéné dans le torrent circulatoire, et ce mouvement alternatif s'opère-t-il d'une manière incessante dans les mêmes conduits?... Je ne prétends point éluder la question par le silence. Je l'avoue franchement, mon scalpel ne m'a point encore fourni les matériaux pour une solution définitive... Il me répugne de m'engager dans une théorie qui ne repose point sur des faits positifs. Dans le doute je m'abstiens, comme le conseille le philosophe.

CHAPITRE III.

APPAREIL MUSCULAIRE ET STRUCTURE SQUELETTIQUE DES CAVITÉS SPLANCHNIQUES.

Loin de moi l'idée de donner une myologie des scorpions; il faudrait un Lyonnet, et il n'y en a plus. Je me bornerai à exposer sommairement quelques muscles spéciaux du céphalothorax, de l'abdomen et de la queue, ainsi que la structure squelettique de la première de ces cavités.

ARTICLE PREMIER.

STRUCTURE SQUELETTIQUE ET MUSCLES DU CÉPHALOTHORAX.

Les muscles puissants qui garnissent l'intérieur du céphalothorax présentent cette particularité fort remarquable, qu'ils ne forment pas, comme ceux de l'abdomen, un vaste pannicule peaussier et qu'ils ne se fixent point seulement à la voûte cornée de cette partie du corps. Inépuisable dans son génie des créations, la nature

a inventé pour les scorpions, ainsi que pour d'autres arachnides, une sorte de squelette intérieur consistant, d'une part, en des reliefs dépendants du plancher corné du plastron, de l'autre, en une pièce indépendante du test, une *carcasse* cartilagineuse. Décrivons-les succinctement.

Le plancher inférieur du céphalothorax ou le *plastron*, par analogie avec celui de la tortue, est creusé d'anfractuosités, de rigoles profondes rayonnantes et symétriques, limitées par des cloisons cornées plus ou moins saillantes ou redressées. Ces rigoles, ces cloisons, sont en nombre égal à celui des pattes et des chélipalpes; il y en a par conséquent cinq paires. Elles sont d'autant plus longues, d'autant mieux prononcées qu'elles sont plus postérieures. Les rigoles sont remplies par des muscles locomoteurs et recèlent dans leur profondeur les grands troncs nerveux cruraux.

Les cloisons donnent attache aux muscles. Étudiées sur le cadavre desséché, préalablement vidé et bien préparé, elles ressemblent à des côtes qui convergent à un *sternum* central. Ces côtes offrent constamment un intervalle marginal plus grand entre la première et la seconde paire de pattes. Cette disposition, loin d'être insignifiante, fait naître l'idée, confirmée d'ailleurs par la direction des pattes, que, dans l'action de saisir une proie, les trois paires de pattes postérieures sont plus particulièrement destinées à assujettir le corps sur le plan de support, tandis que la paire antérieure, dans cet intervalle, favorise l'étendue de mouvement, devient auxiliaire des chélipalpes pour la capture de la victime. Outre ces cloisons, il y a à la partie antérieure du plastron, et de chaque côté, à peu près vis-à-vis les origines des chélipalpes, deux grandes lames cornées subarrondies, foliiformes, très-saillantes au-dessus du plan des anfractuosités. Elles servent aussi à l'insertion des muscles.

Précisément au-dessus du ganglion thoracique, siégeant sur la partie du plastron que j'ai appelée sternum, se trouve placée la *carcasse céphalothoracique*. Lyonnet (*Œuvr. posth.*) et Treviranus l'ont représentée dans l'araignée, le premier sous le nom de *sternum*,

le second sous celui de *cartilage*. Jean Muller l'appelle dans le scorpion la *vertèbre thoracique*, dénomination assez significative; je la décrirai dans l'*occitanus*. Cette carcasse a une configuration peu déterminable, toutefois elle est d'une circonscription subarrondie. De texture cartilagineuse, elle est hérissée dans tous les sens de saillies ou apophyses rayonnantes qui lui donnent de la ressemblance avec une *chausse-trappe*. Au premier aspect on la croirait irrégulière; mais mieux étudiée, on reconnaît que ces apophyses ont une disposition symétrique. Une pince tant soit peu habile peut la déraciner dans son entier et l'isoler. On voit alors que les apophyses demeurent garnies des faisceaux musculaires déchirés qui s'y insèrent : c'est dans cet état que je l'ai figurée. Le corps ou le noyau de cette carcasse est percé d'un grand trou, ou mieux d'une arcade annulaire, qui donne exclusivement passage au cordon nerveux rachidien et à la première paire des nerfs pulmonaires. Le canal digestif et le vaisseau dorsal sont engagés entre les apophyses du plan supérieur; ce qui rend leur isolement d'une extrême difficulté.

ARTICLE II.

MUSCLES ABDOMINAUX.

Ils sont ou tégumentaires, ou perforants ou cardiaques.

1° Les muscles *tégumentaires* ou *peaussiers* doublent, tant au dos qu'au ventre, la face interne du tégument abdominal. Ils forment dans leur ensemble un pannicule continu, un *caleçon musculaire* qui enveloppe tous les viscères excepté les poumons. Ses fibres varient de grosseur et de direction. Ils servent, soit aux mouvements plus ou moins obscurs des segments tégumentaires, soit à la dilatation ou au rétrécissement de la cavité abdominale, soit enfin à protéger les viscères contre la dureté du tégument corné.

A la ligne médiane, tant supérieure qu'inférieure de ce caleçon, il existe deux larges *rubans longitudinaux* rapprochés, dont les fibres grosses et contiguës sont parallèles. Entre les deux rubans du dos,

il y a une légère gouttière produite par un amincissement, une dépression du pannicule et correspondant au cœur. A la région opposée, c'est-à-dire à la paroi ventrale, le cordon rachidien est logé dans l'intervalle de ces rubans, mais non point à nu sur le tégument même. Par la direction longitudinale de leurs fibres, ces rubans ou muscles droits tendent, dans leur contraction, à raccourcir le corps et à en rapprocher les segments.

Les larges tapis musculaires qui se rattachent aux rubans longitudinaux ont des fibres moins prononcées, obliques ou courbes. J'en ai déjà indiqué les fonctions.

2° Les muscles *perforants*, que, dans mes publications de diverses dates, j'ai désignés ainsi, et qui jusqu'alors n'avaient point été mentionnés, traversent le foie, de la face dorsale à la face ventrale, et se fixent aux rubans médians dont j'ai parlé. Au nombre de sept paires, ils sont disposés symétriquement de chaque côté de la ligne médiane du corps. Ce sont des cordons fort simples, filiformes, droits comme des colonnes, engagés chacun dans une gaine pratiquée dans l'épaisseur du parenchyme hépatique. Ces gaines, qui percent de part en part le foie, sont tapissées par la même tunique qui revêt tout l'organe, et elles sont assez larges pour se prêter aux mouvements de contraction et d'extension de ces muscles. Quatre de ces paires de muscles perforants s'insèrent inférieurement tout près de la base des poumons correspondants. Tous répondent en haut aux sept segments dorsaux de l'abdomen. Par leur action contractile, ils tendent évidemment à rapprocher les deux parois tégumentaires de l'abdomen. Ils jouent peut-être un rôle actif d'expulsion lors de l'accouchement, et ils peuvent bien entrer en jeu dans les ébats amoureux. Ils servent aussi à prévenir les secousses des viscères splanchniques, surtout de la texture pulpeuse du foie, et à les maintenir en place. Quand sur un scorpion vivant, dont on a préalablement incisé le pourtour de la carapace, on soulève doucement celle-ci, on voit, on sent très-bien la contraction active des muscles perforants qui tendent à tirer en bas cette carapace.

Mais c'est surtout dans les individus à l'alcool qu'il est possible de mettre en parfaite évidence ces muscles perforants. Par la macération prolongée, les adhérences organiques du pannicule peaussier se détruisent de telle façon que la face interne du tégument corné demeure à nu et que le pannicule plus ou moins entier est couché sur les viscères. Alors en décollant ces muscles de leur implantation dorsale, sans endommager le foie, vous apercevrez, à la surface de celui-ci, les sept paires de bouches béantes où ils se sont retirés rétractés. En déchirant avec précaution la pulpe hépatique, que l'on a soin de déblayer, on arrive à constater ces muscles demeurés debout comme des baguettes et fixés aux rubans ventraux. J'ai exprimé par une figure cette curieuse disposition.

3° Les muscles *cardiaques,* fixés d'une part à la paroi inférieure de la tunique musculaire du cœur, et de l'autre aux rubans ventraux tout à côté des perforants. Plus grêles que ces derniers, ils les égalent en nombre et sont fusiformes. Je les ai suffisamment décrits au chapitre du cœur.

ARTICLE III.

MUSCLES CAUDAUX.

La queue du scorpion est incontestablement la partie de son corps douée de la plus grande somme d'activité et de mobilité.

Elle est, je le répète, la sauvegarde de l'existence de l'animal. Je n'entreprendrai point d'énumérer les puissants muscles qui président à cette vigilante mobilité. Les nœuds caudaux, et surtout le dernier segment de l'abdomen en sont en quelque sorte bourrés. Ho quelle admirable structure que celle de ce tube articulé! Par quelle habile prévoyance la Providence a-t-elle pu, au milieu de l'action si variée, si énergique de ces agents locomoteurs, protéger la délicatesse, la fragilité du vaisseau circulatoire de l'intestin et du cordon ganglionnaire qui y sont enfermés! Comment, dans un si étroit canal, quatre organes peuvent-ils fonc-

tionner simultanément sans le moindre trouble dans les lois qui régissent l'organisme ! Il n'est pas un tissu, pas une fibre, lorsqu'on cherche à en pénétrer les connexions et les attributions, devant lesquels il ne faille s'extasier et en définitive s'humilier.

APPENDICE.

Dans la dissection de l'*afer* j'ai cru reconnaître entre la cavité céphalothoracique et la cavité abdominale une sorte de *diaphragme* fibro-musculeux. J'en ai retrouvé des lambeaux dans quelques individus de l'*occitanus*. Malgré cela je ne me crois pas autorisé à regarder comme positive l'existence de cette cloison musculaire.

CHAPITRE IV.

APPAREIL RESPIRATOIRE.

Les scorpions, ainsi que les aranéides exclusivement pulmonaires, respirent l'air atmosphérique au moyen d'un appareil circonscrit, de véritables *poumons*. Ce mode de respiration les rapproche des animaux supérieurs et les éloigne des articulés à trachées ou à circulation aérienne. Les poumons de nos arachnides sont multiples et symétriques; ils ont leur siége dans la cavité de l'abdomen; ces animaux respirent par le ventre, et leurs orifices respiratoires sont des *stigmates*. Ces divers traits les distancent des hauts organismes à respiration aérienne qui, eux, ont le poumon dans le thorax et respirent par la bouche ou les narines.

L'existence de stigmates disposés par paires symétriques leur est commune avec les insectes.

Examinons séparément les poumons et les stigmates.

ARTICLE PREMIER.

POUMONS.

Il y a quatre paires de ces organes placés sur les quatre premiers

segments ventraux de l'abdomen. La demi-transparence du tégument les décèle extérieurement sous l'aspect d'autant de grandes taches blanchâtres vaguement ovalaires. Le dernier segment en est privé. Les noms de *poches* et de *sacs*, sous lesquels plusieurs anatomistes les désignent, donnent une fausse idée de leur texture, et c'est par un étrange abus des mots, que quelques-uns les appellent des *branchies*, expression exclusivement applicable à la respiration aquatique.

Quand on a débarrassé la cavité abdominale du foie, des autres viscères et du pannicule musculaire, les poumons offrent leur véritable configuration, qui est ovale triangulaire, ayant la base tournée à la ligne médiane, et la pointe au côté externe de l'abdomen. Situés au-dessous du pannicule tégumentaire qui les sépare des autres organes, ils sont étroitement enveloppés par une tunique propre, membraneuse, subhyaline, par une espèce de *plevre*. En les dépouillant de cette tunique, ce qui est facile avec une pince circonspecte, ils apparaissent d'un blanc pur, satiné, resplendissant; ils sont légèrement convexes en dessus, déclives sur leurs bords et planes en dessous. Il suffit d'une loupe ordinaire pour y constater des stries transversales fort superficielles dont quelques-unes sont inégalement espacées. Que la pointe d'une aiguille effleure leur surface et l'on se convaincra que ces fines stries sont formées par le bord des feuillets constitutifs de cet organe. Ces feuillets, d'un blanc nacré, sont, dans l'*occitanus*, au nombre de soixante à soixante et dix, et non à celui d'une vingtaine, ainsi qu'on l'a dit. J'en ai compté cent dans le poumon de l'*afer*, où ils m'ont paru plus longs et plus étroits. Ils ont une souplesse élastique qui permet de les feuilleter comme un livre. C'est Meckel qui, le premier, dans sa traduction des leçons d'anatomie comparée de Cuvier, en 1810, fit connaître la structure feuilletée du poumon des arachnides.

Le poumon ainsi mis à nu est libre, excepté à sa face inférieure, où il se fixe au pourtour du stigmate. Aussi, peut-on avec un stylet en soulever facilement le limbe. Mais on aurait une bien

fausse idée de sa véritable structure si on le croyait formé par une embrication ou une application mutuelle de lames simples. Voici ce qu'une étude scrupuleuse, fréquemment renouvelée, m'a permis de constater. Il faut à cet effet bien isoler les feuillets dans des sujets récemment morts, ce qui n'est pas toujours facile à cause de leur adhérence réciproque. Chacun d'eux a une forme comparable à celle d'une lame de couteau modérément courbée. Le dos de cette lame offre à la loupe une bordure plus large, plus compacte, d'un tissu en apparence plus expansible, d'un blanc plus mat avec des traces fort superficielles de plissures transversales. Le tranchant de la lame est comme coupé en croissant, d'une extrême minceur et d'un blanc lustré. Cette dernière couleur, ainsi que le blanc mat, est évidemment due à un pigment serré, étendu comme un vernis sur une trame fibro-aréolaire. Une macération prolongée, ou le grattoir, peuvent mettre à nu cette trame. Ce pigment paraît au microscope grisâtre et opaque.

Une puissante lentille m'a souvent permis de constater la texture organique de la trame dont je viens de parler. On y distingue, sur un fond parfaitement pellucide, des mailles ou aréoles allongées, parfois conniventes bout à bout, et d'autres nervures plus ou moins isolées, simples, c'est-à-dire non rameuses. Mais il est facile de prendre le change, car si l'on envisage le feuillet avec ses deux lames appliquées lorsqu'elles sont dépouillées de leur pigment, la réticulation paraît alors confuse par le croisement des aréoles d'une lame avec celles de l'autre. La figure que j'en donne exprime fidèlement cette texture.

Mais chaque feuillet offre à sa partie inférieure ou d'insertion un espace simplement membraneux et diaphane, dépourvu et de pigment et des nervures de la trame. Au point d'union de cette diaphanéité avec le pigment, la plus amplifiante de mes lentilles m'a souvent révélé de petits festons ou des espèces de dentelures formées par la matière du pigment.

Un fait de structure intime, bien important à établir, et dont j'ai implicitement parlé, c'est que les feuillets pulmonaires sont

formés chacun de deux lames plus ou moins contiguës que j'ai nettement distinguées et que j'ai rendues par un dessin exact. L'existence de ces deux lames ferait de chaque feuillet comme un cornet cultriforme ou falciforme destiné à contenir et à expulser alternativement l'air dans l'accomplissement de l'acte mécanique de la respiration.

Je me suis assuré, tant dans mes recherches actuelles que dans celles publiées et figurées en 1817, que ces cornets s'abouchent, par leur partie membraneuse ou diaphane dont j'ai parlé plus haut, à un *réservoir commun* pareillement membraneux. Ce réservoir ou ce vestibule, pour me servir de l'expression significative de M. Duvernoy, est fixé au pourtour du stigmate. Jean Muller a figuré ce vestibule sous le nom de *vésicule*, mais il en a mal saisi les connexions avec les feuillets.

ARTICLE II.

STIGMATES.

Je ne vois pas pourquoi on substituerait le nom peu euphonique de *pneumostome*, proposé par Latreille, à celui de stigmate, depuis si longtemps consacré pour désigner l'orifice extérieur de l'organe respiratoire des articulés.

Les stigmates du scorpion sont des ouvertures linéaires, pratiquées dans le tégument corné même, bordées d'un filet saillant en bourrelet, ce qui les rend bilabiées, mais à lèvres immobiles. Ils ont des directions différentes suivant les espèces de scorpions, et ce trait spécifique extérieur a été négligé jusqu'à ce jour. Dans l'*occitanus* ils sont transversaux ou presque perpendiculaires à l'axe fictif du corps, très-obliques dans l'*afer*, etc.; je ne mentionne que les deux termes extrêmes de cette direction.

L'air ne va pas directement, ou sans intermédiaire, du stigmate au vestibule du poumon; il existe dans l'entre-deux des lèvres de ce hiatus tégumentaire une membrane souple, un diaphragme que mes prédécesseurs n'ont point vu. Ce diaphragme présente

une fente linéaire médiane qui n'atteint pas les commissures du stigmate. Sa contractilité est si peu prononcée que ma plus forte loupe, braquée des demi-heures entières sur les stigmates de l'animal vivant renversé et fixé sur le dos, ne m'a jamais permis d'y saisir le moindre mouvement malgré le soin d'y projeter de temps en temps un rayon de soleil. Mes lentilles, ma patience ont échoué à me rendre sensible ce jeu, ce mécanisme respiratoire. Jean Muller serait parvenu à gonfler le poumon en y insufflant l'air; j'ai vainement essayé avec un fin chalumeau d'atteindre ce résultat. Comme Muller n'a disséqué que des scorpions à l'alcool, je me demande si, par une suffocation violente, l'air inspiré n'est pas demeuré engouffré dans les cornets pulmonaires ou le vestibule, de manière à pouvoir en imposer?

La respiration et la circulation sont dans une telle dépendance réciproque, que l'immortel Cuvier, à la vue du poumon des arachnides, ne balança point à pressentir l'existence d'un cœur dans ces animaux, tandis qu'il refusait cet organe circulatoire aux articulés à trachées. On ne sait trop ce qu'il faut le plus admirer, ou des conséquences physiologiques d'une semblable combinaison organique, ou de la sentence prophétique de ce grand interprète des conditions de la vie.

La physiologie de la respiration dans les scorpions ne diffère pas essentiellement de celle des animaux supérieurs, à poumons circonscrits et à ingestion aérienne. Il n'est pas jusqu'au bourrelet corné du stigmate qui n'ait sa mission fonctionnelle, car dans l'attitude habituelle du scorpion où son corps est plus ou moins comprimé sous des abris, il permet, par l'immobilité de son relief, l'abord du fluide subtil de la respiration. L'air atmosphérique introduit par la fente diaphragmatique du stigmate vient donc emplir le vestibule, pour de là s'insinuer dans les cornets pulmonaires, où s'accomplit, par une chimie tout organique, le but final de la fonction respiratoire, l'oxygénation du sang. C'est donc dans ces cornets que les ramifications vasculaires, imperceptibles et jusqu'à l'heure *inaperçues*, épanouies sur l'une et sur

l'autre de leurs lames, viennent recueillir le bénéfice de la décomposition de l'air. Celui-ci, privé de son élément vital, est tout aussitôt éconduit par les mêmes voies, ainsi que dans les organismes à grande circulation, et à l'instant remplacé par un nouvel air respirable. Cette explication, je ne le dissimule nullement, ne repose pas, quant aux ramifications vasculaires, sur l'observation directe des tissus.

Des anatomistes, qui ont autrement compris et la composition et la texture du poumon des scorpions, se sont livrés à des interprétations physiologiques qui nous semblent hasardées. Les uns (Von Siebold) supposent le sang *épanché* dans le parenchyme pulmonaire, dont il baigne les feuillets remplis d'air. Mais, dans cette hypothèse, n'en résulterait-il pas un obstacle matériel à l'abord de l'air, puisque le poumon serait inondé de sang, et n'y aurait-il pas asphyxie mortelle? Et par quelle voie ce sang épanché rentrerait-il donc dans le torrent circulatoire pour y remplir le but nutritif, et pourquoi ne gagnerait-il pas plutôt le vestibule pour s'échapper par les stigmates? Les autres (Treviranus) veulent que l'air circule autour des feuillets, tandis que le sang serait épanché entre les lames de ceux-ci. Ainsi, dans le premier de ces systèmes, c'est l'air qui emplirait les feuillets, et dans le second, le sang. Les mêmes objections peuvent être adressées à tous les deux.

M. Duvernoy pense qu'il faut « considérer chaque lame pulmonaire comme une double poche laissant un vide entre elles deux dans lequel le sang pourrait pénétrer. » La disposition anatomique admise par M. Duvernoy ne saurait se concilier avec le mode de connexion dont j'ai parlé plus haut et d'après lequel les feuillets ou cornets pulmonaires s'ouvrent dans le vestibule. Malgré le conditionnel des derniers mots de la phrase précitée, je me crois autorisé à penser que l'expression de *pénétrer* à l'occasion du sang est synonyme de celle d'*épanché*. Cette opinion est donc passible de la même réfutation que celle de Von Siebold et de Treviranus.

CHAPITRE V.

APPAREIL DIGESTIF.

Avant d'exposer l'anatomie descriptive des organes qui constituent cet appareil, disons quelque chose sur le genre de vie et le mode d'alimentation des scorpions. Il existe entre les actes extérieurs et la structure des viscères qui y président une corrélation, une harmonie, qui nous mettent sur la voie d'une physiologie rationnelle.

Ainsi que les autres arachnides, les scorpions sont insectivores et ne s'attaquent qu'à des proies vivantes, qu'ils broient pour se nourrir de leurs sucs. Ils sont donc essentiellement chasseurs; ce n'est que le soir ou pendant la nuit qu'ils pourvoient à leur subsistance. Durant le jour on les trouve constamment abrités, souvent même endormis sous les pierres. Dépourvus de glandes sérifiques et de filières, ils ne sauraient avoir cette intelligente industrie des araignées, qui tendent des réseaux, tissent des toiles, fabriquent des tentes pour surprendre et saisir leur proie. Le corps du scorpion, épais et lourd, cuirassé d'un tégument corné, sa longue queue, ses pattes comprimées assez courtes, peu favorables à l'élever au-dessus du sol, le rendent inapte à lutter de vitesse avec les insectes agiles. Mais les lois de la création ne sauraient faillir à la conservation de l'espèce. Il faut étudier ces lois, tant par les actes de la vie que par les instruments qui les exécutent, pour en comprendre les harmonies.

Je viens de dire que l'ambulation du scorpion était nocturne ou crépusculaire; j'ai pareillement dit, au chapitre des yeux, qu'il était myope; ajoutons qu'il est fort sobre. Toutes ces conditions sont des conséquences d'une organisation spéciale. Il marche donc lentement et à tâtons, pour surprendre une victime au repos ou dans le sommeil. Ce n'est que pour la fuite ou pour l'amour qu'il déploie une locomobilité un peu active.

C'est surtout dans une captivité, une réclusion où j'avais eu le

soin d'imiter les conditions de son existence libre, que j'ai eu de fréquentes occasions de constater ses manœuvres qui ne manquent pas quelquefois d'une certaine habileté. Après le coucher du soleil je le voyais quitter son abri, sa retraite diurne, gagner le large, explorer son enceinte, s'accrocher aux obstacles, se redresser parfois sur sa queue roidie dans un but d'évasion. Enfin, après une résignation forcée, il consentait à se jeter sur sa proie. Quand celle-ci, une mouche par exemple, était à sa portée, il débandait brusquement ses bras, la saisissait, l'étreignait dans ses tenailles et la portait entre les serres de ses mandibules, qui la broyaient successivement pour en exprimer le suc dans la bouche. Cette manœuvre me rappelait la prestesse avec laquelle le froid et impassible caméléon projette sa langue préhensive sur sa proie. Dans quelques circonstances, où la victime plus vigoureuse offrait de la résistance, le scorpion mettait en jeu son dard à venin. Un jour je servis à l'un de ceux de ma ménagerie une larve vivante de *pyrochroa coccinea*. Il la saisit à l'instant entre ses pinces brachiales; mais comme elle s'agitait beaucoup, il la réduisit en la piquant à plusieurs reprises avec son dard à venin.

Les scorpions sont sobres. J'ai souvent remarqué que, dans les chaleurs de la canicule, où leur appétit et la nutrition sont plus actifs, une seule mouche leur suffisait pour deux ou trois jours, et ils ne touchaient point aux nombreux individus de ce gibier que j'avais jetés dans leur prison. J'ai constaté aussi qu'aux approches de l'équinoxe d'automne ils refusent toute nourriture pour se préparer à l'hivernation. Aux premiers jours d'octobre, j'en trouvai qui s'étaient creusé, dans la terre de leur réceptacle vitré, une cavité arrondie dont ils avaient fort bien su combler l'entrée, et sous la voûte de laquelle je pouvais, à travers la paroi du verre, les apercevoir immobiles et tapis.

Au commencement d'avril 1851, un de mes *occitanus* en volière se conservait plein de vie après une captivité d'un an et un jeûne austère de six grands mois. Dans mon vieux mémoire, j'ai cité de semblables faits constatés en Espagne, et un siècle et demi aupa-

ravant, Redi en avait aussi parlé. M. Lefebvre, dans une communication à la société entomologique de France (1834), dit que Van der Weghe a conservé vivant sans nourriture un scorpion du Brésil pendant neuf mois.

Du reste, ces exemples d'une abstinence absolue très-prolongée ne sont pas rares, même dans les insectes auxquels on n'accorde en général qu'une longévité fort restreinte. Dans mon histoire anatomique des hémiptères, j'ai cité l'observation de trois *punaises des lits*, qui, complétement séquestrées sans nourriture pendant plus d'une année, avaient conservé et la vie et l'agilité.

L'appareil digestif du scorpion se compose des *glandes salivaires*, du *canal digestif*, du *foie* et des *vaisseaux* biliaires rudimentaires ou vestigiaires.

ARTICLE PREMIER.

GLANDES SALIVAIRES.

Jean Muller est, je crois, le premier anatomiste qui ait parlé des glandes salivaires du scorpion. Il a représenté comme telles, dans l'*afer*, deux corps en massue allongée auxquels il donne des conduits excréteurs multiples. Quinze ans plus tard, M. Newport a décrit et figuré dans ce même *afer* des glandes salivaires d'une forme et d'une structure apparente fort différentes de celles de Muller. M. Duvernoy, dans son important répertoire d'anatomie comparée, en citant les observations de Muller, est loin de les admettre comme un fait anatomique positif. Le manuel de Von Siebold adopte ces glandes sans contrôle d'après Muller et Newport. Il les fait aboutir *à l'œsophage*. Dans mon ancien mémoire de 1817, et dans un aperçu plus récent sur l'appareil digestif du scorpion, inséré dans les comptes rendus de l'Institut en 1849, je n'ai point parlé de ces glandes, parce qu'elles ne m'étaient jamais tombées sous le scalpel.

Aujourd'hui que des investigations plus scrupuleuses me les ont enfin démontrées dans l'*occitanus*, on va voir comme elles ont

été mal connues, et par combien d'oscillations physiologiques j'ai été tourmenté avant d'être fixé sur les légitimes attributions de ces organes.

C'est à la jonction du céphalothorax avec l'abdomen qu'il faut chercher ces glandes. Il y en a une de chaque côté, logée, ensevelie dans la profondeur de l'anfractuosité postérieure du plastron céphalothoracique, abritée là par la cloison cornée qui précède cette anfractuosité. Il faut user d'infinies précautions pour la déloger dans son intégrité de ce profond enchatonnement. Vue en place, elle paraît ovalaire ou ovoïde; isolée, elle a une forme ovale-triangulaire, en pointe obtuse en avant, largement, mais peu profondément échancrée en arrière. Loin d'être microscopique, elle a une ligne et demie de longueur. Sa position est oblique à l'axe du corps. Dans les sujets récemment morts, elle a une consistance molle, une légère teinte grisâtre. Une loupe bien éclairée y reconnaît, sans nulle illusion, des raies peu saillantes, flexueuses, des espèces de fines circonvolutions, pour la plupart transversales, évidemment intérieures. En déchirant, avec toute la circonspection possible, ces glandes je n'ai jamais pu dévider, isoler ces filets flexueux, quoique j'aie été assez heureux pour les voir, dans un petit nombre d'individus très-frais, subsister après l'enlèvement partiel de la membrane propre qui les recouvre. Si ces filets sont vasculaires ou tubuleux, comme je le pense, leurs parois sont d'une telle finesse, d'une telle incohérence, qu'ils deviennent diffluents au moindre effort qui tend à rompre leur contiguïté.

Ne forment-ils qu'un vaisseau unique pelotonné? Je le crois.

Cette glande est pourvue et d'une tunique propre membraneuse, hyaline, très-fine, et d'une tunique extérieure de nature fibreuse, tenace, bien propre à protéger sa délicatesse, son excessive fragilité.

Lorsque, dans sa position enchatonnée, on déblaye avec légèreté les tissus qui l'avoisinent pour découvrir ses connexions, on aperçoit, sans trop de difficultés, dans le cadavre récent, du côté de son bout antérieur, un fin conduit d'un blanc resplendissant qui

longe l'œsophage et semble prendre la direction de la bouche. Cette direction, cet aspect d'un conduit que je jugeais rempli de salive coagulée, ne me laissait tout d'abord aucun doute sur sa nature de *canal excréteur* de la glande. Mais, lorsqu'en arrachant celle-ci sans la mutiler pour la soumettre à une étude plus approfondie, je vins à constater que ce canal émettait plusieurs branches, en un mot qu'il était rameux, j'avoue que la nouveauté de ce fait anatomique, tout en confirmant ce qu'en avait dit Jean Muller, vint ébranler mes croyances et me plonger, pendant une longue série de difficultueuses investigations, dans toutes les horreurs du doute et des tribulations.

En renversant la glande j'ai constamment trouvé, dans les sujets frais, une tache centrale ocracée et, dans le plus grand nombre des cas, une boursouflure ovale-oblongue, saillante, à parois pellucides, comme une sorte de *réservoir* ou de bassinet.

En octobre 1850, dans la dissection d'un individu qui venait de mourir de sa mort naturelle, je ne rencontrai aucune trace de cette boursouflure, et pourtant j'avais isolé les deux glandes sans les léser. Je présume que cette absence tient à des conditions physiologiques ou pathologiques que je n'examinerai point pour le moment. Dans les cas ordinaires, le microscope m'a distinctement fait voir à ce *bassinet* de rares filets d'une extrême ténuité, ou simples ou divisés, que je considère comme des brides *ligamenteuses*.

Le canal *excréteur* salivaire part de la tache ocracée pour se diriger en avant. Il est d'abord simple, filiforme, logé dans une gouttière de la moitié antérieure de la glande; puis, dès qu'il a franchi le petit bout de celle-ci, il se dilate d'une manière irrégulière et émet, soit à droite, soit à gauche, quatre ou cinq branches nullement symétriques, les unes ouvertes à angle droit, les autres à angle aigu. Ces branches sont ou simples ou fourchues. Jamais je n'y ai constaté la couleur blanche qui caractérise la souche ou le tronc. Mes plus puissantes lentilles microscopiques, secondées de toutes les conditions de lumière projetée, ne m'y ont point révélé

une cavité; elles ne sont point *tubuleuses*, notez bien ce trait. Seraient-elles encore des *ligaments?* Malgré la singularité du fait, je penche pour l'affirmative. Nous sommes loin d'être initiés à tous les secrets de la nature pour sauvegarder la délicatesse de certains organes. Et qui sait si, dans des organismes rapprochés de celui du scorpion, on ne retrouvera pas de semblables brides ligamenteuses mieux caractérisées encore! Ce qu'il y a de certain, c'est qu'après l'émission de ces branches, le tronc s'atténue en avant en un filet capillaire qui finit par devenir insaisissable et dont on peut cependant suivre la trace par sa blancheur. Ce filet est infiniment plus ténu que les branches dont je viens de parler, et celles-ci, je le répète, ne sont jamais blanches.

Ainsi qu'on vient de le voir, il ne m'a pas été donné, malgré ma pratique de la microtomie, de poursuivre ce canal excréteur jusqu'à la cavité où il verse le produit de la sécrétion salivaire. Ma vieille expérience des conduits de la salive, étudiés, décrits et figurés dans plusieurs centaines d'insectes de tous les ordres, ne saurait me permettre de croire que ces canaux débouchent ailleurs que dans la bouche, ainsi que cela a lieu dans tous les animaux. Il y a donc méprise ou inadvertance dans l'assertion de Von Siebold, qui les fait s'ouvrir dans l'œsophage. Une semblable anomalie blesse tous les principes de physiologie.

A l'opposé de l'origine du conduit salivaire, et en arrière de la tache ocracée, se voit un cordon notablement plus gros et plus court que ce conduit, et toujours simple. Il n'est point blanc et sa substance est molle. Il est fixé à la glande par une large base, et son bout libre, évidemment déchiré lors de l'évulsion de l'organe, n'offre aucune trace de cavité intérieure. Après bien des fluctuations, j'ai reconnu en lui un pédicule charnu, musculeux, qui retient la glande dans l'anfractuosité où elle est logée.

ARTICLE II.

CANAL DIGESTIF.

Il se continue directement et sans inflexion, depuis la bouche

jusqu'au bout de la queue, où se trouve l'anus. Vu la grosseur de l'animal, il est fort grêle, presque filiforme, et il faut des conditions digestives particulières pour qu'il présente de légers renflements, qui le plus souvent s'effacent à la mort. Sa texture est délicate, tendre, uniformément submembraneuse et presque pellucide. Elle témoigne de la frugalité et de la nourriture liquide de cette arachnide. Soumises au microscope, les parois de ce canal offrent de fines stries longitudinales entrecoupées qui pourraient bien n'être que des plissures.

Dans ce long trajet, il traverse à l'abdomen le foie, dans la substance duquel il s'enracine par plusieurs canaux hépatiques. Mais qu'on n'imagine point que le tube digestif perce la pulpe à nu du foie. Il s'y trouve engagé dans un canal membraneux qui lui permet d'exécuter tous les mouvements péristaltiques provoqués par l'acte de la digestion.

L'*œsophage* est si court, si fin, si fragile, qu'il faut recourir à de nombreuses autopsies pour le constater et surtout pour saisir son passage sous le cerveau dans le collier œsophagien.

Il se dilate très-insensiblement en un *ventricule chylifique* qui prend, à son entrée dans l'abdomen, un diamètre un peu plus considérable. Avant de pénétrer dans la queue, l'œil pratique de l'appréciation des nuances organiques découvre un bourrelet annulaire des plus fins, une minime contracture, indice d'une valvule insaisissable qui sépare ce ventricule de l'intestin stercoral. Dans les insectes de tous les ordres, j'ai constamment trouvé à ce même point une valvule et, quoique la délicatesse de ce tissu dans le scorpion ne m'ait point permis de la constater *ex visu*, ce serait un non-sens physiologique de ne l'y point supposer. Cette séparation entre le ventricule chylifique et l'intestin stercoral a, du reste, été saisie par la plupart de ceux qui ont disséqué les scorpions. C'est immédiatement avant ce bourrelet qu'a lieu l'insertion des vaisseaux biliaires vestigiaires dont je parlerai bientôt.

L'*intestin* proprement dit est filiforme et enfile l'axe de la queue. J'ai plusieurs fois rencontré en arrière du bourrelet prénommé,

c'est-à-dire à l'origine de l'intestin, un ballon considérable rempli d'air. Ce ballon, tout accidentel qu'il est, m'a fourni la preuve rationnelle de l'existence de la valvule *ventriculo-intestinale*, l'analogue de l'*iléo-cœcale* des grands animaux. On a beau presser ce ballon à des degrés bien ménagés, pour chasser l'air en avant, jamais celui-ci ne franchit la valvule, tandis qu'on parvient à lui faire gagner l'intestin en arrière.

Il n'existe pas de *rectum* prononcé. L'*anus* est inférieur et s'ouvre entre le pénultième article de la queue et le dernier, qui est l'ampoule à venin.

L'intestin est le réceptacle d'une pulpe fécale d'un blanc amidonné, tantôt moulée en crottins détachés, tantôt formant une masse allongée assez compacte, assez cohérente pour s'enlever toute d'une pièce. La loupe y distingue des empreintes inégales, des espèces de plissures festonnées qui font présumer l'existence, pendant la vie, de locules dans l'intérieur de l'intestin. J'ai figuré ce fait. Je n'ai jamais rencontré des vers intestinaux dans les scorpions.

Il n'est pas sans exemple qu'une certaine quantité de ces excréments blancs se glisse dans le ventricule chylifique lui-même. Le nom seul de ce dernier repousse l'idée d'une formation normale d'excrément dans son intérieur. C'est donc là une exception, un accident dont on peut se rendre raison. Les violences qui précèdent ou accompagnent la mort du scorpion peuvent déterminer des contractions brusques de l'intestin, des mouvements anti-péristaltiques qui font refluer les excréments en forçant la valvule ventrico-intestinale. Il se passe alors un phénomène analogue à celui qui dans l'homme se produit ou par un volvulus ou par l'oblitération partielle du gros intestin.

ARTICLE III.

FOIE.

Dans l'universalité des arachnides, l'appareil sécréteur de la bile

consiste en un organe *parenchymateux* de consistance pulpeuse, en une *glande conglomérée* énorme, un véritable *foie* occupant la totalité de la cavité splanchnique, dont il forme le moule. L'existence d'un semblable foie est un fait anatomique qui lie, comme je l'ai déjà dit, les scorpions aux crustacés en les éloignant des insectes chez lesquels s'observent seulement des vaisseaux biliaires simples, et ne perdons pas de vue dans ces rapprochements les quatre vaisseaux vestigiaires, sur lesquels je m'expliquerai tout à l'heure.

Dans les arachnides à abdomen insegmentaire uni au céphalothorax par un pédicule fort étroit, c'est-à-dire dans les aranéides proprement dits, le foie occupe exclusivement l'abdomen, dont il détermine la configuration et dont il conserve exactement le modèle lorsqu'il a été dépouillé de son enveloppe tégumentaire. C'est ainsi que le foie a son contour festonné dans l'*Epeira sericea*, qu'il est tuberculeux et échancré en arrière dans l'*E. opuntiæ*, pointu postérieurement dans l'*E. conica*, parfaitement ovalaire dans l'*E. fasciata*, etc., etc.

Dans les arachnides à tégument distinctement segmentaire et sans étranglement entre l'abdomen et le céphalothorox, le foie s'engage jusque dans les anfractuosités de ce dernier, et il n'est pas rare qu'il retienne le relief, la sculpture de ses diverses segmentations. Ces empreintes sont surtout bien prononcées dans les scorpions conservés dans l'alcool.

Quoique le foie des scorpions ait exercé l'habile scalpel d'anatomistes recommandables, je n'hésite point à avancer qu'il a été inexactement décrit et figuré. Je ne m'excepte pas moi-même de cette critique. Cela tient sans doute, à ce que, pour se faire une juste idée d'une organisation aussi délicate, il faut avoir eu l'occasion peu commune de combiner les dissections multipliées des scorpions vivants ou récemment morts, avec celles de ces mêmes animaux ayant séjourné plus ou moins longtemps dans les liqueurs conservatrices de diverse nature. C'est par le concours de semblables études, qui se contrôlent mutuellement, que l'on peut arriver à une exacte appréciation de la contexture de cet organe.

Le foie du scorpion, et je prends pour type l'*occitanus*, est formé d'une pulpe molle, de couleur blonde ou cannelle plus ou moins foncée, plus brune dans les individus ouverts vivants à l'air libre. Sa masse principale a la conformation de l'abdomen, mais il offre en arrière deux appendices libres, atténués, engagés dans l'origine de la queue, et en avant un nombre difficilement déterminable, quoique assez symétrique, de lobules digitiformes enchatonnés dans les anfractuosités du céphalothorax, et se prolongeant même jusqu'entre les optiques oculaires. Ces lobules, dans l'*afer*, sont plus courts et forment une patte d'oie.

Il n'est point exact de dire que ce foie est profondément divisé par une scissure médiane en deux grands lobes égaux, comme je l'avais moi-même cru autrefois, et il est contraire à l'observation qu'il soit formé de deux moitiés complétement séparées, ainsi que les représente Treviranus. Voici ce que j'ai positivement constaté dans mes récentes et réitérées autopsies.

Quand on a soigneusement enlevé la paroi tégumentaire dorsale avec son pannicule musculaire et le cœur sans léser le foie, on voit que la surface supérieure de celui-ci est unie et continue, au moins dans les sujets frais. Seulement, en y regardant de près, on se convainc qu'il existe une dépression médiane longitudinale, une légère gouttière où repose le cœur. Mais cette gouttière a aussi une surface unie et continue, de manière qu'il faut en déchirer, et non pas seulement en écarter la substance pour mettre à découvert le canal digestif. De chaque côté de la gouttière dorsale, on aperçoit une série de sept trous qui servent au passage des muscles perforants dont j'ai parlé ailleurs.

Il en est autrement de la face inférieure ou ventrale du foie. Elle a été peu et mal étudiée par les auteurs. Loin d'être unie et continue comme la dorsale, elle est divisée en un nombre assez considérable de lobules pyramidaux, libres, ou simplement contigus entre eux, et de grandeur différente. Ces lobules, lorsqu'on soulève tout l'organe, ont leur gros bout libre et pendant, tandis qu'ils s'atténuent par le bout opposé pour se continuer à la pulpe

hépatique. Ils m'ont paru plus développés en été, époque où la nutrition est plus active. Nous verrons plus tard, au chapitre de l'appareil génital, que cette division multilobulaire n'est pas une vaine configuration, et que la nature, toujours prévoyante dans ses œuvres, lui a assigné un but physiologique.

Examinons maintenant la structure de ce foie. Il est revêtu d'une tunique fine, subdiaphane, fibro-membraneuse, qui en suit toutes les divisions, tous les lobules et jusqu'aux canaux qui donnent passage aux muscles perforants. Il m'est souvent arrivé d'en détacher avec la pince des lambeaux assez grands.

Si nous descendons dans la composition intime ou élémentaire de la pulpe hépatique, nous trouvons qu'elle consiste, comme celle des grands animaux, en utricules ovoïdes remplis d'atomes biliaires, de la couleur blonde de l'organe. Ces utricules se dessinent à la surface du foie disséqué peu de temps après la mort, sous cet aspect réticulé ou pointillé que j'ai comparé à celui de certains madréporites polis. Par la déchirure circonspecte du parenchyme et par sa macération dans l'eau, on peut constater que les utricules élémentaires se réunissent en groupes, en faisceaux, et aboutissent par d'imperceptibles conduits successifs aux *canaux hépatiques* ou excréteurs qui versent la bile dans le tube digestif. Ce mode de structure, d'une ressemblance si frappante avec celle du foie des animaux les plus élevés dans l'échelle, rend aujourd'hui superflue la réfutation de Ramdohr, Treviranus et autres, qui ont donné si intempestivement le nom de *corps graisseux* au foie des arachnides.

Il me reste à parler des *canaux hépatiques* ou cholédoques. Dans l'*occitanus* il n'y en a que quatre paires dans l'abdomen. Mais je dois dire que, dans la dissection plus heureuse de quelques individus, j'en ai trouvé une paire dans le céphalothorax et même une fois deux, ce qui porterait le nombre total à cinq ou six paires. Je suis contrarié de cette incertitude; je ne dois pourtant pas la passer sous silence. Ces paires de canaux sont opposées. Deux des paires abdominales rapprochées entre elles occupent le milieu du ven-

tricule chylifique. Un grand intervalle les sépare des deux autres paires antérieures, pareillement rapprochées entre elles. Il résulte de cette disposition, que la moitié postérieure du ventricule chylifique en est constamment dépourvue.

Remarquons, au point de vue de ce mode d'insertion des canaux hépatiques, que les scorpions tiennent le milieu entre les grands animaux où la bile est versée à l'origine du tube alimentaire qui suit l'estomac et les insectes où le tribut de ce liquide digestif s'acquitte au bout postérieur du ventricule chylifique (*intestin grêle* des animaux supérieurs).

Ces canaux, en dehors du foie, sont fort courts, et chacun d'eux n'est, à vrai dire, que la souche d'un arbuscule dont les branches et les rameaux ont leurs racines dans le parenchyme et y reçoivent les produits immédiats de la sécrétion biliaire par les utricules élémentaires.

Je terminerai ce qui concerne le foie des scorpions par un aperçu de monographie hépatique étudiée dans quelques types à l'alcool. Quand un scalpel pratique et scrupuleux s'attache à poursuivre dans l'anatomie viscérale les caractères distinctifs des diverses espèces d'un même genre, il parvient souvent à trouver dans ces viscères la confirmation de la légitimité de ces espèces.

Dans l'*afer*, l'*europæus*, le *palmatus*, le *leioderma*, la face dorsale du foie, au lieu d'être unie et continue comme dans les *occitanus*, *australis*, *nigro-lineatus* et *biaculeatus*, est fendillée en aréoles irrégulières, finement, mais nettement circonscrites. Ces aréoles ne sont point accidentelles ni le résultat d'un séjour plus ou moins prolongé dans les liqueurs conservatrices; elles sont organiques et délimitent des lobules qu'une pince exercée peut détacher et enlever, et qui sont revêtues de la tunique hépatique. Il est facile de se convaincre, par une dissection circonspecte, que ces lobules assez courts forment une couche, un stratus peu profond. Cette disposition aréolaire n'existe point comme je viens de le faire pressentir dans les *occitanus*, *australis*, *nigro-lineatus* et *biaculeatus* retirés aussi de l'alcool pour cette étude comparative. Or les trois pre-

mières de ces espèces se ressemblent beaucoup par leurs traits extérieurs.

Les lobules hépatiques de la face inférieure ou ventrale sont pyramidaux dans l'*afer*, ainsi que dans les trois que je viens de mentionner; pyramidaux aussi, mais proportionnellement plus courts, plus gros et parfois turbinés dans les *europæus*, *longicauda*, *leioderma*, *biaculeatus*. Nous allons voir dans le *palmatus* une configuration bien remarquable et spécifique des lobules de cette région. Ils sont grêles, filiformes et fusiformes, diversement reployés et unis les uns aux autres, de manière à représenter une branche rameuse dont la souche tient à la pulpe du foie. La figure d'une de ces branches en donne une suffisante idée.

Quant aux utricules élémentaires ou constitutives de la pulpe hépatique, elles sont identiques dans toutes les espèces soumises à mon scalpel.

ARTICLE IV.

VAISSEAUX BILIAIRES VESTIGIAIRES.

Plusieurs auteurs, comme Treviranus, Muller et la plupart des compilateurs, ayant appelé le foie un corps graisseux, ont été amenés, par la conséquence obligée de cette énorme erreur, à considérer les filets insérés à la terminaison du ventricule chylifique, et que je prends pour vestigiaires, comme des organes *essentiels* destinés à la sécrétion et à l'excrétion de la bile. Préoccupés de cette insertion, ils se croyaient d'autant plus fondés dans cette opinion, que ces filets ont toutes les apparences des vaisseaux biliaires des insectes. Ils n'avaient point compris l'importance du poste transitionnel du scorpion dans la série zoologique. Dugès, entraîné dans des idées préconçues que je ne m'explique, dans un esprit aussi supérieur, que par le défaut d'autopsies assez multipliées dans les animaux articulés des divers ordres, et par sa foi trop aveugle dans quelques ouvrages modernes; Dugès donne le nom de *cœcums urinaires* à ces vaisseaux, et afin qu'il ne restât aucun doute sur leur espèce, il leur applique la synonymie de *vasa varicosa* de

Malpighi et autres anatomistes anciens. Décrivons-les d'abord en peu de lignes.

Au nombre de quatre, et accolés, adhérents aux parois du ventricule chylifique, ce qui, avec leur ténuité capillaire, les rend fort difficiles à isoler, ils se dirigent d'arrière en avant pour se perdre par leurs bouts flottants, soit dans les anfractuosités du céphalothorax, soit à la base de l'abdomen. Constamment blanchâtres ou subdiaphanes, ils n'offrent pas la moindre boursouflure, la moindre varicosité, et s'ils ont une cavité, ce dont je doute fort, elle n'admet point de liquide coloré. Deux d'entre eux, et ceci est un caractère qui ne se rencontre point dans les vaisseaux biliaires des insectes, sont décidément *rameux* dans leur tiers antérieur. J'ai constaté ce même fait sur plusieurs scorpions exotiques et notamment sur l'*afer*. Treviranus, Muller et autres ont représenté ces mêmes ramifications.

Leur insertion se fait par paires rapprochées à la seule paroi supérieure de la terminaison du ventricule chylifique. Mais cette insertion a lieu sans traverser, je crois, toute l'épaisseur de la paroi ventriculaire, par conséquent sans s'ouvrir dans la cavité digestive.

Dans mes récentes dissections, j'ai bien mieux étudié ces filets capillaires que je ne l'avais fait autrefois, et cependant je pense aujourd'hui, comme il y a plus de trente ans, qu'ils ne sont que des vaisseaux *vestigiaires*, des filets *infonctionnels*, des représentants *inactifs* des vaisseaux biliaires des insectes. Leur ténuité, leur subdiaphanéité, l'absence des varicosités, et par-dessus tout l'existence désormais incontestable d'un foie parfaitement conditionné, justifient ma façon de voir sur ce point.

Ainsi ces filets, quoique sans valeur fonctionnelle, sont à mes yeux un trait des plus significatifs des créations échelonnées, les indices précurseurs de l'existence des vaisseaux biliaires dans les organismes inférieurs privés d'un foie parenchymateux.

J'ai, une seule fois à la vérité, constaté une disposition tout à fait anormale de ces filets, c'est une anastomose de l'un d'eux,

avec un canal hépatique. N'était-ce là qu'une soudure accidentelle ou pathologique, ou une sorte de greffe par approche? Quoi qu'il en soit, ces variations, ces incertitudes vasculaires révèlent incontestablement un essai de création, un précédent rudimentaire des futurs vaisseaux biliaires des insectes.

Mon savant ami le professeur Duvernoy, qui a disséqué le *palmatus*, flotte dans les hésitations quand il s'agit de donner un nom technique aux quatre filets en question et à l'énorme glande hépatique. Au début, il appelle les premiers des *vaisseaux hépatiques*, et quelques pages après il leur dénie des fonctions biliaires. Quant au foie, il partage d'abord l'opinion de Treviranus en le nommant *corps graisseux*, et plus loin il ne balance pas à le regarder comme un foie.

CHAPITRE VI.

APPAREIL GÉNITAL.

La position, la forme, la structure, les connexions et surtout la technologie anatomique des organes reproducteurs des scorpions n'ont point été rigoureusement établies dans la plupart des ouvrages qui traitent de ces organes. Ainsi, Meckel, Treviranus, Muller, etc., n'ayant affaire, dans leurs difficultueuses dissections, qu'à des sujets à l'esprit de vin, et le plus souvent à la plus petite des espèces, l'*europæus*, se sont pour ainsi dire égarés dans leurs recherches, et surtout dans l'appréciation des diverses pièces de l'appareil, ou bien ils n'en ont figuré que d'insignifiants lambeaux, ou bien, quand une partie a été convenablement saisie, ils nous l'ont donnée isolée ou défectueusement ralliée à l'ensemble. Du reste, même dans les travaux les plus récents, le défaut de vivisections ou d'autopsies sur des sujets frais rendait presque impossible la mise en évidence de la plupart de ces pièces. Il faut en excepter des observations pratiques de M. Duvernoy publiées, soit dans le VIII^e^ volume de ses *Leçons d'anatomie comparée*, soit dans les comptes rendus de l'Institut en octobre

1850. Je réserve le contrôle de ces précieux documents pour les détails descriptifs dans lesquels je vais entrer.

L'appareil génital des deux sexes est double dans nos arachnides; c'est-à-dire que le mâle a deux canaux éjaculateurs et deux verges, la femelle deux oviductes ou vagins et deux vulves. On n'avait point établi convenablement la concordance de cette organisation exceptionnelle avec celle des autres articulés; on n'en a point nettement figuré l'ensemble et les détails.

On est surpris sans doute que, dans l'énumération de ces parties doubles, je n'aie point compris les organes essentiels, les testicules et les ovaires. Je vais m'en expliquer, et je m'étonne que jusqu'à ce jour l'observation dont je vais parler ait échappé à mes prédécesseurs. On sait que dans les grands animaux, ainsi que dans les articulés en général, les testicules et les ovaires sont des organes *binaires* ou *pairs*. A mes yeux il n'en est point de même pour les scorpions, et je soutiens que, pour chaque appareil génital, il n'existe qu'un testicule, qu'un ovaire, ou bien qu'il n'y a que deux testicules et deux ovaires, et *non quatre*, pour l'ensemble de cet appareil, où cependant les conduits excréteurs sont évidemment doubles. Cette originalité n'a été ni formulée ni saisie.

Je vais examiner dans autant d'articles : 1° l'appareil génital mâle; 2° l'appareil génital femelle; 3° l'accouplement, la gestation, la parturition et les peignes.

ARTICLE PREMIER.

APPAREIL GÉNITAL MÂLE.

Sous le rapport de sa composition, cet appareil offre, comme dans tous les articulés, des *testicules*, des *conduits déférents*, des *vésicules séminales*, des *canaux éjaculateurs*, et des *verges* avec leur *armure*.

1° *Testicules*. — L'organe sécréteur du sperme est, je le répète, *impair* ou unique pour chaque appareil. Il consiste en

trois grandes mailles quadrilatères confluentes ou anastomosées entre elles, plus ou moins étalées ou flexueuses et *libres*. Ces mailles sont formées par un *vaisseau spermifique* tubuleux, uniformément grêle, à parois subdiaphanes. C'est là une forme de testicule jusqu'à ce jour exclusivement propre aux scorpions. Admirons à chaque pas ces inépuisables ressources du génie providentiel, qui, en déroulant à nos yeux des configurations organiques si insolites, si insidieuses, a su atteindre le but physiologique avec des moyens dont il s'agit de savoir interpréter l'esprit.

Ces vaisseaux spermifiques pénétrés, animés d'imperceptibles nerfs et sans doute de rameaux vasculaires plus imperceptibles encore, sont *sécréteurs* par leurs parois et *conduits* par leur cavité. Précisément à cause de leurs mailles, qui multiplient et les surfaces et les directions, le sperme s'élabore par son séjour, ses fluctuations. Observons que cette glande spermifique du scorpion se trouve, sous ces derniers rapports, à la forme près, dans la condition générale des testicules des autres animaux, tant supérieurs qu'inférieurs, de la série zoologique. C'est le même principe, la même loi qui a présidé à cette organisation.

En disant que les testicules du scorpion sont enveloppés par la substance du foie, les auteurs ont donné une fausse idée de leur réelle situation. Cette assertion prouve et que l'on a mal étudié l'organe hépatique, et qu'on n'a point saisi ses rapports avec l'appareil génital. Les testicules, ainsi que les ovaires, sont placés sous le foie, mais ils ne pénètrent nullement dans sa pulpe constitutive. Rendons encore ici hommage aux prévoyantes sollicitudes de la nature, constatons que, même dans ces modifications de formes que les esprits peu réfléchis taxent de caprice, elle poursuit toujours un but fonctionnel. Ainsi, les fins canaux des mailles testiculaires et des mailles ovariennes s'engagent, s'enlacent, se fixent entre les lobules pyramidaux et simplement contigus de la face inférieure du foie qui semblent avoir été créés pour protéger leur délicatesse et favoriser leur fonction.

Quand j'ai avancé que les testicules étaient *libres*, j'ai voulu

insinuer que généralement celui d'un côté était indépendant, anatomiquement, de celui de l'autre. Il y a sans doute peu de règles sans exception, mais il faut éviter de prendre l'exception pour la règle. Dans mes fréquentes autopsies des scorpions, il m'est arrivé deux fois seulement de constater dans l'*occitanus* l'existence d'une communication directe des mailles d'un testicule avec les mailles de l'autre par l'intermédiaire d'un seul conduit traversier fort court placé à la dernière maille. M. Duvernoy a observé un fait semblable dans le *scorpion d'Italie,* qui m'est inconnu, mais à la première maille et non à la dernière.

Ce savant professeur, dont le scalpel ne s'est pourtant exercé que sur des scorpions à l'alcool, a représenté[1] les trois mailles testiculaires de l'*occitanus* communiquant *toutes* du côté droit au côté gauche par un conduit tubuleux médian, commun aux six mailles, absolument comme on le voit dans les ovaires. Jamais pareil fait ne s'est offert à mes investigations, quoique j'aie disséqué plus de cent individus frais de ce même *occitanus* et un nombre considérable de sujets à l'esprit de vin, soit de ce type, soit d'espèces exotiques. Je n'hésite point à déclarer que cette grande anastomose est à mes yeux un fait insolite et exceptionnel. Elle ne saurait donc être donnée comme le type, l'état normal de cet organe.

2° *Conduits déférents.* — Ils prennent leur origine à l'angle externe de la première maille du testicule correspondant, et ne sont dans le fait que la continuation du vaisseau spermifique dont ils conservent la ténuité. Après un trajet plus ou moins flexueux, ils aboutissent aux vésicules séminales.

3° *Vésicules séminales.* — On se convaincra par mes figures combien elles ont été incomplétement vues par tous les anatomistes qui m'ont précédé. Il faut convenir qu'il est fort difficile, pour ne pas dire impossible, de les bien saisir dans les sujets à l'alcool. Dans l'*occitanus*, on en compte trois pour chaque appa-

[1] M. Duvernoy a eu la généreuse obligeance de me communiquer une épreuve de la planche consacrée à l'appareil génital des scorpions.

reil. Leur position insolite, leur petitesse, leur tendreté, et surtout leurs connexions mutuelles, les rendent d'un isolement qui met la patience à de grandes épreuves. Placées au côté externe du canal éjaculateur, elles se dirigent d'avant en arrière.

La première, que je regarde comme l'*essentielle*, parce qu'elle reçoit directement le conduit déférent, est allongée, subdiaphane, cylindroïde ou même un peu en massue, libre de toute adhérence. Elle s'insère, conjointement avec le conduit déférent, à une dilatation ou sinus commun qui s'atténue en avant pour s'aboucher à la troisième vésicule.

La seconde a la forme de la première, mais elle est plus longue et adhère dans presque toute son étendue à la face inférieure et latérale du canal éjaculateur, qu'elle déborde au côté externe. Il n'est pas rare que la loupe découvre, à sa moitié intérieure, de légères plissures qui rendent son bord comme festonné. Ces festons se constatent surtout lorsque cette vésicule renferme un sperme coagulé blanc, ainsi que je l'ai plusieurs fois observé. Elle débouche dans la précédente un peu avant l'insertion de celle-ci avec la troisième vésicule.

Cette dernière est ovoïde et la plus antérieure. J'ai dit déjà comment elle recevait les deux autres. Elle s'abouche au côté externe du canal éjaculateur. Une figure spéciale rend ces connexions évidentes.

4° *Canal éjaculateur, fourreau de la verge, pénis.* — Ce titre complexe ne décèle que trop et l'embarras de l'auteur et les difficultés du scalpel. C'est encore là un trait exceptionnel de cette originalité anatomique du scorpion.

Ce que j'appelle le *canal éjaculateur* est en même temps et l'aboutissant de la sécrétion prolifique et le réceptacle mystérieux de l'appareil copulateur. C'est une sorte de gaîne membraneuse, blanchâtre, longue, un peu fusiforme, couchée sur les flancs de la cavité abdominale, le long du bord du foie, et atteignant à peu près le milieu de cette cavité. Il est atténué, soit en avant pour s'ouvrir à l'opercule génital externe, soit en arrière, où il se

fléchit brusquement pour se prolonger en un appendice grêle, blanc, vermiforme, récurrent.

A travers ses parois subpellucides on aperçoit une baguette centrale cornée, brunâtre, accompagnée de parties charnues et se continuant depuis l'opercule génital, où il prend la ténuité d'une soie, jusqu'au boyau appendiculaire terminal, où sa couleur s'efface insensiblement. En approchant de la partie moyenne de la gaîne, elle se dilate et bientôt se façonne en une lame lancéolée aiguë, dont le tranchant regarde le bord externe et présente là un sinus arrondi. Je prends cette baguette pour le *fourreau* et l'*armure de la verge*. Sa couleur marron et sa texture cornée sont, pour ma vieille pratique de l'entomotomie, l'indice positif que cette pièce est destinée à faire irruption au dehors, à dégaîner lors de l'acte copulatif. Les exemples de semblables organes mécaniques se rencontrent fréquemment dans les insectes de tous les ordres.

Deux faits intéressants viennent prêter leur appui à cette manière de voir. En disséquant un scorpion récemment mort, un coup fortuit de scalpel ouvrit le canal éjaculateur en avant ou vers son origine. Je vis aussitôt s'élancer par l'incision la baguette cornée ou l'armure, qui entraîna à sa suite un filet blanchâtre dont la texture cartilagineuse se révéla par la promptitude de son enroulement. Sa ressemblance avec le *pénis* de beaucoup d'insectes fit que je ne balançai point à lui donner ce nom. Ce filet était logé, invaginé dans l'appendice vermiculaire récurrent que j'ai mentionné plus haut. Plus tard, en décembre 1850, je fus témoin d'un fait analogue sur un autre scorpion qui avait péri par le froid. J'eus le bonheur de voir le tube vermiculaire se rompre en travers et le filet élastique se dégager de cette gaîne avec tous les attributs du pénis précédent. Je reviendrai, en traitant de l'accouplement, sur ces organes et sur leurs évolutions.

Dans mes investigations les plus scrupuleuses, je n'ai rien trouvé qui ressemblât à ce *cæcum* à substance granuloso-vésiculeuse dont parle Von Siebold, ni à cette papille échancrée qu'il soupçonne être un *pénis*, ni à la *verge*, que M. Duvernoy dit rhomboïdale.

ARTICLE II.

APPAREIL GÉNITAL FEMELLE.

Aristote, et depuis lui Redi et Swammerdam, avait dit que les scorpions accouchaient de petits vivants. Ces animaux sont en effet ovigères et vivipares. Ils partagent cette faculté avec quelques insectes, notamment avec des diptères du groupe des *sarcophages* et des *dexies*, et j'ai fait connaître ce mode d'organisation dans mon *anatomie des diptères*.

1° Les *ovaires* sont formés sur le plan des testicules et, comme eux, impairs pour chaque côté. Ils consistent en un treillis de vastes mailles quadrilatères engagées et maintenues entre les lobules inférieurs du foie. Mais il n'y a pour chaque testicule que trois de ces mailles, tandis qu'il y en a quatre pour chaque ovaire. C'est là un caractère distinctif facile à saisir dans tous les âges et dans toutes les conditions génératives des scorpions. Il existe encore une énorme différence sexuelle dans ce viscère, indépendamment de la présence des gaînes ovuligères, c'est que les mailles ovariennes d'un côté sont unies aux mailles de l'autre côté par un tube médian constant et continu, de la longueur de tout l'organe, au lieu que, dans les testicules, les mailles sont libres à droite comme à gauche, ou si elles communiquent, ce n'est qu'exceptionnellement, ainsi que je l'ai déjà dit. Cette disposition et ce nombre de mailles ovariennes sont les mêmes dans les scorpions tant européens qu'exotiques, au moins dans ceux soumis à mon scalpel.

Il est fort singulier que Treviranus reproche, bien à tort, à Meckel de n'avoir pas distingué les organes mâles de ceux de la femelle, lorsque lui-même tombe plus positivement dans cette erreur en ne donnant que trois paires de mailles dépourvues de gaînes ovuligères à ce qu'il regarde comme un ovaire.

2° Les *gaînes ovigères*, terme technique que j'ai dès longtemps généralisé dans l'anatomie des insectes, sont uniloculaires, monospermes et constamment *unilatérales*. Globuleuses dans le plus

grand nombre des espèces, on les trouve oblongues et même allongées dans l'*afer*.

Dans un état avancé de gestation elles sont fixées aux tubes ovariens par un col étroit d'une excessive brièveté. Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans les femelles jeunes ou infécondées, les gaînes ovigères, alors rudimentaires, sont sessiles. Leur disposition le long des canaux ovariens est constante, et les auteurs sont loin de les avoir envisagées ainsi. Pour le long conduit qui enceint l'ensemble des huit mailles, c'est au côté *extérieur* seul qu'a lieu l'insertion; au côté *postérieur*, pour les tubes transversaux; au côté *droit*, pour le tube médian ou l'axe du réseau. Un coup d'œil sur la figure de cet organe suppléera à une plus ample description.

On trouve dans les ovaires *fécondés* des scorpions européens des œufs ou des ovules de toutes les grandeurs, de tous les âges. Parvenus à un certain degré de développement, ils tombent des gaînes ovigères dans les tubes ovariens, qui font, dans ce cas, l'office de *calice* ou d'*utérus*. Ils sont alors sphériques et blancs. Après une gestation dont nous ne connaissons pas au juste la durée, et que j'essayerai de déterminer plus tard, ces œufs à terme éclosent dans les canaux ovariens.

Les *fœtus* de ces scorpions, vers la fin de la gestation, offrent l'image parfaite des *nymphes nues* des insectes. Ce rapprochement, que je me contente de signaler en ce moment, est d'un fécond intérêt. Ils ont les mêmes parties, les mêmes segments, les mêmes articulations, mais les divers membres ou appendices sont ployés, emmaillottés, immobiles. La queue est collée, étendue à la ligne médiane ventrale et son extrémité s'engage, se cache entre les pattes. Dans les individus encore plus proches de la parturition, les chélipalpes débordent un peu la marge antérieure du céphalothorax. Dans les embryons peu avancés, ces chélipalpes sont invisibles ou non exsertes, et la segmentation presque insensible. J'ai représenté ces divers états de la vie intra-utérine dans l'*europæus*.

Dans sa savante anatomie comparée, comme dans son fragment académique, M. Duvernoy a établi dans les scorpions, sous le rapport des organes génitaux femelles, deux types distincts. Dans le premier (*occitanus, europæus,* etc.), les ovules fécondés se développent dans les gaînes ovigères sous la forme d'œufs pour gagner ensuite les canaux utérins, où ils subissent un état d'incubation. Dans le second type (*afer*), le produit de la conception subirait dans la gaîne ovigère même toutes les évolutions embryonnaires jusqu'à l'état de fœtus à terme. Ceux-ci, d'après M. Duvernoy, auraient deux degrés de développement. Dans le moins avancé, la queue, très-courte, est tournée vers le dos et n'a point encore d'aiguillon, les anneaux ne se touchent pas à la ligne médiane, les mandibules sont très-grandes. Dans le degré le plus avancé, la queue, plus développée, est repliée sous le ventre et a son dard tout formé, les segments dorsaux du corps sont plus rapprochés de la ligne médiane sans se toucher encore.

Ce mode particulier de gestation avait déjà été décrit et grossièrement représenté par Jean Muller en 1828, mais cette différence si remarquable n'avait point été érigée, par l'étude comparative, en principe ou en règle générale, ainsi que l'a judicieusement établi M. Duvernoy.

J'ai aussi étudié et figuré le curieux ovaire de l'*afer*. J'en donnerai d'autant plus volontiers une brève description, que l'état embryonnaire dont j'ai plusieurs fois constaté l'identité dans divers individus de ce type appartient à un âge ou à une période de développement différente de celle que M. Duvernoy a eue sous les yeux. Les gaînes ovigères unilatérales et monospermes, comme dans les autres scorpions, tiennent au tube ovarien par un col exigu. Ce col est suivi d'une sorte de vésicule plus qu'hémisphérique, cupuliforme, séparée par une coarctation annulaire, médiocre quoique tranchée, d'un corps allongé, conoïde, où la loupe constate de fines raies ou rides transversales, et qui s'atténue en arrière en un boyau filiforme borgne ou fermé au bout, diversement ployé. A mes yeux, la vésicule de ce singulier embryon

correspond au futur céphalothorax du scorpion; la portion suivante en serait le corps avec une ébauche linéaire de segmentation, et le boyau terminal, appelé appendice cœcal par M. Duvernoy, en représenterait la queue. Les nœuds ou articles de celle-ci n'existent point, et le boyau amniotique qui en recèle les invisibles germes n'affecte aucune direction ni dorsale, ni ventrale. Cet embryon tout pulpeux ou granuleux, n'offrant qu'une ébauche vaguement dessinée, méritait d'être mentionné.

M. Duvernoy, dans ses publications précitées, a soulevé une question d'embryogénie que je vais aborder aussi. « Les ovules, dit ce professur, se développent en premier lieu dans la paroi des tubes ovariens, sorte de gangue proligère, et leur capsule nutritive est comme repoussée au dehors aux dépens de cette paroi à mesure de l'accroissement des ovules. » Si une semblable assertion était fondée sur l'étude directe d'un ovaire avant la formation ou l'exsertion latérale des gaînes ovuligères, M. Duvernoy n'aurait pas sans doute manqué d'indiquer une source aussi légitime, aussi positive. Pour éclairer une question si délicate, je prie mon honorable ami de me permettre l'exposition des faits suivants.

Si l'on dissèque de très-jeunes femelles ou des femelles qui, en approchant de l'état adulte par leur développement, sont pourtant vierges, ainsi que le prouve incontestablement l'occlusion *complète* de l'opercule génital externe, il sera facile de se convaincre qu'à cet âge infantile et innocent les gaînes ovigères, ou les *capsules nutritives* de M. Duvernoy, existent aux tubes ovariens parfaitement distinctes et *unilatérales*, ainsi que je l'indique par une figure. Ces gaînes *préexistent* donc à la fécondation.

Ici vient se rattacher une observation d'un intérêt piquant, fournie par l'autopsie toute récente (avril 1851) d'une femelle non adulte de l'*occitanus*. Sa virginité m'était garantie et par sa petite taille et par sa séquestration rigoureuse, son isolement complet durant une année révolue, après laquelle elle succomba dans sa prison cellulaire. A l'ouverture je fus frappé, en songeant

aux garanties précédentes, de trouver des ovules tellement disproportionnés pour leur grosseur et avec les canaux ovariens et avec les ovules infécondés de tant d'autres femelles vierges dont j'avais fait l'autopsie, que je fus d'abord fort embarrassé de m'en rendre raison. Parmi ces gros ovules j'en voyais de beaucoup plus petits, ronds et subdiaphanes. Une étude attentive me fit reconnaître que ces gros ovules, au lieu d'être sphériques comme les véritables œufs, étaient irrégulièrement ovalaires et que la matière qui les remplissait était d'un jaune brun opaque, qu'elle avait subi une véritable altération dans ses éléments. Une conviction intime m'amena pour les gros ovules à l'idée d'un état pathologique, d'une *hypertrophie ovulaire,* qu'expliquent la captivité et un trouble dans l'évolution de la puberté. Pour les plus petits, je les considérais comme exempts de toute influence morbide et représentant une condition normale.

3° L'*oviducte* n'est, comme le conduit déférent du testicule, que la continuation du tube issu de l'angle externe de la première maille de l'organe préparateur. Il est dépourvu, dans l'*occitanus* et autres espèces européennes, de gaines ovigères, tandis que, dans l'*afer,* j'y ai positivement constaté, et de ces gaînes vides ou simplement ovuligères et de celles qui renferment l'embryon, ainsi que l'exprime ma figure.

L'oviducte est en même temps le *vagin*, comme dans les insectes et autres animaux. A partir de son origine ovarienne, il se dirige obliquement de dehors en dedans, et avant d'aboutir à l'opercule génital il offre une dilatation constante plus ou moins ovalaire. On peut considérer, avec quelques auteurs, cette dilatation comme un *réservoir séminal,* toutefois avec des attributions différentes de celles de la *poche copulatrice* d'Audouin dans les insectes. On sait que dans ceux-ci la fécondation définitive n'aurait lieu que par une ablution des œufs à leur passage devant l'embouchure de cette poche. Il doit en être autrement dans les scorpions, animaux vivipares. Les ovules, éveillés dans leur gaîne ou capsule par l'acte du coït, entrent dans un exercice plus actif de leur vitalité,

de leur nutrition surtout. L'émanation incessante de l'*aura seminalis*, dont la source est dans le réservoir, favorise la mutation, l'évolution des ovules en œufs. Ceux-ci, parvenus à un certain développement, sont pondus, je parle de l'*occitanus*, dans les canaux utérins ou ovariens. J'ai dit le reste.

Dans mon travail de 1817 (où, par une méprise singulière, le graveur a renversé les figures), j'avais représenté les oviductes confluents près de l'opercule génital, et bien des auteurs le pensent ainsi. M. Duvernoy les dit réunis dans l'*afer* et séparés dans une espèce du Chili. Des recherches récentes m'ont démontré dans l'*occitanus*, ainsi que dans les autres espèces que j'ai disséquées, les deux vagins toujours indépendants. Il existe même à l'extérieur une crête cornée dépendante de l'opercule génital qui les sépare l'un de l'autre.

C'est cette étude scrupuleuse qui m'a fait dire, contre l'opinion générale, que les femelles des scorpions avaient *deux vulves*. Mais celles-ci sont au-dessous de l'opercule génital, qui, lui, n'offre aucune différence dans les deux sexes. Dans ma dernière communication à l'Institut (janvier 1851), j'avais aussi adopté l'idée d'une vulve *unique;* mais, après de récentes autopsies, je me suis ravisé.

Dans le petit nombre d'*europæus* que j'ai disséqués, je n'ai pas été assez heureux pour apercevoir la vésicule que Meckel et M. Duvernoy ont représentée à l'embouchure de chaque oviducte dans la vulve.

ARTICLE III.

ACCOUPLEMENT, GESTATION, PARTURITION, PEIGNES.

1° *Accouplement.* — Il nous reste à résoudre un problème physiologique qui n'est point sans difficultés, c'est celui du mode d'accouplement des scorpions. Comme leurs amours sont nocturnes, qui pourra en tracer la véritable histoire? Qui nous révélera jamais les singulières inversions, réversions et exsertions des pièces renfermées dans le canal éjaculateur, à cette époque du rut où l'état d'orgasme et de turgescence séminale provoque l'exercice

actif des organes copulateurs? Mystère, mystère! Il faut donc qu'ici, à défaut d'observations directes, l'anatomie vienne nous fournir ses inspirations.

La position respective des parties externes de la génération dans les deux sexes fait supposer dans un animal d'une construction si originale, d'une locomobilité si peu énergique, des manœuvres, des postures fort singulières pour l'union des sexes. On sait que ces parties externes sont placées entre les insertions des peignes, à la face inférieure et à la base de l'abdomen. Elles consistent, dans le mâle comme dans la femelle, en deux panneaux cornés demi-circulaires, étroitement appliqués, déprimés, séparés par une fine rainure médiane, qui en est l'ouverture à l'état adulte. M. Duvernoy leur a donné le nom d'*opercule génital externe*, que j'ai volontiers adopté. Quand on se pénètre bien de ces dispositions, on comprend que la copulation ne peut s'effectuer qu'autant que l'un des sexes, la femelle sans doute, est renversé sur le dos, c'est-à-dire en supination, de manière que les ventres s'appliquent l'un contre l'autre. Je lis en effet, dans l'ouvrage sur les arachnides de MM. de Walckenaer et Gervais, que « Maccary s'est assuré que, pendant l'accouplement, la femelle est renversée sur le dos et le mâle posé sur elle. »

Rappelons-nous, pour la juste appréciation de cette manœuvre, que la partie antérieure des canaux éjaculateurs, ainsi que les vagins, est dirigée obliquement de dehors en dedans vers l'opercule génital. Ainsi, soit qu'une seule verge se mette isolément en jeu, soit que les deux verges s'introduisent ou simultanément ou alternativement dans les vulves correspondantes, la direction des vagins se prête à merveille à l'accomplissement de cet acte. Je reparlerai de celui-ci à l'occasion des peignes.

2° *Gestation.* — Les ovaires de l'*occitanus* en état de gestation offrent souvent, vers la fin de l'été, des œufs dans des degrés bien différents de développement, soit dans les gaînes ovigères, soit dans les tubes utérins. Ce fait prouve déjà que la fécondation ne s'est point opérée dans le même instant pour tous les ovules. Le même

individu aurait donc reçu les approches du mâle à diverses époques, il y aurait eu plusieurs actes du coït. Quand les œufs, dans leur gaîne ovigère, ont acquis une grosseur déterminée, j'ai déjà parlé de l'incubation qu'ils subissent dans les tubes ovariens. Citons à cette occasion quelques faits.

Vers la fin d'octobre 1850, un de mes scorpions en volière vint à périr aux premiers froids, et je procédai à son autopsie. C'était une femelle avancée dans sa gestation. Je fus frappé et de l'énorme grosseur des œufs intra-utérins et de leur petit nombre, une vingtaine environ. Ils étaient séparés les uns des autres par de profondes coarctations, de manière à être contigus. M. Duvernoy en a représenté de semblables. Ils n'offraient pourtant dans leur intérieur aucun vestige d'embryon, aucune ébauche de segmentation ou d'articulation. C'était une pulpe granuleuse parfaitement homogène. Indépendemment de ces gros œufs, il s'en trouvait beaucoup d'un volume minime demeurés dans leurs gaînes ovigères. Je remarquai en outre aux tubes ovariens des œufs déformés, atrophiés par la pression des parois distendues ou des gros œufs. J'en constatai aussi d'autres qui, quoique fécondés, s'étaient flétris, ridés, lobés par les mêmes causes pressives. Une figure exprime ces divers états.

Ce fait devint pour moi un précieux enseignement. D'abord il confirmait la nécessité de plusieurs copulations pour la complète fécondation d'une portée. Or, remarquez-le bien, cet individu avait dû partiellement être fécondé dans le courant d'avril, époque où mes scorpions avaient été pris et incarcérés à Port-Vendres, et dans ma ménagerie je les avais soigneusement tenus isolés, séquestrés.

Et si, à la fin d'octobre, des œufs si développés n'offraient pas le moindre indice d'une organisation embryonnaire, n'est-il pas probable que, pendant près de cinq mois de la mauvaise saison où les scorpions sont dans un état d'hibernation, de torpeur et de diète absolue, cet appareil génital doit demeurer stationnaire? Ce fait confirme pleinement ce que j'avais observé, il y a quarante ans,

pendant mon séjour en Espagne, et qui est consigné dans mon vieux mémoire, c'est que, au printemps, les œufs acquéraient leur grand développement, et ce n'était qu'au fort de l'été que je constatais des fœtus dans les tubes ovariens. Ce n'était guère qu'en septembre que je rencontrais de loin en loin des scorpiones portant leurs petits sur le dos.

De tout cela je conclus : 1° que la gestation du scorpion se prolonge beaucoup plus que celle de la femme et de la plupart des animaux de premier ordre, puisqu'elle serait de quinze à seize mois; 2° que très-vraisemblablement les amours de ces arachnides s'éveillent en avril, époque où dans le Midi méditerranéen les chaleurs se font déjà sentir, et ce n'est qu'à la fin de l'été de l'année suivante que l'accouchement a lieu. Remarquez, à cette occasion, que la jeune femelle dont j'ai donné l'histoire succincte à l'article des gaines ovigères, et chez laquelle j'ai constaté une hypertrophie ovulaire, a précisément succombé en avril, époque où les organes génitaux sont sollicités dans l'exercice plus actif de leur vitalité; 3° que la longévité du scorpion doit dépasser au moins deux années, car, dans le même convoi des individus de Port-Vendres en 1850, il s'en trouvait de fort jeunes et décidément vierges, dont la naissance remontait à la fin de l'été 1849, ce qui fait présumer qu'ils ne seraient devenus adultes ou aptes à la génération qu'au printemps de 1851.

Le passage des œufs fécondés dans les tubes utérins ou ovariens ne saurait s'opérer sans supposer d'une part une contraction périphérique énergique de la capsule ovigère, d'autre part une étonnante dilatabilité du col étroit et capillaire qui fixe la capsule à ces tubes.

Mais ce travail de parturition intérieure doit être bien autrement difficultueux, bien autrement merveilleux, quand il s'agit, comme dans l'*afer*, d'un énorme fœtus devant franchir, pour entrer dans le canal ovarien, un col d'une extrême ténuité.

Le fœtus, dans la période de gestation ovarienne, vit de sa vie propre et isolée. Il existe et se développe sans connexion orga-

nique avec son conceptacle, n'ayant pour toute participation à la vie maternelle, qu'un séjour dans l'utérus ou tout au plus un simple contact avec les parois vivantes de ce conceptacle.

3° *Parturition.* — Un fait plus extraordinaire encore que le passage de l'œuf ou du fœtus dans le tube ovarien, est celui de l'accouchement, de la naissance des petits scorpions. Comment cette fente si linéaire de l'opercule génital peut-elle se prêter à la délivrance d'un fœtus d'un volume si disproportionné? Quel accoucheur a jamais assisté à une si surprenante parturition? Je sais bien que la vulve de beaucoup de mammifères donne passage à des produits tout aussi disproportionnés; mais leur vulve est molle, souple, expansible, tandis qu'elle est dure, réfractaire, immobile dans le scorpion. Oh! combien d'actes de la vie privée de notre curieux arachnide nous restent encore à enregistrer pour compléter son histoire! combien de phénomènes à résoudre qui ont été à peine soulevés par le scalpel!

4° *Peignes.* — Le trait différentiel le plus éminemment caractéristique du genre scorpion est, sans contredit, l'existence des *peignes*. Tous les zoologistes leur ont accordé avec raison une valeur de premier ordre pour la distinction des espèces. Communs aux deux sexes, ils sont placés à la région ventrale du corps, aux limites postérieures du céphalothorax. Constamment au nombre de deux, ils ont une consistance tégumentaire et s'insèrent à droite et à gauche de l'opercule génital. M. Savigny, dans son mémorable ouvrage sur l'entomologie de l'Égypte, me semble l'auteur qui en a le mieux saisi, le plus fidèlement représenté la composition et la structure.

On distingue aux peignes : 1° une *souche* ou base composée de deux *baguettes* articulées étroitement, adossées l'une à l'autre; 2° une série régulière de *dents* uniformes, contiguës, comme embriquées, mobiles sur autant de tubercules ou *bulbes* qui bordent l'une des baguettes.

La plus grande de celles-ci ou l'externe n'a que trois articles, l'autre en a sept ou huit. Quelques poils hérissent ces baguettes

et les bulbes. Quant aux dents, elles sont parfaitement unies et glabres, excepté la dernière ou apicale, qui offre aussi des poils, au moins dans l'*occitanus*. Le nombre de ces dents varie suivant les espèces de scorpions.

Essayons de déterminer, d'après la position et la structure des peignes, leurs attributions physiologiques. Aucun observateur, que je sache, n'a été témoin *ex visu* des caresses, des embrassements, des ébats amoureux des scorpions, et j'ai l'intime conviction que les peignes y jouent le rôle principal. Remarquez que la finesse de leur tégument, leur texture ductile et souple, les nombreuses articulations de leurs pièces constitutives sont on ne peut plus favorables et à un toucher exquis et à un acte de préhension qui s'exercerait par l'engrenage réciproque, d'un sexe à l'autre, de leurs dents mobiles. La surface lisse et glissante de ces dents se prête admirablement à une si délicate manœuvre.

Ainsi, les peignes du scorpion sont, suivant moi, en même temps et des organes de titillation voluptueuse, et des organes préhensifs destinés, par cette double condition, à provoquer, à protéger une intromission difficultueuse, à assurer la consommation de l'acte important de la copulation.

Déjà Treviranus avait regardé ces peignes comme des organes de sensualité et de volupté. L'interprétation est peut-être trop exclusive, mais elle approche de la vérité. Quant à l'opinion de Tulk (*Annal. of nat., hist.* XV, p. 56), qui les considère comme des peignes à décrasser les palpes, les tarses et le bout de la queue, mérite-t-elle une sérieuse réfutation? La chose n'est même pas physiquement possible.

CHAPITRE VII.

APPAREIL VÉNÉNIFIQUE.

In cauda venenum, avaient dit les anciens en parlant du scorpion, et ce fait est devenu proverbial dans son application à beaucoup d'actions humaines. C'est effectivement à l'article terminal

de la queue de cet animal qu'est placée son arme offensive et défensive, son ampoule à venin et à dard.

Dans les insectes qui sécrètent et inoculent par un stylet anal un véritable venin, comme l'*abeille*, la *guêpe*, le *pompile*, la *scolie*, etc., l'appareil vénénifique est l'apanage exclusif des femelles, parce que ce sexe seul est chargé du soin et de la défense de la progéniture; mais dans les arachnides en général, l'organe du venin est commun aux deux sexes. Chez les aranéides c'est par la bouche que s'instille le venin, tandis que dans le scorpion c'est par le bout de la queue. Voilà donc, entre ces deux groupes d'arachnides, un caractère anatomique bien distinctif.

Les observateurs pratiques qui ont suivi *in loco natali* les manœuvres et le genre de vie des scorpions vivants, ceux qui les ont élevés en captivité pour les soumettre à des expérimentations, ceux enfin qui ont scruté leur anatomie, ont pu s'assurer de l'adresse et de l'énergie des mouvements si diversifiés de leur queue pour l'attaque ou pour la défense. J'ai déjà parlé de ces mouvements aux chapitres des appareils musculaire et digestif. Je n'y reviendrai point.

Sans doute il est impossible de saisir la destination spéciale des vigoureux muscles de la masse intérieure de l'ampoule, de déterminer ceux qui, au gré de l'animal, servent ou à provoquer les mouvements de l'ensemble ou à comprimer les conduits excréteurs pour l'éjaculation du venin; mais on peut du moins y constater une infinité de tendons d'une finesse plus que capillaire et juger ainsi du nombre des agents locomoteurs.

Dans le scorpion vivant et même dans le scorpion sec, l'ampoule à venin, ou le dernier nœud de la queue, présente extérieurement, à sa face inférieure ou convexe, une fort légère rainure médiane, une sorte de *raphé* qui est l'indice de l'existence intérieure de deux moitiés semblables ou de deux glandes vénénifiques.

Quand sur l'animal frais on pratique une incision circonspecte sur ce raphé, il est possible de pénétrer dans l'ampoule sans léser

les parties molles contenues, parce qu'il existe là, entre les deux moitiés internes, un vide d'une étroitesse des plus fines, des plus linéaires. Il y a donc une glande pour chaque ouverture de l'aiguillon. Ce fait matériel et rationnel paraît avoir complétement échappé aux zootomistes qui m'ont précédé.

Si cette incision a été heureuse et si l'on renverse latéralement, sans les désunir tout à fait, les deux moitiés de l'ampoule, on découvre, à la ligne médiane de sa partie supérieure ou non convexe, deux filets médians simples, parallèles, contigus, mais libres, comme une double corde tendue, et faciles à déplacer avec la pince. On peut enlever le corps des deux glandes sans entraîner ces filets. Ceux-ci sont, je crois, nerveux; c'est du moins l'idée à laquelle je me suis arrêté en définitive et peut-être provisoirement. Ils proviennent sans doute des divisions secondaires ou tertiaires des grands nerfs terminaux de la queue. Ils ne m'ont présenté de fort courtes ramifications qu'en pénétrant dans l'aiguillon.

Je l'avoue, ces courtes ramifications, qui semblent des radicules, et la simplicité des filets, m'ont aussi fait penser à des cordons *musculaires*. De là les hésitations qui me poursuivent encore au moment de la rédaction.

Chacune des moitiés contenues dans l'ampoule à venin serait donc un corps subhémisphéroïdal, c'est-à-dire plane du côté de l'intervalle médian qui les sépare, et convexe de l'autre côté. Ce corps, qu'on ne saurait appeler une *capsule* à cause de sa solidité, se prolonge en *col* pour pénétrer dans l'aiguillon. Ses parois sont blanches, parfois avec une teinte opaline, et leur texture est ferme, fibro-cartilagineuse. En les déchirant avec précaution on aperçoit, principalement du côté de la convexité de ce corps, quatre ou peut-être cinq vaisseaux d'un blanc plus mat, les uns simples, les autres divisés ou fourchus, rampant entre les chairs ou les muscles. Ces vaisseaux, dont la délimitation est loin d'être facile, ne sont pas de simples nervures, comme on pourrait le croire au premier coup d'œil, car on parvient à les soulever avec

la pointe d'une aiguille. Ils vont tous aboutir à un tronc central ou médian, lequel s'atténue pour s'enfoncer dans le col. Ils sont donc *sécréteurs* par leurs branches et *excréteurs* par leur tronc. Je crois même avoir reconnu à ce dernier, ainsi qu'aux conduits excréteurs de beaucoup d'insectes, une tunique externe de texture contractile et un tube inclus plus clair, comme élastique, dont j'ai pu suivre la continuation dans le dard.

Ainsi, quand on veut comparer la glande vénénifique du scorpion avec les glandes vénénifiques des divers ordres d'insectes dont j'ai décrit et figuré les formes et la structure dans mes recherches entomotomiques, on voit qu'il n'existe entre elles aucune sérieuse analogie anatomique. Celle de notre arachnide est organisée sur un plan tout à fait spécial et insolite. Je ne me le dissimule point, il y a encore à apprendre sur cet organe.

Si l'on consulte les archives de la science sur l'anatomie de cet appareil, on est affligé de la pauvreté des faits consciencieusement observés et du vague des idées émises à ce sujet. En définitive, je ne vois que Jean Muller qui ait sérieusement porté le scalpel dans l'intérieur de l'ampoule à venin, et comme il n'a eu à sa disposition que des sujets à l'alcool, il n'en est résulté aucun fait positif. Cependant, chaque compilateur s'est cru obligé, en abordant cette question, de dire son mot, et ce mot est demeuré une erreur ou une insignifiance. Les uns y supposent des vésicules, d'autres des réservoirs, qui des follicules, qui des cellules cylindriques, que sais-je!

EXPLICATION DES FIGURES

(TOUTES GROSSIES).

Fig.

1. *Appareil sensitif* de l'*occitanus*.

a. Cerveau.
bb. Optiques *oculaires* avec un fragment tégumentaire où sont les yeux médians.
cc. Optiques *ocellaires* avec un fragment tégumentaire où sont les ocelles.
dd. Nerfs *mandibulaires*.
e. Ganglion *thoracique*.
ff. Nerfs *chélipalpaires*.
gg. Nerfs *cruraux*.
hh. Nerfs *musculaires*, etc.
i. Portion d'œsophage.
j. Portion du vaisseau circulatoire.
k. Premier ganglion abdominal.
l. Deuxième *idem*.
m. Troisième *idem*.
n. Quatrième *idem* avec leurs nerfs.
oo. Les trois premiers ganglions caudaux avec leurs nerfs.
p., Dernier ganglion caudal avec ses nerfs.
qq. Sachets adipeux du cordon rachidien.
rr. Poumons.
ss. Nerfs des peignes.

2. Nerf ocellaire de l'*occitanus*, isolé pour voir ses trois nerfs partant du même point.

Fig.

3. Nerf ocellaire du *nigro-lineatus*, isolé pour voir ses trois nerfs, dont un est séparé des deux autres.

4. Globe oculaire de l'*occitanus*, isolé.

a. *Choroïde* avec un voile flottant.
b. Muscle moteur de l'œil.

5. Deuxième ganglion abdominal, vu en dessous, pour mettre en évidence les nerfs *latéraux* et le nerf *inférieur* impair, ainsi que les deux filets du cordon rachidien.

6. Ganglion et nerfs *stomato-gastriques* avec une portion de l'œsophage.

7. *Appareil circulatoire* de l'*occitanus* récemment mort.

a. Portion *céphalothoracique*.
b. Portion *abdominale* ou *cœur*.
cc. Vaisseaux cardiaques.
dd. Muscles cardiaques.
e. Portion *caudale* avec ses vaisseaux.

8. Fragment tubuleux de la tunique *externe* ou *musculaire* du cœur, vu par sa face inférieure.

a. Cette tunique à fibres longitunales.
bb. Muscles cardiaques avec leur insertion.

Fig.
9. Portion de la tunique *interne* ou *propre* du cœur, pour mettre en évidence ses rubans spiroïdaux.

10. Cœur d'un individu après deux jours d'une mort violente par asphyxie. Coarctations légères.

11. Ce même cœur après huit jours de macération sur la planchette à dissection.

12. Cœur vu en dessous, après une macération de deux jours. Coarctations peu prononcées, avec des séries latérales de taches ocracées proéminentes, où s'insèrent les muscles cardiaques.

13. Cœur d'un individu à l'alcool vu en dessous. Dépression médiane; dilatations latérales pointues, où s'insèrent les muscles cardiaques.

14. Cœur d'un scorpion dans l'alcool depuis un an, vu par sa face dorsale. Apparence d'articulations vertébriformes, avec les troncs des vaisseaux cardiaques.

15. Portion très-grossie d'un cœur vu de côté et au maximum de sa déformation cadavérique. Saillies pyramidales avec les muscles cardiaques au sommet.

16. *Plastron* ou *plancher inférieur* du céphalothorax pris sur un cadavre sec, avec ses crêtes ou côtes en nombre égal à celui des membres locomoteurs ou préhensiles.

b. Deux paires de grandes lames cornées.
c. Opercule génital.

Fig.
17. *Carcasse céphalothoracique* avec une partie du cordon nerveux rachidien.

18. Portion du système musculaire abdominal de la paroi inférieure.

aa. Pannicule musculaire, ou peaussier.
bb. Rubans musculaires longitudinaux à fibres parallèles.
c. Cordon nerveux rachidien.
dd. Muscles *cardiaques* rompus.
ee. Muscles *perforants* rompus.

19. Deux paires de *poumons* de l'*occitanus*, vus en place.

aa. Tronçons des muscles perforants.
bb. Rubans musculaires médians.
cc. Tunique propre ou plèvre étalée.

20. Un poumon détaché, avec une portion du tégument où se voit le stigmate.

21. Autre poumon isolé, avec son réservoir ou vestibule.

22. *Feuillet* pulmonaire détaché.

a. Dos du feuillet avec des traces de plissures transversales.
b. Portion à pigment nacré.
c. Portion dénudée de ce pigment, offrant une trame à mailles.
d. Portion simplement membraneuse de sa base.

23. Portion d'un feuillet pulmonaire privé de pigment, avec les deux lames qui le constituent.

Fig.
24. Un stigmate isolé, pour faire voir le diaphragme membraneux à fente médiane, placé entre les deux lèvres cornées.

25. Appareil *digestif* de l'*occitanus*.

a. Céphalothorax avec ses yeux, ses ocelles, ses granules symétriques.
b. Mandibules didactyles.
cc. Portion des glandes salivaires.
d. Ventricule chylifique.
e. Intestin stercoral.
f. Ampoule du venin et partie du pénultième nœud de la queue.
gg. Flocons du parenchyme du foie et canaux hépatiques.
hh. Vaisseaux biliaires vestigiaires rameux.
ii. Les mêmes vaisseaux simples.

26. Portion céphalothoracique du ventricule chylifique, avec deux canaux hépatiques.

27. Portion du tube digestif.

a. Mode d'insertion des vaisseaux biliaires vestigiaires.
b. Bourrelet indiquant la valvule ventriculo-intestinale.
c. Ballon rempli d'air s'observant souvent à l'origine de l'intestin.
d. Forme singulière de l'excrément, blanc amidonné.

28. *Glande salivaire* détachée et vue par sa région dorsale.

aa. Tunique externe rabattue sur les côtés.
b. *Conduit excréteur* avec ses ligaments.
c. Pédicule charnu qui fixe la glande.

Fig.
29. La même glande renversée sur le côté.

a. Circonvolutions vasculaires intérieures exsertes par la déchirure de la tunique propre.
b. Tache ocracée centrale.
c. Bassinet et ses ligaments.
d. Pédicule charnu.
e. Conduit excréteur avec ses ligaments.

30. *Foie* de l'*occitanus*, vu par sa région dorsale, avec la double série des trous pour le passage des muscles perforants.

aa. Lobules digitiformes du céphalothorax.
bb. Lobules appendiculaires de l'origine de la queue.
cc. Quelques lobules qui débordent de la face inférieure.
d. Portion d'intestin.
e. Cœur, ou portion abdominale de l'appareil circulatoire.

31. Lobules pyramidaux de la face inférieure du foie de l'*occitanus*, avec une portion de tube ovarien engagée.

32. Lobules rameux de la face inférieure du foie du *palmatus*.

33. Un bouquet ou faisceau des *utricules* élémentaires ou constitutives du foie.

34. *Appareil génital mâle* étalé de l'*occitanus*.

aa. *Testicules* à trois mailles quadrilatères de chaque côté
bb. *Conduits déférents.*
cc. *Vésicules séminales.*

Fig.

dd. Conduits *éjaculateurs*, réceptacles des fourreaux ou armures des verges.

e. Indice de l'opercule génital.

35. Vésicules séminales détachées, pour mettre en évidence leurs connexions.

a. Conduit déférent.

b. Dilatation ou sinus.

c. Vésicule séminale essentielle, libre.

d. Seconde vésicule, en partie adhérente au canal éjaculateur.

e. Troisième vésicule, ovoïde.

f. Portion du canal éjaculateur avec le fourreau de la verge.

36. Portion détachée du canal éjaculateur.

a. Armure de la verge avec sa lame lancéolée.

b. *Verge* dégagée de l'appendice vermiculaire de ce canal.

37. *Appareil génital femelle* étalé de l'*occitanus*.

aa. *Ovaire* à huit mailles quadrilatères chargées de gaînes ovigères ou d'œufs tombés dans les tubes.

bb. *Oviductes* et leur *réservoir séminal*.

c. Indice de l'opercule génital.

38. Portion de tube ovarien, pour mettre mieux en évidence les gaînes ovigères avec leur col et les œufs.

39. Portion d'un tube ovarien de l'*europæus* renfermant des *embryons*.

Fig.

40. Un *fœtus* de l'*europæus* vu par sa région dorsale.

41. Ce même fœtus vu par sa région ventrale.

42. Mesure de leur longueur naturelle.

43. Portion de tube ovarien de l'*occitanus*, avec des œufs en incubation considérablement développés, des ovules inféconds ou avortés, et des gaînes ovigères déformées.

44. Portion d'ovaire d'un *occitanus* vierge avec des ovules exsertes.

45. Portion d'ovaire d'un *occitanus* vierge avec des ovules développés par une cause morbide; c'est une *hypertrophie ovulaire;* avec des ovules à l'état normal.

46. Un des ovaires de l'*afer*, offrant des gaînes embryonigères et d'autres infécondées. L'oviducte a aussi des gaînes latérales et une dilatation ou réservoir séminal.

47. Ampoule à venin ouverte par son *raphé*, de manière qu'une moitié est en évidence.

48. Un des organes *vénénifiques* isolé et vu par sa face plane.

49. Un des filets ou musculeux ou nerveux qui séparent ces organes.

50. Organe vénénifique ouvert, déchiré, pour faire voir les vaisseaux *sécréteurs* et *excréteurs*.

ESSAI D'UNE RESTITUTION

DE

TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS

SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES,

D'APRÈS DES INDICATIONS TIRÉES D'UN MANUSCRIT ARABE,

PAR M. F. WOEPCKE.

DES TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES, ET DU COMMENTAIRE GREC DU DIXIÈME LIVRE D'EUCLIDE QUI EN CONTIENT LA NOTICE.

§ 1.

Ce que les mathématiques grecques ont produit de plus élevé est représenté par trois noms, ceux d'Archimède, d'Apollonius et de Diophante.

Mais tandis qu'Archimède brille par l'universalité de son génie, Diophante et Apollonius sont admirés surtout pour avoir amené à un haut degré de perfection des branches spéciales des mathématiques, celui-là l'algèbre indéterminée, celui-ci la géométrie.

C'était, d'ailleurs, relativement à Apollonius, le jugement des anciens eux-mêmes, qui l'appelaient le géomètre par excellence, *le Grand Géomètre*[1]. Aussi les ouvrages de cet illustre mathématicien, soit ceux qui nous ont été conservés, soit ceux dont nous ne

[1] Voir le Commentaire du premier livre des *Coniques* par Eutocius, p. 9 de l'édition d'Oxford des *Coniques* d'Apollonius.

connaissons l'existence que par des citations, montrent, en effet, que c'est la géométrie qu'il a cultivée de préférence.

Le plus important de ces ouvrages est son grand *Traité des Coniques*. Les quatre premiers livres seuls de ce traité ont été conservés dans l'original grec. Le cinquième, sixième et septième livre, qui contiennent les découvertes les plus précieuses que nous ait laissées la géométrie grecque, furent traduits en latin d'après des traductions et des extraits arabes. Enfin, le huitième et dernier livre fut restitué par Halley, dans sa magnifique édition des *Coniques*, publiée à Oxford, en 1710, d'après les indications données par Pappus [1].

Les ouvrages d'Apollonius intitulés : *De la Section de raison* [2], *De la Section de l'espace*, *De la Section déterminée*, *Des Contacts*, *Des Inclinaisons* [3], *Des Lieux plans*, sur lesquels nous trouvons des no-

[1] Il paraît que le huitième livre avait péri de bonne heure, mais que cependant les mathématiciens arabes, qui allèrent en Grèce rechercher les monuments de la science grecque qui se perdaient dans la décadence du Bas-Empire, en trouvèrent encore quelques propositions qu'ils eurent soin de joindre à leurs traductions des sept premiers livres. C'est ce qui résulte du passage suivant du *Qitâb Alfihrist*, ms. n° 4136, ancien fonds arabe de la Bibliothèque impériale, t. II, fol. 111 v.

وقال بنو موسى ان الكتاب ثمان مقالات والموجود منه سبعة وبعض الثامنة وترجم الاربع مقالات الاولة بين يدى احمد بن موسى هلال بن ابى هلال الحمصى والثلثة الاواخر ثابت بن قرة الحرانى والذى يضاف من المقالة الثامنة اربع اشكال

« Et les Banoû Moûçâ ont dit que le traité (des *Coniques*) consistait en huit livres, dont il n'existe que sept et une partie du huitième. Les quatre premiers livres furent traduits sous la direction de Ahmed Ben Moûçâ par Helâl Ben Abî Helâl Alhimçî, et les trois derniers par Thâbit Ben Korrah Alharrânî; et ce qui s'y trouve joint du huitième livre, ce sont quatre propositions. »

[2] Cet ouvrage d'Apollonius fut également traduit en latin par Halley, d'après une traduction arabe découverte dans un manuscrit de la bibliothèque Bodléienne par Ed. Bernard. (Voir Apollonii Pergæi *De Sectione rationis libri duo*, etc. opera et studio Edmundi Halley, Oxonii, 1706, in-8°, préface.)

[3] Le traité des *Inclinaisons* est aussi cité par Marinus dans son *Introduction aux Données d'Euclide*. (Voir l'édition d'Oxford des *Œuvres d'Euclide*, p. 453.) Au même endroit, Marinus cite encore un autre ouvrage d'Apollonius, intitulé *Traité universel*.

tices assez étendues chez Pappus[1], traitent tous de sujets purement géométriques[2]. C'est aussi par la géométrie qu'Apollonius résolut le problème *des stations et des rétrogradations des planètes*, solution rapportée par Ptolémée[3], et qui constitue, comme on sait, une belle question de maximum. Les sujets de deux autres ouvrages, l'un sur *le Dodécaèdre et l'Icosaèdre inscrits à une même sphère* mentionné par Hypsiclès[4], et l'autre sur *la Vis d'Archimède* (Περὶ τοῦ κοχλίου) cité par Proclus[5], ne furent traités sans doute par Apollonius que géométriquement.

Cependant, si Apollonius était avant tout géomètre, il ne l'était pourtant pas exclusivement. Un fragment du second livre des collections mathématiques de Pappus, découvert et publié par Wallis[6], contient des extraits d'un ouvrage d'Apollonius, qui avait pour but de faciliter le calcul de très-grands nombres; et les principes établis dans cet ouvrage paraissent avoir été mis en pratique par Apollonius dans un autre ouvrage, cité par Eutocius[7], et dans lequel il détermina le rapport de la circonférence au rayon du cercle avec une plus grande précision que cela n'avait été fait par Archimède. Ce sont donc là des travaux et des découvertes arithmétiques qui ajoutent à la gloire du grand géomètre.

[1] Voir la préface du VII[e] livre des *Collections mathématiques* de Pappus, p. 240 et suiv. de l'édition de Bologne, 1660, in-folio; et p. 1 à XLIV de l'édition ci-dessus citée de l'ouvrage *De sectione rationis* faite par Halley.

[2] Ces ouvrages d'Apollonius, les *Coniques*, et quelques autres traités d'Euclide, d'Aristée et d'Ératosthènes, formaient, d'après Pappus, *loc. cit.*, le *Lieu résolu* ou l'analyse géométrique des anciens. Cependant, il paraît qu'Apollonius avait écrit, en outre, un traité spécial du *Lieu résolu*, qui est cité par Eutocius. (Voir l'édition d'Oxford des *Coniques* d'Apollonius, p. 11, et comparer Wallis, *Opera*, t. II, p. 274.)

[3] Voir *Almageste*, liv. XII, chap. 1.

[4] Voir la préface du XIV[e] livre des *Éléments d'Euclide*, édition d'Oxford, p. 431.

[5] Voir le II[e] livre du *Commentaire du I[er] livre des Éléments d'Euclide*, p. 29, l. 20, de l'édition de Bâle, 1533, in-fol.

[6] Pappi Alexandrini *Fragmentum secundi libri mathematicæ collectionis*, edidit Joh. Wallis, Oxoniæ, 1688, in-8°; et Johannis Wallis *Opera*, Oxoniæ, 1699, in-folio, vol. III, p. 595-614.

[7] Voir Archimède, édit. d'Oxford, p. 216. Wallis (*Opera*, t. III, p. 599, note *e*) et après lui Halley (préface de son édition des *Coniques*, dernière page) paraissent avoir été disposés à considérer ces deux ouvrages comme un seul et même ouvrage.

§ 2.

Mais ce qui sans doute paraîtra digne d'attention, c'est que dans la traduction arabe d'un commentaire grec sur le dixième livre d'Euclide, commentaire dont le texte grec ne nous est pas parvenu, je viens de trouver la preuve qu'Apollonius s'est occupé aussi des quantités irrationnelles, et qu'il a apporté dans ses recherches sur cette matière la puissance de génie qui caractérise cet esprit éminent.

Euclide avait considéré trois espèces d'irrationnelles, produites respectivement au moyen de la proportion, de l'addition et de la soustraction. Il avait démontré que le premier de ces trois modes de génération donne lieu à une infinité d'irrationnelles; mais, en réalité, il ne s'était occupé que d'une seule irrationnelle produite par ce moyen, et de douze autres, dont six étaient formées par addition, et six par soustraction. On peut caractériser, en général, ce nombre très-restreint d'irrationnelles, qui avait été l'objet des travaux d'Euclide, comme *irrationnelles binômes et du second degré.*

Apollonius dépassa des limites aussi étroites et ouvrit à la théorie des irrationnelles un nouvel et vaste horizon. Aux douze irrationnelles formées au moyen de l'addition et de la soustraction, il ajouta les innombrables espèces des *irrationnelles polynômes*, et pour les irrationnelles formées au moyen de la proportion, il s'éleva à la conception des *médiales supérieures*, qui sont représentées par la racine d'un degré quelconque d'un produit de certaines puissances de deux rationnelles ou irrationnelles quelconques.

Ces nouvelles irrationnelles, dont le nombre était infiniment de fois infini, furent appelées *inordonnées*, par opposition aux treize irrationnelles d'Euclide, dont le nombre et la génération étaient parfaitement définis, et que, pour cette raison, on désignait par le nom d'irrationnelles *ordonnées*.

Les mots grecs qui correspondent à ces deux termes sont évidemment ἄτακτος et τεταγμένος. Ce qui m'en donne la certitude, ce sont plusieurs passages de l'Introduction aux Données d'Eu-

clide par Marinus[1], et principalement celui que je transcris ici. Sa conformité avec les renseignements nouveaux que je tire du manuscrit arabe est une preuve précieuse de leur authenticité.

Οὕτω δὲ ἔχει καὶ πρὸς τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον τὸ τεταγμένον τε καὶ ἄτακτον· κοινωνοῦνται γὰρ ἀλλήλοις πολλαχῇ, καὶ διενήνοχε τὸν εἰρημένον τρόπον. Οὐδὲ γὰρ ταῦτα ἐξισάζει ἄλληλα, οὐδ' ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐστὶ περιληπτικόν, ἡ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων, καὶ αἱ οὕτως κατειλημμέναι ἄλογοι τεταγμέναι μέν εἰσιν, οὐκέτι δὲ καὶ ῥηταί, καὶ ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου.

« Voici quelle est la relation entre le rationnel et l'irrationnel d'une part, et l'ordonné et l'inordonné de l'autre. Ils ont des points communs sous beaucoup de rapports, tandis qu'ils diffèrent entre eux de la manière qu'on vient de dire. Ils ne sont ni les équivalents les uns des autres, ni compris les uns dans les autres, *car la droite de deux noms et les irrationnelles ainsi conçues sont ordonnées,* mais non pas rationnelles, de même que le rapport de la diagonale au côté du carré, etc. »

§ 3.

La source à laquelle j'ai puisé la connaissance de ces travaux d'Apollonius, dont jusqu'à présent la trace même avait été perdue, est, comme je viens de le dire, la traduction arabe d'un commentaire grec sur le dixième livre d'Euclide.

Cette traduction, dont l'auteur est Aboû Othmân le Damascène[2], se trouve dans le ms. n° 952. 2 (supplément arabe de la Bibliothèque impériale), dont elle occupe vingt feuillets depuis fol. 23 v° jusqu'à fol. 42 v°. La copie en a été faite par Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl Alsidjzî, excellent géomètre lui-même, et dont j'ai fait connaître un ouvrage dans les extraits ajoutés à la

[1] Voir Euclide, édit. d'Oxford, p. 453 à 459. Comparer Proclus, III[e] livre du *Commentaire du I[er] livre des Éléments d'Euclide*, p. 60, l. 7 en rem. et suiv. de l'édition de Bâle.

[2] Voir Wenrich, *De Auctorum græcorum versionibus et commentariis syriacis, arabicis, armeniacis, persicisque*, Lipsiæ, 1842, p. XXVIII et p. 34; et Gartz, *De Interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis*, Halæ, 1823, p. 17.

fin de la traduction de l'algèbre d'Omar Alkhayyâmî[1]. Cette copie fut terminée à Chîrâz, au mois de Djoumâdâ premier de l'an 358 de l'hégire (mars-avril 969 de notre ère)[2].

[1] *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits; par F. Wœpcke; Paris, 1851, p. 117 et suiv.

[2] Une description de ce manuscrit, qui se trouve dans le catalogue manuscrit du supplément arabe rédigé par M. Reinaud, était de nature à fixer l'attention des personnes qui s'occupent de recherches sur l'histoire des mathématiques. Dans cette note, M. Reinaud fait connaître les titres de six traités, occupant les quarante-deux premiers feuillets du volume. Je crois faire une chose utile en donnant ci-après une énumération détaillée de tous les traités et fragments de traités contenus dans ce manuscrit. Cette énumération peut, je crois, offrir un véritable intérêt pour l'histoire des mathématiques, tant à cause du nombre et de l'importance de ces traités, qu'à cause de l'époque très-ancienne et bien constatée où les copies renfermées dans ce volume ont été faites.

Voici, dans l'ordre du manuscrit, la liste exacte des titres de ces pièces :

1° (Verso du premier feuillet non numéroté et fol. 1 r° à 18 v°.)

Traité d'Ibrâhîm Ben Sinân sur la méthode de l'analyse et de la synthèse dans les problèmes géométriques.

مقالة لابرهيم بن سنان فى طريق التحليل والتركيب فى المسائل الهندسية

Copié par Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl, à Chîrâz, au mois de rabîa second de l'an 358 (février-mars 969 de notre ère).

2° (Fol. 19 r° à 21 r°.)

Traité sur les centres de cercles qui se touchent, situés sur des lignes (données), d'après la méthode de l'analyse, par Wîdjan Ben Wastam, connu sous le nom d'Aboû Sahl Alkoûhî*.

كتاب مراكز الدوائر المتماسة على الخطوط بطريق التحليل استخرجه وجن بن وستم المعروف بابى سهل القوهى

(Collationné avec le manuscrit autographe الاصل.)

3° (Fol. 21 v° à 22 v°, l. 11.)

Traité d'Euclide sur le levier**.

مقالة لاقليدس فى الميزان

* Une analyse succincte de ce traité a été donnée dans l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 55, l. 22 et suiv. de la traduction française.

** Ce traité a été publié dans le *Journal asiatique*, cahier de septembre-octobre 1851, p. 220 et suiv.

Il est ici de la plus grande importance de connaître le nom et l'époque de la vie de l'auteur de ce commentaire grec. Pour cette

4° (Fol. 22 v°, l. 12 à 23 r°, l. 6.)
Traité d'Archimède sur la pesanteur et la légèreté*.

مقالة لارشميدس فى الثقل والخفة

5° (Fol. 23 v° à 31 r°.)
Premier livre du traité de *B.los* sur les quantités rationnelles et sourdes dont il est fait mention dans le dixième livre de l'ouvrage d'Euclide sur les Éléments, traduit par Aboû Othmân, le Damascène.

المقالة الاولى من كتاب بلس فى الاعظام المنطقة والصم التى ذكرها فى المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس فى الاسطقسات ترجمة ابى عثمن الدمشقى

6° (Fol. 31 v° à 42 v°.)
Second livre du Commentaire du dixième livre des Éléments d'Euclide.

المقالة الثانية من تفسير المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس فى الاصول

(Date de la copie : Chîrâz, au mois de djoumâdâ premier de l'an 358, mars-avril 969.)

7° (Fol. 43 r° à 47 v°.)
Sur la signification du dixième livre (d'Euclide).

فى معنى المقالة العاشرة

8° (Fol. 48 r° à 50 v°.)
Traité sur la manière de mener deux lignes issues d'un point et renfermant un angle donné, d'après la méthode de l'analyse, par Wîdjan Ben Wastam, connu sous le nom d'Aboû Sahl Alkoûhî**.

كتاب اخراج الخطين من نقطة على زاوية معلومة بطريق التحليل استخرجه وجن بن وستم المعروف بما (*sic*) سهل القوهى

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

9° (Fol. 51 r° à 52 r°.)
Sur l'objet et le contenu des Éléments d'Euclide.

10° (Fol. 52 v° à 53 v°, l. 10.)
Lettre d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl sur la solution d'un

* Ce sont les énoncés des propositions du I^er^ livre et de la 1^re^ proposition du II^e^ livre du traité d'Archimède, *De Iis quæ in humido vehuntur*. (Voir *Archimède*, édit. d'Oxford, p. 333 et suiv.)

** Une analyse succinte de ce traité a été donnée dans l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 55, l. 7 en rem. et suiv. de la traduction française.

raison, j'ai rassemblé plusieurs passages relatifs à cet auteur, extraits de divers manuscrits arabes, et au moyen desquels je crois

problème tiré de l'ouvrage de Yoûhanna Ben Yoûçouf, et relatif à la division d'une ligne droite en deux parties égales, et révélation de l'erreur de Yoûhanna à ce sujet.

رسالة احمد بن محمد بن عبد الجليل فى جواب مسئلة عن كتاب يوحنا بن يوسف من انقسام خط مستقيم بنصفين وتبيين خطاء يوحنا فى ذلك

11° (Fol. 53 v°, l. 11 à 55 v°.)

Traité d'Euclide sur la division (des figures planes)*.

كتاب اقليدس فى القسمة

12° (Fol. 56 r°.)

Fragment relatif à un sujet astronomique.

13° (Fol. 56 v° à 59 r°, l. 17.)

Traité de Thâbit (Ben Korrah) sur la retardation du mouvement dans la sphère des signes et sur son accélération suivant les points de l'excentrique où se trouve le (corps en) mouvement.

كتاب الفه ثابت فى ابطاء الحركة فى فلك البروج وسرعتها بحسب المواضع التى تكون فيها من الفلك الخارج المركز

14° (Fol. 59 r°, l. 18 à 60 r°, l. 8.)

Fragment relatif à la théorie du mouvement de la lune.

(Date de la copie : Chîrâz, le dernier jeudi du mois de rabîa second de l'an 359 de l'hégire, 10 mars 970.)

15° (Fol. 60 v° à 75 v°.)

Traité d'Aboûl Haçan Thâbit Ben Korrah, le Sabéen, sur la composition des rapports.

كتاب ابى الحسن ثابت بن قرة الصابئ فى تاليف النسب

Ce traité est divisé en trois chapitres, qui occupent respectivement une page et demie, treize pages et demie, et seize pages.

(Date de la copie : Chîrâz, à la fin du mois de djoumâdâ second de l'an 359, mai 970.)

16° (Fol. 76 r° à 78 r°.)

Lettre sur le calcul des racines sourdes, adressée par Mohammed Ben Abd Alaziz Alhâchimî (محمد بن عبد العزيز الهاشمى) à l'émir Aboûl Fadhl Djafar Ben Almoqtafî (ابو الفضل جعفر بن المكتفى).

* Une traduction de ce traité a été publiée dans le *Journal asiatique*, cahier de septembre-octobre 1851, p. 233 et suiv.

pouvoir résoudre ces deux questions d'une manière assez satisfaisante, quelque difficile qu'il soit de restituer avec exactitude

17° (Fol. 78 v° à 80 v°, l. 5.)
Lettre d'Alfadhl Ben Hâtim Alnaïrîzî sur l'azimut de la Kiblah.

رسالة الفضل بن حاتم النيريزى فى سمت القبلة

18° (Fol. 80 v°, l. 6 et suiv.)
Additions à quelques propositions du dixième livre (d'Euclide), existant en langue grecque, et traduites par Nazhîf Ben Yaman, le médecin*.

هذا ما نقله نظيف بن يمن المتطبب مما وجد فى اليونانى من الزيادة فى اشكال المقالة العاشرة

19° (Fol. 81 r° à 86 r°.)
Fragment, manquant de commencement, relatif à la formation des triangles rectangles en nombres rationnels ou entiers.

20° (Fol. 86 v° à 92 v°.)
Lettre du chaïkh Aboû Djafar Mohammed Ben Alhoçaïn à Aboû Mohammed Abdallah Ben Alî, le calculateur, sur la formation des triangles rectangles ayant des côtés rationnels, et sur l'utilité qu'offre leur connaissance.

رسالة الشيخ ابى جعفر محمد بن الحسين الى ابى محمد عبد الله بن على الحاسب فى انشاء المثلثات القائمة الزوايا المنطقة الاضلاع والمنفعة فى معرفتها

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

21° (Fol. 93 r°.)
Fragment relatif à un sujet astronomique.

22° (Fol. 93 v° à 95 r°, l. 8.)
Recette d'une médecine universelle avec manière de s'en servir. — Au milieu de ce morceau, on trouve intercalées (fol. 94 v°) les observations de quelques conjonctions qui ont été citées et traduites par M. Caussin, dans son Mémoire sur les tables d'Ibn Yoûnis (*Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque du Roi*, t VII, p. 238).

23° (Fol. 95 r°, l. 9 et suiv.)
Sur la manière de prendre les heures égales sur le dos de l'astrolabe.

* Ce sont deux démonstrations, l'une de la 1re et l'autre de la 6e proposition du dixième livre d'Euclide. La première est la première des deux démonstrations de la 1re proposition qui se trouvent dans l'édition d'Oxford. La seconde n'est pas essentiellement différente de la 1re des deux démonstrations de la 6e proposition qu'on trouve dans la même édition. (Comparer ci-après au n° 34, et un passage du *Târîkh Alhoqamâ* rapporté par Casiri, t. I, p. 340, col. *a*, l. 14 et suiv. et p. 341, l. 22 et suiv.)

des noms grecs, autrement inconnus, d'après la transcription si imparfaite des manuscrits arabes, et au milieu des leçons souvent

24° (Fol. 95 v° à 122 r°.)
Traité de Thâbit Ben Korrah sur la mesure des corps paraboliques.

(مقالة) لثابت بن قرة فى مساحة المجسمات المكافية

(Date de la copie : Chîrâz, samedi 22 de rabîa premier de l'an 358, 13 février 969.)

25° (Fol. 122 v° à 134 v°, l. 13.)
Traité de Thâbit Ben Korrah sur la mesure de la parabole.

كتاب ثابت بن قرة فى مساحة قطع المخروط الذى يسمى المكافى

26° (Fol. 134 v°, l. 14 à 136 v°, l. 4.)
Traité d'Ibrâhîm Ben Sinân sur la mesure de la parabole.

كتاب ابرهيم بن سنان فى مساحة القطع المكافى

(Date de la copie : Chîrâz, au mois d'ardabehicht de l'an 338 d'Yezdedjird, avril-mai 969 de notre ère.)

27° (Fol. 136 v°, l. 5 à 137 r°.)
Lettre d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl à Aboû Alî Nazhîf Ben Yaman, le médecin, sur la construction d'un triangle acutangle au moyen de deux lignes droites inégales.

رسالة احمد بن محمد بن عبد الجليل الى ابى على نظيف بن يمن المتطبب
فى عمل مثلث حاد الزوايا من خطين مستقيمين مختلفين

(Date de la copie : le jeudi, dî-bâder du mois d'abân de l'an 339 d'Yezdedjird, 27 octobre 970.)

28° (Fol. 137 v° à 139 r°.)
Lettre d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl au chaïkh Aboûl Hoçaïn Mohammed Ben Abd Aldjalîl sur les sections produites dans les paraboloïdes et hyperboloïdes de révolution.
(Date de la copie : le lundi, râm-rôz du mois de bahmen de l'an 340 d'Yezdedjird, 12 février 972.)

29° (Fol. 139 v° à 140 v°.)
Mémoire d'Alalâ Ben Sahl sur les propriétés des trois sections (coniques).

فى خواص القطوع الثلثة استخراج العلاء بن سهل

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

fautives et contradictoires produites par la négligence des copistes.

30° (Fol. 141 r° à 150 v°.)

Traité sur la construction de l'astrolabe appelé *Almobthakh*, d'après Aboû Djafar Ahmed Ben Abdallah.

كتاب عمل الاسطرلاب المبطخ مما وضعه ابو جعفر احمد بن عبد الله

31° (Fol. 151 r° à 156 v°, l. 11.)

Traité d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl sur les solutions de divers problèmes que lui avaient proposés plusieurs géomètres de Chîrâz.

كتاب احمد بن محمد بن عبد الجليل فى الاجوبة عن مسائل سالها عنه بعض مهندسى شيراز

32° (Fol. 156 v°, l. 12, à 160 r°, l. 4.)

Traité de Thâbit Ben Korrah sur (le théorème) que deux droites menées de manière à renfermer (avec une troisième) moins de deux angles droits se rencontrent.

مقالة ثابت بن قرة فى ان الخطين اذا اخرجا على اقل من زاويتين قائمتين التقيا

(Collationné avec le manuscrit autographe. Date de la copie : le mercredi, 27 du mois de rabîa second de l'an 359, 9 mars 970.)

33° (Fol. 160 r°, l. 5 et suiv.)

Une construction de la trisection de l'angle.

34° (Fol. 161 r°.)

Fragment relatif à la théorie des quantités irrationnelles, reproduisant, à quelques légères modifications près, les propositions 7 et 8, et une partie du corollaire de la proposition 9 du X^e^ livre d'Euclide, telles qu'elles se trouvent dans l'édition d'Oxford. Ce fragment paraît être la suite du n° 18.

35° (Fol. 161 v°.)

Problèmes intéressants et beaux sur les nombres.

مسائل عددية لطيفة حسنة

36° (Fol. 162 r° à 164 r°, l. 12.)

Le traité d'Hypsiclès sur les ascensions, traduit par Ishâk Ben Honaïn et revu par Thâbit Ben Korrah.

كتاب ابسقلاوس فى المطالع نقل اسحق بن حنين واصلاح ثابت بن قرة

1° Ms. n° 952. 2, suppl. arabe, fol. 23 v°.

Titre du premier livre de ce commentaire :

المقالة الاولى من كتاب بلُس فى الاعظام المنطقة والصم التى

37° (Fol. 164 r°, l. 13 à 170 v°, l. 11.)

Lettre d'Aboûl Haçan Thâbit Ben Korrah sur la figure de la section (*al-kathâ'*).

رسالة ابى الحسن ثابت بن قرة فى الشكل القطاع *

38° (Fol. 170 v°, l. 12 à 180 v°, l. 7.)

Traité d'Aboûl Haçan Thâbit Ben Korrah sur la manière de trouver des nombres amiables d'après une méthode facile**.

مقالة الفها ابو الحسن ثابت بن قرة فى استخراج الاعداد المتحابة بسهولة المسلك الى ذلك

(Date de la copie : Chîrâz, à la fin du mois de khordâd de l'an 338 d'Yezdedjird, juin 969.)

39° (Fol. 180 v°, l. 8 à 181 v°, l. 3.)

Fragment d'un commentaire d'Almâhâni sur le dixième livre d'Euclide.

تفسير المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس للماهانى

40° (Fol. 181 v°, l. 4 à 15.)

Démonstration d'une proposition de géométrie.

41° (Fol. 181 v°, l. 16 à 187 r°, l. 12.)

Exposé du calcul des apotomes et des droites de deux noms.

(Date de la copie : Chîrâz, à la fin du mois de chabân de l'an 358 de l'hégire, juillet 969.)

42° (Fol. 187 r°, l. 13 à 188 r°.)

Discussion de la proposition que toute quantité continue est divisible à l'infini.

القول فى ان كل متصل فانه منقسم الى اشياء تنقسم دائما بغير نهاية

43° (Fol. 188 v° à 191 r°.)

Traité d'Aboûl Haçan Thâbit Ben Korrah adressé à Ibn Wahab sur la

* Ce titre se trouve répété de la même manière dans la table placée à la fin du volume; mais il serait plus correct d'écrire شكل, sans article.

** Une analyse de ce traité a été publiée dans le *Journal asiatique*, cahier d'octobre-novembre 1852, p. 420 et suiv.

ذكرها فى المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس فى الاسطقسات

ترجمة ابى عثمن الدمشقى

manière de parvenir à trouver la construction des problèmes géométriques.

كتاب ابى الحسن ثابت بن قرة الى ابن وهب فى التاتى لاستخراج عمل المسائل الهندسية

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

44° (Fol. 191 v°.)

Fragment du Commentaire d'Eutocius sur la 2e proposition du second livre de la sphère et du cylindre d'Archimède, traduit par Thâbit Ben Korrah*.

كتاب اوطوقيس فى حكاية ما استخرجه القدماء من خطين بين خطين حتى يتوالى الاربعة متناسبة نقل ابى الحسن ثابت بن قرة

45° (Fol. 192 v° à 195 r°.)

Trisection de l'angle rectiligne, par Thâbit Ben Korrah Alharrânî.

قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلثة اقسام متساوية صنعة ثابت بن قرة الحرانى

46° (Fol. 195 v° à 198 r°.)

Traité d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl sur la mesure des sphères au moyen des sphères.

كتاب احمد بن محمد بن عبد الجليل فى مساحة الاكر بالاكر

47° (Fol. 198 v° à 199 r°.)

Sur la construction des deux moyennes proportionnelles par la méthode de la géométrie fixe**, par le chaïkh Aboû Djafar Mohammed Ben Alhoçaïn.

فى استخراج خطين بين خطين متوالية متناسبة من طريق الهندسة الثابتة للشيخ ابى جعفر محمد بن الحسين

48° (Fol. 199 v° à 203 v°.)

Traité de Yoûhannâ Ben Yoûçouf Ben Alharth sur les quantités rationnelles et irrationnelles.

مقالة يوحنا بن يوسف بن الحرث فى المقادير المنطقة والصم

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

* Comparer l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. XIII de la préface, 2e note.

** Comparer, relativement à cette expression, l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 120.

« Premier livre du traité de *B.los*[1], sur les quantités ration-

49° (Fol. 204 r° à 215 r°.)

Lettre du chaïkh Aboû Djafar Mohammed Ben Alhoçaïn à Abdallah Ben Alî, le calculateur, sur la démonstration d'une certaine propriété des nombres, suivie d'une lettre du même au même sur la construction des triangles rectangles en nombres rationnels.

رسالة الشيخ ابى جعفر محمد بن الحسين ايده الله الى عبد الله بن على الحاسب فى البرهان على انه الخ يتلوا رسالته اليه فى انشاء المثلثات القائمة الزوايا المنطقة الاضلاع

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

50° (Fol. 215 v° à 216 v°.)

Table des traités contenus dans ce volume.

Dans cette table, les numéros qui précèdent sont classés dans l'ordre suivant :

1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 19 (?), 20, 13, 14, 15, 17, 16, 18, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49

La table est signée de la date du 11 moharram de l'an 657, 8 janvier 1259 de notre ère.

51° (Fol. 217 r° à 219 v°.)

Diverses propositions relatives à la théorie des quantités irrationnelles.

Le volume entier se compose de deux cent vingt feuillets, dont le premier non numéroté. Le verso du folio 160 et le recto du folio 192 sont laissés en blanc. Plusieurs parties du manuscrit ont été évidemment déplacées lorsqu'il a reçu sa reliure actuelle. Les cent quatre-vingt-douze premiers feuillets du volume présentent une seule et même écriture. Ainsi que l'attestent les post-scriptum ci-dessus mentionnés, cette partie a été écrite à Chîrâz, principalement pendant les années 969 et 970 de notre ère, par le géomètre Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalil Alsidjzî, qui formait probablement ce recueil pour son propre usage. Depuis le folio 192 v° à 216 v°, on trouve une ou plutôt plusieurs écritures, différentes de celle de la première partie du volume, mais qui, cependant, en quelques endroits, ressemblent beaucoup à cette dernière écriture. Les trois derniers feuillets, 217 à 219, sont d'une écriture complétement différente. On aura remarqué que plusieurs des copies contenues dans ce volume ont été collationnées avec les manuscrits autographes des auteurs, ainsi qu'il résulte des notes finales que j'ai reproduites dans l'énumération ci-dessus. Cette circonstance ne peut qu'ajouter à la valeur du manuscrit.

M. Caussin, en citant les observations astronomiques mentionnées ci-dessus (n° 22), ajoute que ce manuscrit a été rapporté d'Égypte par M. Reiche, un de ses anciens disciples.

[1] Je marque par un point les places des voyelles brèves qui ne sont pas exprimées dans l'écriture ordinaire des manuscrits arabes.

nelles et irrationnelles qui forment le sujet du dixième livre du Traité d'Euclide sur les Éléments. Traduit par Aboû Othmân le Damascène. »

2° Même ms. fol. 31 v°.

Titre du second livre de ce commentaire :

المقالة الثانية من تفسير المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس فى الاصول

« Second livre du commentaire du dixième livre du Traité d'Euclide sur les Éléments. »

3° Même ms. fol. 42 v°, à la fin du second livre :

تمت المقالة الثانية وتم تفسير المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس نقل ابى عثمن الدمشقى

« Fin du second livre, et fin du commentaire du dixième livre du Traité d'Euclide. Traduit par Aboû Othmân le Damascène. »

4° Même ms. fol. 215 v°.

Titres du premier et du second livre répétés dans la table des ouvrages contenus dans le manuscrit :

د المقالة الاولى من كتاب بلُس فى الاعظام المنطقة والصم التى ذكرها فى المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس ة المقالة الثانية من تفسير المقالة العاشرة من كتاب اقليدس

« 4° Le premier livre du traité de *B.los* sur les quantités rationnelles et irrationnelles qui forment le sujet du dixième livre du Traité d'Euclide. 5° Le second livre du commentaire du dixième livre du Traité d'Euclide. »

5° Ms. du *Târîkh Alhoqamâ*. Suppl. arabe, n° 672, page 56 (à l'article Euclide).

رايت شرح المقالة العاشرة لرجل يونانى قديم اسمه بليس

« J'ai vu un commentaire du dixième livre par un Grec ancien nommé *B. lis.* »

Le même passage est reproduit par Casiri, t. I, p. 342, de la manière suivante :

رايت شرح المقالة العاشرة لبليس

« J'ai vu un commentaire du dixième livre par *B. lis.* »

6° Même ms. p. 76.

بنس الرومى كان عالما بعلم الرياضة خبيرا بفوايض الهندسة مقيما بالاسكندرية وزمنه بعد زمن بطليوس القلوذى ومن تصانيفه تفسير كتاب بطليوس فى تسطيح الكرة نقله ثابت الى العربى تفسير المقالة العاشرة من كتاب اقليدس مقالتان

« *B. n. s* le Roûmî[1] était versé dans la science des mathématiques, et possédait de vastes connaissances en géométrie. Il vécut à Alexandrie, et son temps est postérieur au temps de Claude Ptolémée. De ses ouvrages (nous citons) le commentaire du traité de Ptolémée sur le planisphère, traduit en arabe par Thâbit (Ben Korrah); puis, *le commentaire du dixième livre du Traité d'Euclide, en deux livres.* »

7° Ms. du *Qitâb Alfihrist.* Ancien fonds arabe, n° 4136, t. II, fol. 114 v°.

بلس الرومى وله من الكتب كتاب تفسير كتاب بطليوس فى تسطيح الكرة نقل ثابت الى العربى كتاب تفسير المقالة العاشرة من اقليدس فى مقالتين

« *B. l. s* le Roûmî. Ouvrages de cet auteur : Commentaire du traité de Ptolémée sur le planisphère, traduit en arabe par Thâbit (Ben Korrah). *Commentaire du dixième livre d'Euclide, en deux livres.* »

[1] Les auteurs arabes désignent par *Roûmî* un Grec du Bas-Empire.

En rapprochant entre elles les diverses leçons du nom en question, présentées par tous ces passages, je suis disposé à croire que ce nom était *Valens*, en grec Βάλης, ce qui, en arabe, devait se transcrire par بَلِيسْ, ou aussi seulement par بَلْسْ; car nous trouvons, dans les écrits arabes, des exemples nombreux de ce dernier mode de transcription, à commencer par le nom d'Euclide (Εὐκλείδης) même, qui n'est jamais rendu par اوقليديس, mais toujours par اوقليدس ou اقليدس. Il ne serait pas impossible que ce Valens ne fût le même que l'astrologue *Vettius Valens*, sur lequel on trouve une notice assez étendue dans la Bibliothèque grecque de Fabricius[1].

Relativement aux circonstances de la vie de notre commentateur, le passage ci-dessus extrait du manuscrit du *Târîkh Alhoqamâ* est suffisamment explicite. Les expressions de ce passage pourraient faire croire un moment qu'il se rapporte à Pappus, dont le nom aurait été rendu en arabe par بَبُّسْ, ce qui, par l'inadvertance des copistes, aurait été changé en بنس. Mais dans un passage du ms. 952. 2 suppl. arabe, où il est indubitablement question de Pappus, le nom de ce géomètre est écrit بابوس[2], ce qui suffit pour faire abandonner cette supposition, peu admissible aussi sous d'autres rapports.

Quant au commentaire même, un examen sérieux de cet ouvrage met hors de toute question qu'il est d'origine grecque. Malheureusement, les bornes de ce mémoire ne me permettent pas d'en fournir les preuves en faisant connaître le contenu de ce commentaire d'une manière plus détaillée; mais, du moins, j'en donnerai ci-dessous[3] une analyse rapide, qu'on ne parcourra peut-être pas sans intérêt.

Il est vrai que le premier livre de ce commentaire, rempli presque entièrement de spéculations métaphysiques sur les quantités irra-

[1] Édition de Harles, Hambourg, 1795, vol. IV, p. 144 et suiv.

[2] Voir l'édition ci-dessus citée de l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, préface, p. XIII.

[3] Voir §§ 19 et 20.

tionnelles, ne peut intéresser que médiocrement les géomètres; mais le second livre est d'une importance réelle pour l'histoire des mathématiques, attendu qu'il contient plusieurs beaux théorèmes, relatifs aux quantités irrationnelles, qu'on ne trouve pas dans les Éléments d'Euclide, et qu'il traite cette théorie à un point de vue plus général et plus élevé que ne le fait l'auteur des Éléments.

On remarquera, sous ce rapport, les numéros 5, 9 à 12, 14 et 15 de l'analyse du second livre de ce commentaire.

Enfin, ce qui mérite surtout de fixer l'attention des géomètres, ce sont les notices sur les travaux perdus d'Apollonius, contenues dans les passages dont on trouve ci-dessous le texte et la traduction.

Avant de passer à l'interprétation de ces passages, j'ai cru devoir faire connaître au lecteur, par un résumé succinct, le sujet et le but du dixième livre d'Euclide, seul écrit grec sur les quantités irrationnelles qu'on ait connu jusqu'à présent, et sans une intelligence approfondie duquel il est impossible de comprendre le sens et d'apprécier la portée des passages en question qui forment le sujet du présent mémoire.

DES LIGNES IRRATIONNELLES TRAITÉES PAR EUCLIDE.

§ 4.

Les lignes irrationnelles traitées par Euclide sont au nombre de treize.

Il les définit, les construit et en démontre les propriétés.

Rien, certes, n'est plus beau ni plus parfait que l'ordre et le parallélisme des hexades du dixième livre; c'est là surtout que brille de tout son éclat le génie profondément systématique de l'auteur des Éléments. Mais, pour faire saisir au lecteur d'un seul coup d'œil l'aperçu général de la théorie d'Euclide, nécessaire pour l'intelligence des conjectures suivantes sur les travaux d'Apollonius, je ne peux pas suivre la méthode purement et strictement synthétique du géomètre ancien.

D'un côté, il sera indispensable de faire ressortir surtout la raison déterminante du nombre des genres d'irrationnelles exposés. D'un autre côté, lorsque Euclide détermine des couples de lignes qui doivent servir ensuite à la construction des irrationnelles, et qui jouissent de diverses propriétés, il faudra montrer comment quelques-unes de ces propriétés découlent naturellement des autres, tandis qu'Euclide se contente d'en démontrer la coexistence. Car, généralement, deux quantités (et les lignes ne représentent ici que des quantités) sont déterminées par deux conditions auxquelles elles doivent satisfaire. Si donc elles satisfont à plus de deux conditions, l'esprit éprouve le besoin de distinguer les propriétés essentielles d'avec les autres, et de se rendre compte de la manière dont celles-ci se rattachent aux premières.

C'est pourquoi j'ai tâché de suivre une marche plus analytique dans l'exposé que l'on trouve ci-après. Je me suis efforcé en même temps d'y reproduire, dans le plus court espace possible, le contenu essentiel du dixième livre d'Euclide. D'ailleurs, je fais observer que je ne me propose pas tant de donner une analyse détaillée de ce livre, que de faire connaître quels genres et quelles espèces d'irrationnelles ont été traitées par Euclide, et quelles sont les propriétés qu'il en a connues.

Avant d'entrer en matière, il faut que j'explique encore en quelques mots l'usage qu'Euclide fait du mot *rationnel*, parce qu'il donne à ce terme une signification plus large que nous ne faisons aujourd'hui. C'est qu'il appelle rationnelles aussi les lignes dont les carrés seulement sont rationnels, et qui s'expriment, en conséquence, par des racines carrées. La ligne rationnelle d'Euclide a donc les deux formes m et $\sqrt{m}$. Au contraire, comme selon les idées des anciens on ne saurait former le carré d'un espace, la surface rationnelle est chez Euclide uniquement de la forme m, tandis que $\sqrt{m}$, comme expression d'un espace, désigne l'espace médial, qui est un espace irrationnel. Je me conformerai, dans ce qui suit, à la terminologie d'Euclide, pour ne pas trop embrouiller les énoncés des définitions que je dois donner d'après lui. Toutes les fois

que j'emploierai le mot *rationnel* dans son acception moderne, j'aurai soin d'en avertir le lecteur. Je fais observer encore que je désignerai par m, m', n, n', p, q, etc., des quantités rationnelles dans l'acception moderne de ce mot, et qui ne sont pas des carrés, à moins que cela ne soit dit expressément.

I.

§ 5.

Si deux droites commensurables en puissance seulement comprennent un rectangle rationnel, ces droites sont nécessairement médiales; si elles comprennent un rectangle médial, elles peuvent être médiales ou rationnelles[1].

Dans le premier cas, on aura

$$x^2 : y^2 = m \qquad x \cdot y = n,$$

donc

$$x = \sqrt{n\sqrt{m}} \qquad y = \sqrt{\frac{n}{\sqrt{m}}}\ ^{2}.$$

Dans le second cas, on aura

$$x^2 : y^2 = m \qquad x \cdot y = n\sqrt{n'},$$

[1] D'un autre côté, si deux droites commensurables en puissance seulement sont rationnelles, elles comprennent nécessairement un rectangle médial; si elles sont médiales, elles peuvent comprendre un rectangle rationnel ou médial.

[2] La construction d'Euclide (X, 28) est ramenée à son expression algébrique lorsqu'on pose les lignes α et β de cette construction respectivement égales à $\sqrt{p}$ et $\sqrt{n}$, où l'une des deux quantités p, n, peut être un carré, et l'on trouve

$$\gamma = \sqrt[4]{n\,p} \qquad \delta = \sqrt{n\sqrt{\frac{n}{p}}};$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = \frac{p}{n}$.

donc

$$x = \sqrt{n\sqrt{m\,n'}} \qquad y = \sqrt{n\sqrt{\frac{n'}{m}}}\ ^{1}.$$

Ces dernières formules représentent, en général, des quantités médiales; mais, dans les cas de $m = n'$, ou de $m = \frac{n^2}{n'}$, on aura

$$x = \sqrt{n\,n'} \qquad y = \sqrt{n}$$

ou

$$x = n \qquad y = \sqrt{n'},$$

formules qui présentent l'expression générale [2] de deux quantités rationnelles et commensurables en puissance.

Ceci donne lieu à trois cas :

1° Deux droites rationnelles commensurables en puissance seulement et comprenant un rectangle médial :

La moyenne géométrique entre deux lignes de cette espèce est *la médiale;*

Leur somme est *la droite de deux noms;*

Leur différence est l'*apotome.*

2° Deux droites médiales commensurables en puissance seulement et comprenant un rectangle rationnel :

La somme de deux lignes de cette espèce est *la première de deux médiales;*

[1] Ici, on posera dans la construction d'Euclide (X, 29) $\alpha = \sqrt{q}$, $\beta = \sqrt{p}$, $\gamma = \sqrt{n'}$, où l'une des trois quantités q, p, n' peut être un carré, et l'on trouve

$$\delta = \sqrt[4]{p\,q} \qquad \varepsilon = \sqrt{n'\sqrt{\frac{q}{p}}};$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = \frac{p}{n'}$ et $n = \sqrt{q}$.

[2] On peut encore poser $n' = \frac{p}{n}$; alors on aura respectivement

$$\sqrt{p} \quad \text{et} \quad \sqrt{n},$$

puis

$$n \quad \text{et} \quad \sqrt{n'}.$$

Leur différence est *le premier apotome de la médiale.*

3° Deux droites médiales commensurables en puissance seulement et comprenant un rectangle médial :

La somme de deux lignes de cette espèce est *la seconde de deux médiales;*

Leur différence est *le second apotome de la médiale.*

II.

§ 6.

Pour trouver deux droites dont la somme des carrés ainsi que le rectangle compris sous elles doivent satisfaire à certaines conditions, posons

$$x^2 + y^2 = S \qquad x \cdot y = R,$$

il suit

$$x = \sqrt{\frac{S + \sqrt{S^2 - 4R^2}}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{S - \sqrt{S^2 - 4R^2}}{2}}.$$

Maintenant, si la somme des carrés doit être rationnelle et le rectangle médial, on posera

$$S = m \qquad R = n\sqrt{n'}$$

et l'on aura

$$x = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - 4n^2 n'}}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - 4n^2 n'}}{2}}\ [1].$$

[1] Euclide (X, 34) pose $\alpha\beta = p$, $\beta\gamma = \frac{pq}{\sqrt{q^2 + r^2}}$ (voir X, 31), où $q^2 + r^2$ n'est pas un carré, et trouve ensuite

$$\alpha\zeta = \sqrt{\frac{p^2}{2}\left\{1 + \frac{r}{\sqrt{q^2 + r^2}}\right\}} \qquad \beta\zeta = \sqrt{\frac{p^2}{2}\left\{1 - \frac{r}{\sqrt{q^2 + r^2}}\right\}};$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = p^2$, $n = \frac{p^2}{4}$, $n' = \frac{q}{q^2 + r^2}$.

Si la somme des carrés doit être médiale et le rectangle rationnel, on posera

$$S = m\sqrt{m'} \qquad R = n;$$

et l'on aura

$$x = \sqrt{\frac{m\sqrt{m'} + \sqrt{m^2 m' - 4n^2}}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{m\sqrt{m'} - \sqrt{m^2 m' - 4n^2}}{2}}\ ^{1}.$$

Si la somme des carrés doit être médiale, et le rectangle médial et incommensurable avec la somme des carrés, on posera

$$S = m\sqrt{m'} \qquad R = n\sqrt{n'},$$

où $m\sqrt{m'}$ et $n\sqrt{n'}$ désignent des espaces incommensurables entre eux, et l'on aura

$$x = \sqrt{\frac{m\sqrt{m'} + \sqrt{m^2 m' - 4n^2 n'}}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{m\sqrt{m'} - \sqrt{m^2 m' - 4n^2 n'}}{2}}\ ^{2}.$$

En formant le quotient $\frac{x^2}{y^2}$, on obtient

$$\frac{S^2 - 2R^2 + S\sqrt{S^2 - 4R^2}}{2R^2},$$

[1] Euclide (X, 35) pose $\alpha\beta = \sqrt[4]{p(p-q)}$, $\beta\gamma = \frac{p-q}{\sqrt[4]{p(p-q)}}$ (voir X, 32), où l'une des deux quantités p, q, peut être un carré, et trouve ensuite

$$\alpha\delta = \sqrt{\frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})\sqrt{p-q}}{2}} \qquad \beta\delta = \sqrt{\frac{(\sqrt{p} - \sqrt{q})\sqrt{p-q}}{2}}.$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = \sqrt{p}$, $m' = p - q$, $n = \frac{p-q}{2}$

[2] Euclide (X, 36) pose $\alpha\beta = \sqrt[4]{pm'}$, $\beta\gamma = \frac{\sqrt{(p-q)m'}}{\sqrt[4]{pm'}}$ (voir X, 33), où l'une des trois quantités p, q, m', ou même m' et q simultanément, peuvent être des carrés; puis il trouve

$$\alpha\delta = \sqrt{\frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})\sqrt{m'}}{2}} \qquad \beta\delta = \sqrt{\frac{(\sqrt{p} - \sqrt{q})\sqrt{m'}}{2}};$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = \sqrt{p}$, $n = \frac{1}{2}$, $n' = m'(p-q)$.

ou, en désignant le quotient $\frac{S}{R}$ par Q,

$$\tfrac{1}{2}\left\{Q^2 - 2 + \sqrt{Q^4 - 4\,Q^2}\right\};$$

d'après les suppositions faites dans les cas considérés ci-dessus, Q sera irrationnel et Q^2 rationnel (dans l'acception moderne de ce terme), et, à moins que Q^2 ne satisfasse à l'équation indéterminée

$$(Q^2)^2 - 4\,Q^2 = Z^2,$$

le quotient $\frac{x^2}{y^2}$ sera irrationnel.

En général, x et y seront donc, dans les cas ci-dessus, deux droites incommensurables en puissance, tandis que, dans le paragraphe précédent, on considérait trois couples de droites commensurables en puissance.

De là trois autres combinaisons :

4° Deux droites incommensurables en puissance, dont la somme des carrés est rationnelle, tandis que le rectangle compris sous elles est médial :

La somme de deux lignes de cette espèce est *la majeure;*

Leur différence est *la mineure.*

5° Deux droites incommensurables en puissance, dont la somme des carrés est médiale, tandis que le rectangle compris sous elles est rationnel :

La somme de deux lignes de cette espèce est *celle qui peut une rationnelle et une médiale;*

Leur différence est *la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.*

6° Deux droites incommensurables en puissance, dont la somme des carrés est médiale, tandis que le rectangle compris sous elles est également médial, mais incommensurable avec la somme de leurs carrés :

La somme de deux lignes de cette espèce est *celle qui peut deux médiales;*

Leur différence est *la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.*

III.

§ 7.

Si l'on a deux droites x, y, commensurables en puissance seulement, de sorte que

$$x^2 : y^2 = n,$$

il s'ensuit

$$x^2 : (x^2 - y^2) = n : (n - 1);$$

c'est-à-dire que le carré de x surpassera le carré de y du carré d'une droite commensurable *en puissance* avec x; mais lorsque n est de la forme $\frac{p^2}{p^2-1}$, on voit aisément que le carré de x surpassera le carré de y du carré d'une droite commensurable *en longueur* avec x.

La droite de deux noms et l'*apotome* étant de la forme $x \pm y$, où x et y représentent deux droites rationnelles commensurables en puissance seulement, on pourra donc, en supposant toujours $x > y$, distinguer deux cas

1° $\frac{x^2}{x^2-y^2} = n^2$ ou $x : y = n : \sqrt{n^2 - 1}$;

2° $\frac{x^2}{x^2-y^2} = n$ ou $x : y = \sqrt{n} : \sqrt{n-1}$.

Puis, comme x et y sont rationnels et commensurables en puissance, et qu'on suppose $x > y$, on pourra distinguer, dans chacun de ces deux cas, trois subdivisions, selon que x et y sont respectivement de la forme

m et $\sqrt{m'}$

ou $\sqrt{m}$ et m'

ou $\sqrt{m}$ et $\sqrt{m'}$.

On obtient de cette manière :

dans le premier cas

$$1^\circ \qquad x = n \qquad y = \sqrt{n^2 - 1}$$

$$2^\circ \qquad x = \frac{m' n}{\sqrt{n^2 - 1}} \qquad y = m'$$

$$3^\circ \qquad x = \frac{n\sqrt{m'}}{\sqrt{n^2 - 1}} \qquad y = \sqrt{m'};$$

dans le second cas

$$4^\circ \qquad x = m \qquad y = \frac{m\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$5^\circ \qquad x = \frac{m'\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \qquad y = m'$$

$$6^\circ \qquad x = \sqrt{n} \qquad y = \sqrt{n-1}.$$

En combinant les x et y de ces six numéros par addition et par soustraction, on obtient respectivement *la première, seconde, troisième, quatrième, cinquième, sixième de deux noms*, et *le premier, second, troisième, quatrième, cinquième, sixième apotome*[1].

[1] *Substitutions à faire pour ramener à nos formules les constructions d'Euclide.*

1° Prop. 49. $\varepsilon\zeta = n$, $\alpha\beta = p^2$, $\gamma\beta = q^2$.
Prop. 86. $\beta\eta = n$, $\varepsilon\delta = p^2$, $\varepsilon\zeta = q^2$.

La formule d'Euclide $\qquad n \pm \sqrt{n^2 - \frac{n^2 q^2}{p^2}}$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $p = nq$.

2° Prop. 50. $\zeta\eta = m'$, $\alpha\beta = n^2$, $\beta\gamma = q^2$.
Prop. 87. $\gamma\eta = m'$, $\delta\varepsilon = n^2$, $\varepsilon\zeta = q^2$.

La formule d'Euclide $\qquad \frac{m' n}{\sqrt{n^2 - q^2}} \pm m'$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $q = 1$.

3° Prop. 51. $\alpha\beta = n^2$, $\beta\gamma = p^2$, $\delta = q$, $\varepsilon = r$.
Prop. 88. $\beta\gamma = n^2$, $\beta\delta = p^2$, $\varepsilon = q$, $\alpha = r$.

IV.

§ 8.

Après avoir terminé les constructions précédentes, Euclide démontre que les racines carrées des six droites de deux noms et des six apotomes sont respectivement les six irrationnelles formées par addition et les six irrationnelles formées par soustraction suivant l'ordre, et réciproquement que ces douze irrationnelles ont pour carrés les six droites de deux noms et les six apotomes suivant l'ordre.

Il démontre, ensuite, que toute ligne commensurable à une

La formule d'Euclide

$$r\sqrt{\frac{n^2}{q}} \pm r\sqrt{\frac{n^2-p^2}{q}} = \frac{n}{\sqrt{n^2-p^2}}\sqrt{\frac{r^2(n^2-p^2)}{q}} \pm \sqrt{\frac{r^2(n^2-p^2)}{q}}$$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $p=1$, $\frac{r^2(n^2-1)}{q}=m'$.

4° Prop. 52. $\alpha\gamma=p$, $\gamma\beta=q$, $\varepsilon\zeta=m$.
Prop. 89. $\varepsilon\zeta=p$, $\zeta\delta=q$, $\beta\eta=m$.

La formule d'Euclide $$m \pm m\sqrt{\frac{p}{p+q}}$$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $q=1$, $p+1=n$.

5° Prop. 53. $\zeta\eta=m'$, $\alpha\gamma=p$, $\gamma\beta=q$.
Prop. 90. $\gamma\eta=m'$, $\zeta\varepsilon=p$, $\zeta\delta=q$.

La formule d'Euclide $$m'\sqrt{\frac{p+q}{p}} \pm m'$$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $q=1$, $p+1=n$.

6° Prop. 54. $\alpha\gamma=p$, $\gamma\beta=q$, $\delta=s$, $\varepsilon=r$.
Prop. 91. $\gamma\delta=p$, $\beta\delta=q$, $\varepsilon=s$, $\alpha=r$.

La formule d'Euclide $$r\sqrt{\frac{p+q}{s}} \pm r\sqrt{\frac{p}{s}}$$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $r=1$, $q=1$, $s=1$, $p+1=n$.

des irrationnelles est une irrationnelle du même genre et de la même espèce que la ligne à laquelle elle est commensurable, et que les lignes irrationnelles proposées dans ce qui précède sont toutes essentiellement différentes entre elles.

Suivent encore : une autre méthode de construction de ces irrationnelles; puis quelques théorèmes énonçant diverses conséquences de la vérité mathématique que le produit de $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ en $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ est rationnel; enfin, la démonstration que la diagonale et le côté d'un carré sont incommensurables en longueur.

L'avant-dernière proposition du dixième livre mérite encore d'être particulièrement remarquée; en voici l'énoncé :

« Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent. »

Euclide prend ici la moyenne proportionnelle γ entre une médiale et une rationnelle, puis la moyenne δ entre γ et la même rationnelle, et ainsi de suite. Les irrationnelles qu'il obtient sont donc successivement de la forme $\sqrt{r\sqrt[4]{m}}$, $\sqrt{r\sqrt{r\sqrt[4]{m}}}$, $\sqrt{r\sqrt{r\sqrt{r\sqrt[4]{m}}}}$, etc. c'est-à-dire de la forme $\sqrt[8]{n}$, $\sqrt[16]{p}$, $\sqrt[32]{q}$, etc.

TEXTE DES PASSAGES DU MANUSCRIT ARABE RELATIFS AUX TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

§ 9.

I.

ان القصد فى المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس (Fol. 23 v°.)
فى الاصول هو البحث عن الاعظام المشتركة والمتبائنة والمنطقة
والصمّ وذلك ان هذا العلم ابتدأ به اولا شيعة بوثاغورس وزاد
فيه زيادة كثيرة ثاطيطس الاثينى الذى كان على حال من

الفطنة فى هذه الاشياء وغيرها من اصناف التعاليم يستحق بها التعجب منه وكان مع ذلك من اجود الناس جبلة ووقوعا على استخراج الحق الذى فى هذه العلوم كما يشهد له بذلك فلاطن فى الكتاب الذى سماه باسمه فاما تمييزها اليقينى وبراهينها التى لا يلحقها طعن فاظن ان هذا الرجل خاصة احكمها وبعده ابلونيوس الجليل الذى هو فى غاية ما يكون فى القوة فى التعاليم حرص وعنى الى ان زاد فيها فنونا عجيبة لان ثاطيطس ميّز القوى المشتركة فى الطول من المتبائنة وقسّم المشهورة جدّا من الخطوط الصم على الوسائط فجعل الخط الموسط للهندسة وذا الاسمين للعدد والمنفصل للتأليف كما اخبر واقتص اوذيمس المشّاء فاما اوقليدس فانه قصد قصد قوانين لا يلحقها طعن فوضعها لكل اشتراك وتباين ووضع حدودا وفصولا للمنطقة والصم ووضع ايضا مراتبا كثيرة للصم ثم آخر ذلك اوضح جميع التناقى الذى فيها واما ابلونيوس ففصل انواع الصم المنتظمة واستخرج علم التى تسمى غير منتظمة وولد منها جملة كثيرة جدّا بالطرق اليقينية ۞

II.

(Fol. 29 r° à 30 r°.) وبعد نظره فى الخط الموسط واستخراجه اياه أخذ فى البحث لمّا امعن عن الخطوط الصم فى التركيب والقسمة على حسب ما استعمل من البحث عن الاشتراك والتباين وذلك

ان الاشتراك والتباين قد تجدهما فى الخطوط المركبة والمنفصلة وذو الاسمين يتقدم الخطوط التى بالتركيب لانه ايضا اكثر الخطوط مجانسةً للخط المنطق وذلك انه مركب من خطين منطقين فى القوة مشتركين والمنفصل يتقدم الخطوط التى بالتفصيل وذلك ان حدوث المنفصل ايضا انما يكون بان يفصل من خط منطق خط منطق مشارك للكل فى القوة وذلك ان نستخرج الخط الموسط بان نضع ضلعا منطقا وقطرا مفروضا ونأخذ خطا متوسطا فى النسبة بين هذين الخطين وذلك ان نستخرج ذا الاسمين بان نركب الضلع والقطر وذلك ان نستخرج المنفصل بان نفصل الضلع من القطر وقد ينبغى ان تعلم ايضا انه ليس متى يركب خطان فقط منطقان فى القوة مشتركان أخذنا الذى من اسمين لكن قد يحدث ذلك ايضا ثلثة خطوط واربعة على ذلك المثال اما اولا فقد يحدث الذى من ثلثة اسماء اذا كان الخط كله اصمّ وثانيا يحدث الذى من اربعة اسماء ويمرّ ذلك بلا نهاية والبرهان على ان الذى من ثلثة خطوط منطقة فى القوة مشتركة [اصمّ] هو بعينه البرهان الذى نبرهن به على الخطين المركبين بل قد ينبغى ان نقول من الراس هكذا انه ليس انما يمكنّا ان نأخذ خطا واحدا فقط متوسطا بين خطين فى القوة مشتركين بل قد يمكنا ان نأخذ ثلثة واربعة ويمرّ ذلك الى غير نهاية اذ كان قد يمكنا ان نأخذ فيما بين كل خطين مستقيمين

مفروضين خطوطا كم شئنا على نسبة وفى التى بالتركيب ايضا فليس انما يمكنا ان نعمل خطا من اسمين فقط بل قد يمكنا ايضا ان نعمل الذى من ثلثة اسماء والذى من ثلثة موسطات الاول والثانى والذى من ثلثة خطوط مستقيمة متبائنة فى القوة يصير احدها مع كل واحد من الاثنين مجموع المربع الكائن منهما منطقا والقائم الزوايا الذى منهما موسطا حتى يصير الاعظم مركبا من ثلثة خطوط ويصير على ذلك المثال الخط الذى يقوى على منطق وموسط من ثلثة خطوط وكذلك الذى يقوى على موسطين وذلك انا ننزل ثلثة خطوط منطقة فى القوة فقط مشتركة فالخط اذًا المركب من الاثنين اصم وهو الذى من اسمين فالموضع اذًا الذى من هذا الخط ومن الخط الباقى اصم والموضع ايضا الذى من هذين الخطين مرتين اصم فمربع الخط كله المركب من الثلثة الخطوط اصم فالخط اذًا اصم ويسمى من ثلثة اسماء واذا كانت اربعة خطوط كما قلنا مشتركة فى القوة جرى الأمر فيها هذا المجرى بعينه وما يتلو ذلك فعلى هذا المثال فليكن ثلثة خطوط موسطة مشتركة فى القوة احدها مع كل واحد من الباقيين يحيطان بمنطق فالمركب الذى منهما اذًا اصم يسمى من موسطين الاول والخط الباقى موسط والموضع الذى منهما اصم فمربع الكل اذًا اصم والحال فى سائر الاخر حال واحدة فالخطوط المركبة اذًا فى جميع التى تكون بالتركيب تمرّ بلا نهاية وكذلك ليس ينبغى ان

نقتصر فى الخطوط الصم التى بالتفصيل على ان نفصلها انفصالا
واحدا فقط حتى نجد الخط المنفصل او منفصل الموسط الاول او
منفصل الموسط الثانى او الاصغر او الذى يجعل الكل موسطا مع
منطق او الذى يجعل الكل موسطا مع الموسط لكنا نفصلها بفصلين
وثلثة واربعة فانا اذا فعلنا ذلك بينا على ذلك المثال ان الخطوط
التى تبقى صم وان كل واحد منها واحد من الخطوط التى بالتفصيل
اعنى انا اذا فصلنا من خط منطق خطا منطقا مشاركا للكل فى
القوة كان لنا الخط الباقى منفصلا وان فصلنا من ذلك الخط المفصول
المنطق الذى سماه اقليدس اللفق خطا اخر منطقا مشاركا
له فى القوة كان لنا الجزء الباقى منه منفصلا كما انا ايضا ان فصلنا
من الخط المنطق المفصول من ذلك الخط خطا اخر مشاركا له فى القوة
صار الباقى منفصلا وكذلك الحال فى تفصيل سائر الخطوط فليس
يمكن اذًا الوقوف لا فى التى بالتركيب ولا فى التى بالتفصيل لكنه
يمرّ بلا نهاية اما فى تيك فبالزيادة واما فى هذه فبتنقيص الخط
المفصول وتشبّه ان يكون عدم نهاية الصم يظهر بامثال هذه
الطرق من غير ان يقف التناسب فى كثرة محدودة للوسائط
ولا ينتهى التركيب بالمركبات ولا يتحصل الانفصال عند
حدّ ما ۞

III.

(Fol. 31 v°.) الذى ينبغى ان نعلمه فى نظام الصم بايجاز هو هذا

اما اولا فان اوقليدس افادنا المنتظمة منها والمجانسة للمنطقة وذلك ان الصم منها ما هى غير منتظمة وهى من حيّز الهيولى التى يقال لها المعورة وتخرج بلا نهاية ومنها ما هى منتظمة ويحيط بها علم ونسبتها الى تيك نسبة المنطقة اليها واوقليدس انما عنى بالمنتظمة المجانسة للمنطقة التى ليس خروجها عنها خروجا كثيرا فاما ابلونيوس يعنى بغير المنتظمة التى البعد بينها وبين المنطقة بعد كثير ثم بعد ذلك ينبغى ان نعلم ان الصم وجدت على ثلث جهات اما بالتناسب واما بالتركيب واما بالتفصيل ولم توجد على جهة اخرى غير هذه الثلث جهات اصلا وذلك ان غير المنتظمة انما اخذت من المنتظمة باخذ هذه الجهات واوقليدس انما وجد خطا واحدا اصم بالتناسب وستة بالتركيب وستة بالتفصيل وعند ذلك يتم جميع عدد الصم المنتظمة ۞

IV.

(Fol. 42 v°.) وقد علمنا ايضا علما كافيا ان عدد الصم كثير بل هو بلا نهاية اعنى التى بالتركيب والتى بالتفصيل والخط الموسط نفسه كما بين اوقليدس لما حكم بانه قد يكون من الخط الموسط خطوط اخر صم بلا نهاية بحسب نوع الخطوط التى تقدّم وصفها وان كان يحدث من الخط الموسط خطوط بلا نهاية فما قولك فيما يحدث من سائر الصم الباقية على الترتيب وعلى غير الترتيب

من البيّن عند كل احد انه قد يمكنك ان تقول انه قد يحدث
من ذلك عدّة غير متناهية مرارًا [غير] متناهيـــة ۞

TRADUCTION DES PASSAGES DU MANUSCRIT ARABE RELATIFS AUX TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

I.

§ 10.

« Le but du dixième livre du traité d'Euclide sur les Éléments est l'examen des quantités commensurables et incommensurables, rationnelles et irrationnelles.

« Cette théorie prit naissance dans l'école de Pythagore. Elle fut considérablement développée par Théétète l'Athénien, qui fit preuve, dans cette partie des mathématiques, et dans d'autres, d'une sagacité qui lui a valu une juste admiration. En outre, il était un des hommes les plus heureusement doués, et s'adonnait, avec une noble ardeur, à la recherche des vérités contenues dans ces sciences, comme Platon lui en donne le témoignage dans l'ouvrage qu'il intitula d'après son nom[1]. Quant aux distinctions exactes des susdites quantités, et aux démonstrations rigoureuses des propositions auxquelles cette théorie donne lieu, je crois qu'elles furent établies principalement par ce mathématicien; et, plus tard, le grand[2] Apollonius, dont le génie atteignit au plus haut degré de supériorité dans les mathématiques, ajouta à ces découvertes d'admirables théories après bien des efforts et de travaux.

« Car Théétète avait distingué les puissances commensurables en longueur d'avec les incommensurables[3], et avait divisé les es-

[1] Voir Platon, *Théétète*, page 143, E et suiv. de l'édition d'Étienne.

[2] Comparer le passage d'Eutocius, cité page 658.

[3] C'est-à-dire qu'il avait distingué les surfaces planes suivant que les côtés des carrés auxquels elles sont égales (ou, d'après la terminologie des anciens, « suivant

pèces très-connues des lignes irrationnelles d'après les différentes médiétées, assignant la médiale à la géométrie, la droite de deux noms à l'arithmétique, et l'apotome à l'harmonie[1], comme cela est rapporté et raconté par Eudème le Péripatéticien[2].

« Quant à Euclide, il se proposa de donner des règles rigoureuses qu'il établit relativement à la commensurabilité et à l'incommensurabilité en général; il précisa les définitions et les distinctions des quantités rationnelles et irrationnelles, il exposa un

que les lignes, les longueurs qui peuvent ces surfaces ») sont commensurables ou incommensurables. — Comparer *Théétète*, p. 147, D et suiv.

[1] Dans le second livre de son commentaire (fol. 36, recto et suiv. du ms. arabe), l'auteur donne à cette découverte de Théétète des développements ultérieurs, et démontre que toutes les irrationnelles formées par addition peuvent être construites au moyen de la proportion arithmétique, et toutes les irrationnelles formées par soustraction au moyen de la proportion harmonique.

Quant à la médiale, on a vu ci-dessus (§ 5) qu'elle est la moyenne géométrique entre deux lignes rationnelles commensurables en puissance seulement.

Quant aux irrationnelles formées par addition, on sait que, si i est la moyenne arithmétique entre x et y, on a $i = \frac{x+y}{2}$. En donnant donc à x et y successivement les valeurs développées ci-dessus (§§ 5 à 7), on obtient les irrationnelles formées par addition.

Quant aux irrationnelles formées par soustraction, on sait que, si i est la moyenne harmonique entre x et y, on a $i = \frac{2\,x\,y}{x+y}$. En donnant à x et y les valeurs ci-dessus, on aura au numérateur un espace rationnel ou médial, et au dénominateur successivement les différentes irrationnelles formées par addition. Or l'auteur démontre, dans le second livre de son commentaire, un très-beau théorème, qui est la généralisation des propositions 113 à 115 du dixième livre d'Euclide, à savoir que, si un espace rationnel ou médial est compris sous deux droites, dont l'une est une des irrationnelles formées par addition, l'autre droite sera l'irrationnelle correspondante formée par soustraction (voir ci-dessous, § 20, nos 11 et 12). Il en résulte que notre ligne $i = \frac{2\,x\,y}{x+y}$ représentera successivement les irrationnelles formées par soustraction, lorsqu'on donne successivement à x et y les valeurs ci-dessus développées.

[2] Voir Proclus, *Commentaire du premier livre des Éléments d'Euclide*, édition de Bâle, 1533, p. 35, l. 7; p. 92, l. 11; p. 99, l. 28. — Le *Commentaire* d'Eutocius, p. 204 de l'édition d'Oxford des *Œuvres d'Archimède*. — Fabricii *Bibliotheca Græca*, 4e édition, Hambourg, 1793, vol. III, p. 464 et 492.

grand nombre d'ordres des quantités irrationnelles, et, en dernier lieu, il démontra clairement toute leur étendue[1].

« Enfin, Apollonius distingua les espèces des irrationnelles *ordonnées*, et découvrit la science des quantités appelées (irrationnelles) *inordonnées*, dont il produisit un très-grand nombre par des méthodes exactes. »

II.

§ 11.

« Après s'être occupé de l'examen et de la construction de la ligne médiale, et après avoir consacré (aux sujets précédemment mentionnés) une partie considérable (du dixième livre), Euclide commence la discussion des lignes irrationnelles formées par composition et par division[2], en faisant l'application de ses recherches antérieures sur la commensurabilité et l'incommensurabilité; car la commensurabilité et l'incommensurabilité existent aussi dans les lignes formées par addition et par soustraction[3].

« La droite de deux noms est la première des lignes formées par addition, parce qu'elle est la ligne qui a le plus d'affinité avec la ligne rationnelle; car elle est composée de deux lignes rationnelles commensurables en puissance. De même, l'apotome est la première des lignes formées par soustraction, parce qu'on la forme en retranchant d'une ligne rationnelle une ligne rationnelle,

[1] Par cette dernière observation, l'auteur fait allusion à la proposition 116 du dixième livre.

[2] Telle est la signification littérale des deux mots arabes employés dans le texte; je me servirai dans la suite des termes *addition* et *soustraction*, pour éviter des malentendus.

[3] En effet, on a vu ci-dessus (§§ 5 et 6) que les deux parties constitutives, x et y, de chaque irrationnelle sont commensurables ou incommensurables en puissance; en outre, les lignes irrationnelles elles-mêmes sont commensurables ou incommensurables entre elles, selon qu'elles sont de même espèce ou d'espèces différentes (voir Euclide, *Éléments*, X, propositions 67 à 71 et 104 à 108).

commensurable en puissance à la ligne entière. Car nous construisons la ligne médiale en prenant un côté rationnel et une diagonale proposée[1], et en trouvant la moyenne proportionnelle entre ces deux lignes; nous construisons la droite de deux noms en ajoutant le côté à la diagonale, et nous construisons l'apotome en retranchant le côté de la diagonale.

« Il faut aussi qu'on sache que, non-seulement lorsqu'on joint ensemble deux lignes rationnelles et commensurables en puissance, on obtient la droite de deux noms, mais que trois ou quatre lignes produisent d'une manière analogue la même chose. Dans le premier cas, on obtient la droite de trois noms, puisque la ligne entière est irrationnelle; et, dans le second cas, on obtient la droite de quatre noms, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. La démonstration [de l'irrationnalité] de la ligne composée de trois lignes rationnelles et commensurables en puissance est exactement la même que la démonstration relative à la combinaison de deux lignes[2].

« Mais il faut recommencer encore et dire que nous pouvons, non-seulement prendre une seule ligne moyenne entre deux lignes commensurables en puissance, mais que nous pouvons en prendre trois ou quatre, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, puisque nous

[1] C'est-à-dire, en construisant un carré sur une diagonale qui est la ligne proposée comme rationnelle (voir Euclide, *Éléments*, X, déf. 5), carré dont le côté sera rationnel, mais commensurable en puissance seulement avec la diagonale (voir *ibid.* prop. 117). De cette façon, on obtient deux droites rationnelles commensurables en puissance seulement, c'est-à-dire les deux éléments nécessaires à la construction de la médiale, de la droite de deux noms, et de l'apotome (voir ci-dessus, § 5).

Je fais observer que le mot arabe qui a été traduit par diagonale, signifie aussi diamètre. Or, soit AB la droite proposée comme rationnelle, et prenons sur AB la partie AC rationnelle et commensurable en puissance seulement à AB. Si l'on décrit sur AB comme diamètre un demi-cercle, et si l'on élève au point C une perpendiculaire à AB qui coupe le demi-cercle en D, $AD=\sqrt{AB.AC}$ sera la médiale, $AB+AC$ la droite de deux noms, et $BC=AB-AC$ l'apotome. Ce serait là une autre manière d'interpréter les expressions un peu vagues du texte.

[2] Voir Euclide, *Éléments*, X, proposition 37, et ci-dessous, p. 698 et 699.

pouvons prendre entre deux lignes droites données quelconques autant de lignes que nous voulons, en proportion continue[1].

« Et[2], de même, dans les lignes formées par addition, nous pouvons, non-seulement construire la droite de deux noms, mais nous pouvons aussi construire celle de trois noms[3], ainsi que la première[4]

[1] Si, entre deux lignes données, k et k', on prend m moyennes proportionnelles, de sorte que :

$$k : l_1 = l_1 : l_2 = l_2 : l_3 = \ldots\ldots = l_{m-1} : l_m = l_m : k',$$

on trouve facilement qu'on a

$$1^\circ \qquad l_n^{n+1} = l_{n+1}^{n} \cdot k,$$

et

$$2^\circ \qquad l_n^{m-n} k' = l_{n+1}^{m-n+1};$$

puis, en éliminant l_{n+1} entre ces deux équations, on trouve

$$l_n^{m+1} = k^{m+1-n} \cdot k'^{n}$$

ou

$$l_n = \sqrt[m+1]{k^{m+1-n} \cdot k'^{n}}.$$

Lorsque k et k' sont deux lignes rationnelles commensurables en puissance seulement, l_n sera de la forme $\sqrt[2(m+1)]{a^{n+1-n} \cdot b^n}$. — Relativement à la manière dont les anciens trouvaient un nombre donné de moyennes proportionnelles entre deux droites données, voyez Archimède, édition d'Oxford, p. 144 et suiv.

[2] Comme le passage qui commence ici doit servir de base à une partie des conjectures que j'aurai à faire par la suite sur la nature des quantités irrationnelles traitées par Apollonius, et que, par conséquent, il m'importe de le faire connaître au lecteur aussi exactement que possible, j'en fais suivre ici une traduction latine littérale :

« Ac similiter in iis quæ fiunt per compositionem, non solum licet nobis efficere « lineam ex binis tantum nominibus, sed etiam licet nobis efficere eam quæ est ex « ternis nominibus, et eam quæ est ex ternis mediis, primam et secundam, et eam « quæ est ex ternis lineis rectis incommensurabilibus potentia, quarum una efficit « cum unaquaque duarum (reliquarum) summam quadrati productam ex ambabus « rationalem et rectangulum quod fit ex ambabus medium, ita ut evadat major « composita ex ternis lineis. Et simili ratione evadit linea quæ potest rationale ac « medium (composita) ex ternis lineis, et eodem modo ea quæ potest bina media. »

[3] Voir ci-dessous, p. 698 et 699.

[4] Voir ci-dessous, p. 699 et 700.

et la seconde[1] de trois médiales; puis, la ligne composée de trois droites incommensurables en puissance et telles que l'une d'elles donne avec chacune des deux autres une somme des carrés rationnelle, tandis que le rectangle compris sous les deux lignes est médial, de sorte qu'il en résulte une majeure composée de trois lignes[2].

$$x = \sqrt[4]{a\,c} \qquad y = \sqrt[4]{\frac{c}{a}} \qquad z = \sqrt[4]{\frac{c}{a\,b^2}}$$

$$x^2 : y^2 = a \qquad x^2 : z^2 = ab \qquad y^2 : z^2 = b$$

$$xy = \sqrt{c} \qquad xz = \sqrt{\frac{c}{b}} \qquad yz = \sqrt{\frac{c}{ab}}$$

$$(x+y+z)^2 = \sqrt{ac} + \sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{ab^2}} + 2\left\{\sqrt{c} + \sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\right\}.$$

$$x^2 + y^2 = a \qquad x^2 + z^2 = b \qquad yz = \sqrt{c}$$

$$x = \sqrt{\frac{a+b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}} \qquad y = \sqrt{\frac{a-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}}$$

$$z = \sqrt{\frac{b-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}$$

$$xy = \sqrt{(a-b)\,\frac{b}{2} - c \pm b\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}}$$

$$xz = \sqrt{(b-a)\,\frac{a}{2} - c \pm a\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}}$$

$$yz = \sqrt{c}.$$

Ou bien

$$x^2 + y^2 = a \qquad x^2 + z^2 = b \qquad xy = \sqrt{c}$$

Et, d'une manière analogue, on obtient la droite qui peut une

$$x=\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}} \qquad y=\sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}} \qquad z=\sqrt{b-\left\{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}\right\}}$$

$$x^2+y^2+z^2=b+\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}$$

$$xy=\sqrt{c}$$

$$xz=\sqrt{(b-a)\frac{a}{2}+c+(b-a)\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}}$$

$$yz=\sqrt{\frac{ab}{2}-c-b\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}}$$

On obtient des formules tout à fait analogues à ces dernières, en remplaçant $xy=\sqrt{c}$ par $xz=\sqrt{c}$.

Si l'on voulait interpréter le texte de façon à y voir énoncé les équations suivantes :

$$1^\circ \quad x^2+y^2=a \qquad 2^\circ \quad x^2+z^2=b$$

$$3^\circ \quad xy=\sqrt{c} \qquad 4^\circ \quad xz=\sqrt{d}$$

ces conditions seraient incompatibles ; car, de 1°, 2° et 3°, il suit, comme on vient de le voir, $xz=\sqrt{(b-a)\frac{a}{2}+c+(b-a)\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}}$, ce qui n'est pas un espace médial. On pourrait aussi tirer de 3° et 4°

$$x^2(y^2-z^2)=c-d \qquad \text{ou} \qquad y^2-z^2=\frac{c-d}{x^2};$$

et l'on aurait en même temps

$$x^2+y^2=a;$$

donc

$$x^2+z^2=a-\frac{c-d}{x^2}=a-\frac{c-d}{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}},$$

ce qui n'est pas un espace rationnel.

rationnelle et une médiale, composée de trois droites[1], et de même celle qui peut deux médiales[2].

« Car, supposons trois lignes rationnelles commensurables en puissance seulement. La ligne composée de deux de ces lignes, à savoir la droite de deux noms, est irrationnelle, et, en conséquence, l'espace compris sous cette ligne et sous la ligne restante est irrationnel, et, de même, le double de l'espace compris sous ces deux lignes sera irrationnel. Donc, le carré de la ligne entière,

Si l'on déduit les expressions pour x, y, z des trois conditions

$$x^2+y^2=a \qquad xy=\sqrt{b} \qquad xz=\sqrt{c},$$

on aura

$$x+y+z=\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{\frac{2b}{a\pm\sqrt{a^2-4b}}}+\sqrt{\frac{2c}{a\pm\sqrt{a^2-4b}}}$$

et $$(x+y+z)^2=a+2\left\{\sqrt{b}+\sqrt{c}\right\}+\frac{2}{a\pm\sqrt{a^2-4b}}\left\{2\sqrt{bc}+c\right\}.$$

Cette combinaison produit une ligne composée $x+y+z$ dont le carré ne contient plus des racines de racines, tandis que les combinaisons précédentes ont l'inconvénient de conduire à des lignes dont le carré contient encore des racines d'expressions irrationnelles. C'est pourquoi je ne suis pas éloigné de croire que la combinaison $x^2+y^2=a$, $xy=\sqrt{b}$, $xz=\sqrt{c}$ est réellement celle qui avait été adoptée par Apollonius, dans sa généralisation des théories d'Euclide. Il est vrai que notre texte s'oppose à cette supposition, parce qu'il parle expressément de « la somme des carrés de l'une de ces lignes avec chacune des deux autres; » mais, dans ce qui suit, j'aurai l'occasion de faire remarquer que l'auteur ne paraît pas avoir toujours mis un très-grand soin à reproduire avec une exactitude rigoureuse les énoncés des généralisations dont il donne ici une indication rapide. (Voir la deuxième note de la page 699 et § 17.)

[1] $$x^2+y^2=\sqrt{a} \qquad x^2+z^2=\sqrt{b} \qquad xy=c$$

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{\frac{a}{4}-c^2}} \quad y=\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2}-\sqrt{\frac{a}{4}-c^2}} \quad z=\sqrt{\sqrt{b}-\left\{\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{\frac{a}{4}-c^2}\right\}}.$$

[2] $$x^2+y^2=\sqrt{a} \qquad x^2+z^2=\sqrt{b} \qquad xy=\sqrt{c}$$

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{\frac{a}{4}-c}} \quad y=\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2}-\sqrt{\frac{a}{4}-c}} \quad z=\sqrt{\sqrt{b}-\left\{\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{\frac{a}{4}-c}\right\}}.$$

composée de trois lignes, est irrationnel, et, conséquemment, la ligne est irrationnelle, et on l'appelle droite de trois noms[1].

« Et, si l'on a quatre lignes commensurables en puissance, comme nous l'avons dit, le procédé sera exactement le même; et on traitera les lignes suivantes d'une manière analogue.

« Qu'on ait ensuite trois lignes médiales commensurables en puissance, et dont l'une comprenne avec chacune des deux autres un rectangle rationnel[2]; alors la droite composée des deux lignes est irrationnelle et s'appelle la première de deux médiales; la ligne restante est médiale, et l'espace compris sous ces deux lignes est

[1] $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+2\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\}\sqrt{c}+c$, où l'une des trois quantités a, b, c peut être un carré. — Cette démonstration n'est pas tout à fait rigoureuse. Quant au terme $2\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\}\sqrt{c}$, il est égal à la somme des deux espaces médiaux $\sqrt{4ac}+\sqrt{4bc}$, et, par une démonstration analogue à celle de la 27ᵉ proposition du Xᵉ livre d'Euclide, on prouvera que la somme de deux espaces médiaux est irrationnelle. D'un autre côté, on a démontré (X, 37) que le carré $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ est irrationnel. Mais il n'est pas généralement vrai que la somme de deux espaces irrationnels soit irrationnelle. Il reste donc à démontrer que la somme formée des deux espaces irrationnels $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ et $2\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\}\sqrt{c}$ et de l'espace rationnel c, est irrationnelle.

[2] Ces deux conditions sont incompatibles; car, supposons trois lignes, x, y, z, dont l'une, x, comprenne avec chacune des deux autres un rectangle rationnel; on aura $xy=m$, $xz=n$; donc $y:z=m:n$; c'est-à-dire, y et z ne seront plus commensurables en *puissance* seulement, mais aussi en *longueur*. Il faut donc rectifier l'énoncé du texte de la manière suivante : « Qu'on ait trois lignes médiales, dont l'une soit commensurable avec les deux autres en puissance seulement, et dont la même comprenne avec chacune des deux autres un rectangle rationnel, etc. » On aura alors :

$$x:y=\sqrt{a} \qquad x:z=x:(py)=\frac{\sqrt{a}}{p}$$

$$xy=b \qquad xz=x.(py)=pb$$

donc

$$x=\sqrt{b\sqrt{a}} \qquad y=\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}} \qquad z=p\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}$$

et

$$(x+y+z)^2=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2.$$

Des trois termes de cette dernière somme, le premier est irrationnel (X, 38); le second se compose de l'espace $2xz$ qui est rationnel, et de l'espace $2yz$ qui

irrationnel. Conséquemment, le carré de la ligne entière est irrationnel. Le reste des autres lignes se trouve dans les mêmes circonstances. Les lignes composées s'étendent donc jusqu'à l'infini dans toutes les espèces formées au moyen de l'addition.

« De même, il n'est pas nécessaire que, dans les lignes irrationnelles formées au moyen de la soustraction, nous nous bornions à n'y faire qu'une seule soustraction, de manière à obtenir l'apotome, ou le premier apotome de la médiale, ou le second apotome de la médiale, ou la mineure, ou la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, ou celle qui fait avec une surface médiale un tout médial; mais nous pourrons y effectuer deux ou trois ou quatre soustractions.

« Lorsque nous faisons cela, nous démontrons, d'une manière analogue à ce qui précède, que les lignes restantes sont irrationnelles, et que chacune d'elles est une des lignes formées par soustraction. C'est-à-dire que, si d'une ligne rationnelle nous retranchons une autre ligne rationnelle commensurable à la ligne entière en puissance, nous obtenons pour ligne restante un apotome; et si nous retranchons de cette ligne retranchée et rationnelle, qu'Euclide appelle la *congruente* (προσαρμόζουσα), une autre ligne rationnelle qui lui est commensurable en puissance, nous obtenons, comme partie restante, un apotome; de même que, si nous retranchons de la ligne rationnelle et retranchée de cette ligne une autre ligne qui lui est commensurable en puissance, le reste est un apotome [1]. Il en est de même pour la soustraction des autres lignes.

est irrationnel; le troisième est le carré d'une ligne médiale, et, par conséquent, irrationnel. On obtient en définitive

$$x+y+z=\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}\left\{a+(p+1)^2\right\}+2b(p+1)}.$$

[1] C'est-à-dire que si l'on forme successivement les différences $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, $\sqrt{c}-\sqrt{d}$, etc., toutes ces expressions représenteront des apotomes. On se serait attendu, sans doute, à voir l'auteur former et discuter les expressions suivantes: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})-\sqrt{c}$, $\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})-\sqrt{c}\}-\sqrt{d}$, etc.

« Il est donc alors impossible de s'arrêter, soit dans les lignes formées par addition, soit dans celles formées par soustraction; mais on procède à l'infini, dans celles-là, en ajoutant, et dans celles-ci, en ôtant la ligne retranchée. Et, naturellement, l'infinité des quantités irrationnelles se manifeste par des procédés tels que les précédents, vu que la proportion continue ne s'arrête pas à un nombre déterminé pour les médiales, que l'addition n'a pas de fin pour les lignes formées par addition, et que la soustraction n'arrive pas non plus à un terme quelconque. »

III.

§ 12.

« Voici maintenant, en peu de mots, ce qu'il faut qu'on sache au sujet de l'*ordre* des irrationnelles.

« En premier lieu, Euclide nous a donné (la théorie de) celles d'entre elles qui sont *ordonnées* et homogènes aux rationnelles; car les irrationnelles se divisent premièrement en *inordonnées*, c'est-à-dire celles qui tiennent de la matière qu'on appelle corruptible, et qui s'étendent à l'infini; et, secondement, en *ordonnées*, qui forment le sujet limité d'une science, et qui sont aux *inordonnées* comme les rationnelles sont aux irrationnelles *ordonnées*. Or Euclide s'occupa seulement des *ordonnées* qui sont homogènes aux rationnelles, et qui ne s'en éloignent pas considérablement; ensuite Apollonius s'occupa des *inordonnées*, entre lesquelles et les rationnelles la distance est très-grande.

« En second lieu, il faut qu'on sache que les irrationnelles sont produites de trois manières : au moyen de la proportionnalité, au moyen de la composition (addition), ou au moyen de la division (soustraction), et pas d'une autre manière du tout, hormis ces trois manières; car les *inordonnées* ne sont dérivées des *ordonnées* qu'au moyen de ces méthodes. Or Euclide n'a trouvé qu'une seule ligne irrationnelle au moyen de la proportionnalité, six au moyen de la composition, et six au moyen de la division; et à ceci se borne le nombre entier des irrationnelles *ordonnées*. »

IV.

§ 13.

« Nous avons aussi acquis une connaissance suffisante de ce que le nombre des irrationnelles est grand, ou plutôt infini; c'est-à-dire le nombre des irrationnelles formées par addition et par soustraction, et de la ligne médiale elle-même, ainsi que le démontra Euclide, attendu qu'il énonça que de la ligne médiale il résulte d'autres lignes irrationnelles infinies en nombre par rapport à l'espèce des lignes précédemment décrites[1]; mais, si de la ligne médiale on déduit une infinité de lignes, que dira-t-on au sujet de celles qu'on déduit des autres lignes irrationnelles suivant l'ordre ou en négligeant l'ordre? Il est évident pour chacun qu'on peut dire qu'il en résulte un nombre de lignes infiniment de fois infini. »

ESSAI D'UNE RESTITUTION CONJECTURALE DES TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

I.

§ 14.

Avant d'esquisser l'essai d'une restitution conjecturale des développements donnés par Apollonius à la théorie des quantités irrationnelles, développements qui doivent avoir consisté essentiellement dans une généralisation de la théorie d'Euclide, il sera nécessaire de jeter encore un coup d'œil sur les traits généraux et sur les points essentiels des constructions de ce dernier géomètre.

[1] C'est-à-dire, il en résulte une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est de la même espèce qu'aucune de celles qui la précèdent. (*Éléments*, X, 116.) — Toutes ces lignes ont la forme de la médiale, ce sont des médiales d'ordres supérieurs. Notre auteur peut donc dire avec raison que le nombre des médiales est infini, aussi bien que celui des irrationnelles formées par addition et par soustraction.

Comme d'un côté les noms donnés par Euclide aux différentes espèces d'irrationnelles sont en partie d'une longueur gênante, et que, d'un autre côté, les remarques que j'aurai à faire porteront toujours à la fois sur l'espèce formée par addition et sur l'espèce correspondante formée par soustraction, je désignerai, dans la suite, les irrationnelles construites dans les propositions 37 et 74, 38 et 75, 39 et 76, 40 et 77, 41 et 78, 42 et 79 du X^e^ livre, respectivement comme la 1^re^, 2^e^, 3^e^, 4^e^, 5^e^, 6^e^ irrationnelle d'Euclide.

Pour toutes ces lignes, le but constant des démonstrations d'Euclide est de prouver que chacune d'elles peut un espace qui n'est ni rationnel, ni médial. Or l'espace que peut la ligne $x \pm y$, c'est l'expression

$$x^2 + y^2 \pm 2xy = S \pm 2R,$$

si nous désignons par S la somme des carrés des deux éléments de la ligne, et par R le rectangle compris sous eux;
donc

$$x \pm y = \sqrt{S \pm 2R}.$$

Euclide ne définit d'une manière positive que deux genres d'espaces, l'espace rationnel et l'espace médial. Ces deux genres d'espaces donnent lieu à quatre combinaisons pour la nature de la somme $S \pm 2R$:

1° S rationnel et R rationnel;
2° S rationnel et R médial;
3° S médial et R rationnel;
4° S médial et R médial.

La première combinaison doit être rejetée, parce qu'elle rendrait la somme $S \pm 2R$ rationnelle; et la quatrième doit être assujettie à la condition que S et R soient incommensurables, parce que sans cela la somme $S \pm 2R$ serait médiale.

On exclut les cas inadmissibles par une seule condition générale, en demandant que S et R soient incommensurables entre eux.

De cette manière, on aura

$$1^\circ \qquad x^2 + y^2 = a \qquad xy = \sqrt{b}$$

$$x \pm y = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}};$$

ce qui est la 4^e irrationnelle d'Euclide.

$$2^\circ \qquad x^2 + y^2 = \sqrt{a} \qquad xy = b$$

$$x \pm y = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a - 4b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a - 4b^2}}{2}};$$

ce qui est la 5^e irrationnelle d'Euclide.

$$3^\circ \qquad x^2 + y^2 = \sqrt{a} \qquad xy = \sqrt{b}$$

$$x \pm y = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a - 4b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a - 4b}}{2}};$$

ce qui est la 6^e irrationnelle d'Euclide.

Les combinaisons possibles sous les circonstances données étant ainsi épuisées, on se demande naturellement d'où viennent maintenant les trois premières irrationnelles d'Euclide.

Or celles-ci ne sont, en effet, que des cas particuliers des trois dernières, spécifiés par la condition que les deux éléments x et y doivent être commensurables en puissance, ce qui est compatible avec la condition que les espaces S et R soient incommensurables; car de

$$x^2 : y^2 = m : n,$$

on tire

$$(x^2 + y^2) : xy = (m + n) : \sqrt{mn}\,[1].$$

[1] Naturellement, l'inverse n'a pas lieu. De $(x^2 + y^2) : xy = \sqrt{m}$ on tire $x^2 : y^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{m \cdot y^4}$. Dans les trois cas généraux $(x^2 + y^2)^2$ sera une quantité rationnelle, mais y^4 sera irrationnel (dans l'acception moderne de ce terme). Au contraire, dans les trois cas particuliers où y est une droite rationnelle ou médiale (§ 5), y^4 est effectivement rationnel (dans l'acception moderne de ce terme).

Aussi nous avions remarqué ci-dessus (§ 6) que la commensurabilité en puissance des éléments x et y est cette exception à leur incommensurabilité, qui a lieu dans le cas particulier où l'expression $Q^4 - 4\,Q^2$ est le carré d'une quantité rationnelle. Or, Q n'étant autre chose que le quotient $\frac{x^2+y^2}{xy}$, de $\frac{x^2}{y^2} = \frac{m}{n}$, il suit effectivement $Q^4 - 4\,Q^2 = \left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)^2$.

Nous n'avons donc qu'à faire $(x^2+y^2) : xy = (m+n) : \sqrt{mn}$, pour dériver des trois dernières irrationnelles d'Euclide les trois premières suivant l'ordre.

Pour cela, nous posons,

1° $\qquad a = m+n \qquad b = mn;$

ces valeurs, substituées dans l'expression de la 4e irrationnelle, donnent

$$x \pm y = \sqrt{m} \pm \sqrt{n};$$

ce qui est la 1re irrationnelle d'Euclide.

2° $\qquad a = (m+n)^2\,mn \qquad b = mn;$

ces valeurs, substituées dans l'expression de la 5e irrationnelle, donnent

$$x \pm y = \sqrt{m\sqrt{mn}} \pm \sqrt{n\sqrt{mn}};$$

ce qui est la 2e irrationnelle d'Euclide.

3° $\qquad a = m+n \qquad b = \frac{mn}{m+n};$

ces valeurs, substituées dans l'expression de la 6e irrationnelle, donnent

$$x \pm y = \sqrt{\frac{m}{\sqrt{m+n}}} \pm \sqrt{\frac{n}{\sqrt{m+n}}};$$

ce qui est la 3e irrationnelle d'Euclide.

II.

§ 15.

Voici maintenant les définitions et la discussion des irrationnelles généralisées que je suppose avoir formé le sujet des travaux d'Apollonius.

1° *La somme de n droites rationnelles commensurables en puissance seulement, et comprenant deux à deux un rectangle médial :*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$a+b+c+d+\ldots\ldots+$$
$$+2\{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\ldots+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\ldots+\sqrt{cd}+\ldots\}$$

2° *La somme de n droites médiales, dont l'une est commensurable avec toutes les autres en puissance seulement, et dont la même comprend avec chacune des autres un rectangle rationnel :*

$$\sqrt{a\sqrt{m}}+\sqrt{\frac{ab^2}{\sqrt{m}}}+\sqrt{\frac{ac^2}{\sqrt{m}}}+\sqrt{\frac{ad^2}{\sqrt{m}}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$\frac{a}{\sqrt{m}}\{m+(b+c+d+\ldots\ldots)^2\}+2a(b+c+d+\ldots\ldots).$$

3° *La somme de n droites médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant deux à deux un rectangle médial :*

$$\sqrt{a\sqrt{m}}+\sqrt{b\sqrt{m}}+\sqrt{c\sqrt{m}}+\sqrt{d\sqrt{m}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$\{a+b+c+d+\ldots\ldots+$$
$$+2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\ldots+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\ldots+\sqrt{cd}+\ldots)\}\sqrt{m}.$$

On voit que cette ligne n'est autre chose que la première irrationnelle généralisée multipliée par $\sqrt[4]{m}$, en sorte que la première est ce cas particulier de la troisième qui a lieu lorsque m est le carré ou le carré du carré d'une quantité rationnelle. C'est ce que nous avions déjà remarqué ci-dessus (§ 5), car on a

$$\sqrt{n\sqrt{mn'}} \pm \sqrt{n\sqrt{\frac{n'}{m}}} = \left(\sqrt{n} \pm \sqrt{\frac{n}{m}}\right)\sqrt[4]{mn'},$$

et, dans le cas de $m = n'$, ou de $m = \frac{n^2}{n'}$, mn' sera le carré d'une quantité rationnelle.

4° *La somme de n droites dont l'une est incommensurable avec toutes les autres, et dont la même donne, avec une des autres, une somme des carrés rationnelle, et comprend avec chacune des autres un rectangle médial :*

$$\alpha^2 + \beta^2 = a,\ \alpha\beta = \sqrt{b},\ \alpha\gamma = \sqrt{c},\ \alpha\delta = \sqrt{d},\ \ldots.$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = $$

$$= \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} + \sqrt{\frac{2b}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}} + \sqrt{\frac{2c}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2d}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}} + \ldots.$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$a + 2\left\{\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots\right\} +$$

$$+ \frac{2}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}\left\{2\sqrt{b}\left(\sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots\right) + \left(\sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots\right)^2\right\}.$$

5° *La somme de n droites dont l'une est incommensurable avec toutes les autres, et dont la même donne, avec une des autres, une somme des*

carrés médiale, et comprend avec chacune des autres un rectangle rationnel :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a},\ \alpha\beta = b,\ \alpha\gamma = c,\ \alpha\delta = d,\ \ldots\ldots$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{2b^2}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b^2}}} + \sqrt{\frac{2c^2}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b^2}}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2d^2}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b^2}}} + \ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$2\{b + c + d + \ldots\} + \sqrt{a} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b^2}}\{2b(c + d + \ldots\ldots) + (c + d + \ldots\ldots)^2\}.$$

6° *La somme de n droites dont l'une est incommensurable avec toutes les autres, et dont la même donne, avec une des autres, une somme des carrés médiale, et comprend avec chacune des autres un rectangle médial :*

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a},\ \alpha\beta = \sqrt{b},\ \alpha\gamma = \sqrt{c},\ \alpha\delta = \sqrt{d},\ \ldots\ldots$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b}}{2}} + \sqrt{\frac{2b}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b}}} + \sqrt{\frac{2c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b}}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2d}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b}}} + \ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne est de la forme

$$\sqrt{a} + 2\{\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots\ldots\} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - 4b}}\{2\sqrt{b}(\sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots) + (\sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots)^2\}.$$

Comme ci-dessus, les trois premières irrationnelles sont des cas particuliers des trois dernières, ce qu'on démontre au moyen des mêmes substitutions.

Lorsque dans 4° on a

$$a = m + n \qquad b = mn,$$

on obtiendra

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sqrt{m} + \sqrt{\frac{b}{m}} + \sqrt{\frac{c}{m}} + \sqrt{\frac{d}{m}} + \ldots\ldots$$

Lorsque dans 5° on a

$$a = (m+n)^2\, mn \qquad b = mn,$$

on obtiendra

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots = \sqrt{m\sqrt{mn}} + \sqrt{\frac{b^2}{m\sqrt{mn}}} + \sqrt{\frac{c^2}{m\sqrt{mn}}} + \\ + \sqrt{\frac{d^2}{m\sqrt{mn}}} + \ldots\ldots$$

Lorsque dans 6° on a

$$a = m + n \qquad b = \frac{mn}{m+n},$$

on obtiendra

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots = \sqrt{\frac{m}{\sqrt{m+n}}} + \sqrt{\frac{b}{m}\sqrt{m+n}} + \\ + \sqrt{\frac{c}{m}\sqrt{m+n}} + \sqrt{\frac{d}{m}\sqrt{m+n}} + \ldots\ldots = \\ = \left\{\sqrt{\frac{m}{m+n}} + \sqrt{\frac{b}{m}} + \sqrt{\frac{c}{m}} + \sqrt{\frac{d}{m}} + \ldots\ldots\right\} \sqrt[4]{m+n}.$$

§ 16.

Je vais maintenant faire suivre encore une autre conjecture sur les formes de la 4e, 5e et 6e irrationnelle généralisées, mais qui, cependant, me paraît moins probable.

4° *La somme de n droites incommensurables, dont l'une comprend, avec une des autres, un rectangle médial, et donne avec chacune des autres une somme des carrés rationnelle.*

$$\alpha^2+\beta^2=a,\ \alpha\beta=\sqrt{b},\ \alpha^2+\gamma^2=c,\ \alpha^2+\delta^2=d,\ \ldots\ldots$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{a-\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{c-\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+$$

$$+\sqrt{d-\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante:

$$a+c+d+\ldots\ldots-(n-2)\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}+2\sqrt{b}+$$

$$+2\left\{\sqrt{c\varphi-\varphi^2}+\sqrt{d\varphi-\varphi^2}+\ldots\ldots\right.$$

$$+\sqrt{ac-(a+c)\varphi+\varphi^2}+\sqrt{ad-(a+d)\varphi+\varphi^2}+\ldots$$

$$\left.+\sqrt{cd-(c+d)\varphi+\varphi^2}+\ldots\ldots\qquad+\ldots\ldots\right\},$$

où $\varphi=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$ et $\varphi^2=\left(\frac{a^2}{2}-b\right)\pm a\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$.

5° *La somme de n droites incommensurables, dont l'une comprend, avec une des autres, un rectangle rationnel, et donne avec chacune des autres une somme des carrés médiale.*

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{a},\ \alpha\beta=b,\ \alpha^2+\gamma^2=\sqrt{c},\ \alpha^2+\delta^2=\sqrt{d},\ \ldots\ldots$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}}+\sqrt{\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}}+$$

$$+\sqrt{\sqrt{c}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}}+\sqrt{\sqrt{d}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$\sqrt{a}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\ldots\ldots-(n-2)\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}+2b+$$
$$+2\left\{\sqrt{\sqrt{c}\,\chi-\chi^2}+\sqrt{\sqrt{d}\,\chi-\chi^2}+\ldots\ldots\right.$$
$$+\sqrt{\sqrt{ac}-(\sqrt{a}+\sqrt{c})\,\chi+\chi^2}+\sqrt{\sqrt{ad}-(\sqrt{a}+\sqrt{d})\,\chi+\chi^2}+\ldots$$
$$\left.+\sqrt{\sqrt{cd}-(\sqrt{c}+\sqrt{d})\,\chi+\chi^2}+\ldots\ldots\qquad+\ldots\ldots\right\},$$

où $\chi=\frac{\sqrt{a}}{2}\pm\sqrt{\frac{a}{4}-b^2}$ et $\chi^2=\left(\frac{a}{2}-b^2\right)\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-ab^2}$.

6° *La somme de n droites incommensurables, dont l'une comprend, avec une des autres, un rectangle médial, et donne avec chacune des autres une somme des carrés médiale.*

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{a},\ \alpha\beta=\sqrt{b},\ \alpha^2+\gamma^2=\sqrt{c},\ \alpha^2+\delta^2=\sqrt{d},\ \ldots$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=$$
$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}}+\sqrt{\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}}+$$
$$+\sqrt{\sqrt{c}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}}+\sqrt{\sqrt{d}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$\sqrt{a}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\ldots\ldots-(n-2)\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}+2\sqrt{b}+$$
$$+2\left\{\sqrt{\sqrt{c}\,\psi-\psi^2}+\sqrt{\sqrt{d}\,\psi-\psi^2}+\ldots\ldots\right.$$
$$+\sqrt{\sqrt{ac}-(\sqrt{a}+\sqrt{c})\,\psi+\psi^2}+\sqrt{\sqrt{ad}-(\sqrt{a}+\sqrt{d})\,\psi+\psi^2}+\ldots$$
$$\left.+\sqrt{\sqrt{cd}-(\sqrt{c}+\sqrt{d})\,\psi+\psi^2}+\ldots\ldots+\ldots\ldots\right\},$$

où $\psi=\frac{\sqrt{a}}{2}\pm\sqrt{\frac{a}{4}-b}$ et $\psi^2=\left(\frac{a}{2}-b\right)\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-ab}$.

Voici, enfin, une troisième combinaison que je considérerais comme la plus probable de toutes, si elle s'accordait parfaitement avec la lettre du passage ci-dessus (p. 695 et 696) relatif à la majeure composée de trois éléments. On demandera qu'il soit

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \ldots\ldots = A,$$
$$\alpha\beta = B,\ \alpha\gamma = C,\ \alpha\delta = D,\ \ldots\ldots$$

et, si l'on pose

$$B^2 + C^2 + D^2 + \ldots\ldots = \sigma,$$

on aura

$$\alpha = \sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4\sigma}}{2}},\ \beta = \sqrt{\frac{2B^2}{A \pm \sqrt{A^2 - 4\sigma}}},\ \gamma = \sqrt{\frac{2C^2}{A \pm \sqrt{A^2 - 4\sigma}}},$$
$$\delta = \sqrt{\frac{2D^2}{A \pm \sqrt{A^2 - 4\sigma}}},\ \ldots\ldots$$

La ligne $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots$ représentera successivement la 4e, 5e, 6e irrationnelle, selon qu'on donne à A, B, C, D, $\ldots\ldots$ les valeurs a, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, $\ldots$ ou $\sqrt{a}$, b, c, d, $\ldots$ ou $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, $\ldots\ldots$. Puis, dans les cas particuliers où l'on aura respectivement $a = m + n$ et $\sigma = mn$, ou $a = (m + n)^2$. mn et $\sigma = (mn)^2$, ou $a = m + n$ et $\sigma = \frac{mn}{m+n}$, les trois dernières irrationnelles se transformeront dans les trois premières suivant l'ordre.

§ 17.

Quant aux irrationnelles d'Apollonius, formées au moyen de la soustraction, elles ne peuvent avoir été que : ou bien, d'après notre texte, des lignes de la forme $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - \delta$, etc.; ou bien, ce qui paraît plus probable, des lignes de la forme

$$(((\alpha - \beta) - \gamma) - \delta) - \ldots\ldots,$$

où α, β, γ, δ, $\ldots\ldots$ représentent les expressions développées dans ce qui précède.

Si certaines expressions de notre texte pouvaient induire quelque lecteur à croire que les conditions générales pour la formation des lignes $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - \delta$, etc., étaient les suivantes

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= A, & \alpha\beta &= A_1 \\ \beta^2 + \gamma^2 &= B, & \beta\gamma &= B_1 \\ \gamma^2 + \delta^2 &= C, & \gamma\delta &= C_1 \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

où A, B, C, ... A_1, B_1, C_1 ... sont de la forme m ou $\sqrt{m}$; je fais observer qu'on ne peut satisfaire à ces conditions que dans des cas particuliers, attendu qu'il y a plus de conditions à remplir que de lignes à déterminer.

III.

§ 18.

Les généralisations des paragraphes précédents se rapportent au *nombre des termes;* on y remplace les irrationnelles binômes d'Euclide par des irrationnelles polynômes.

Il reste maintenant une autre généralisation à faire, qui concerne le *degré* des irrationnelles, attendu qu'on peut désigner en général les irrationnelles traitées par Euclide, même celles discutées dans la proposition 116 du X^e^ livre, comme irrationnelles du second degré.

Mais si l'on voulait appliquer cette généralisation aux irrationnelles polynômes considérées dans les paragraphes précédents, on obtiendrait, pour les conditions qui servent à déterminer les éléments de ces irrationnelles, des systèmes d'équations du troisième degré ou de degrés supérieurs à plusieurs inconnues[1]; et, comme tout ce à quoi les mathématiques grecques se sont élevées

[1] En outre, cette généralisation présupposerait la connaissance du développement de l'expression $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)^n$, et ce développement ne présenterait plus d'une manière simple et naturelle les conditions qui doivent servir à la détermination des éléments α, β, γ, δ....

en fait de résolutions d'équations supérieures se borne, d'après nos connaissances actuelles, à la construction géométrique de quelques cas particuliers d'équations du troisième et du quatrième degré, il n'y a pas lieu de croire que la construction d'irrationnelles polynômes de degrés supérieurs ait été tentée par Apollonius.

Mais les anciens possédaient des procédés pour trouver mécaniquement la racine de l'équation binôme d'un degré quelconque, ou, ce qui revient au même, pour trouver un nombre donné de moyennes proportionnelles entre deux droites données; et il résulte de ce que rapporte notre auteur, qu'ils n'ont pas manqué d'en profiter pour considérer des irrationnelles de degrés supérieurs.

Nous avons vu ci-dessus (p. 695) que ces irrationnelles étaient de la forme

$$\sqrt[\mu]{A^{\mu-\nu}.B^{\nu}}.$$

Or, comme on peut varier à l'infini les valeurs des deux nombres entiers μ et ν, et comme pour les deux éléments A et B on peut prendre, soit deux rationnelles, soit une rationnelle et une des innombrables irrationnelles, considérées sous leur forme générale dans les paragraphes précédents, soit deux quelconques de ces irrationnelles, soit enfin les irrationnelles qui résultent de ces substitutions mêmes, on voit que notre auteur est parfaitement en droit de dire que le nombre des irrationnelles qu'on peut construire d'après les indications précédemment données par lui, est « infiniment de fois infini. »

ANALYSE DU COMMENTAIRE DE VALENS SUR LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PREMIER LIVRE.

§ 19.

1. Esquisse historique du développement successif de la théorie

des quantités irrationnelles chez les Grecs [1]. — Fol. 23 v° du manuscrit arabe.

2. Du fini et de l'infini comme principes de la commensurabilité et de l'incommensurabilité. — Fol. 23v° à 24 r°.

3. Aperçu de l'arrangement des propositions du dixième livre. — Fol. 24 r° à 24 v°.

4. Différence du rapport de deux quantités finies en général, d'avec celui de deux quantités commensurables, et celui de deux quantités rationnelles. — Fol. 24 v° à 25 v°.

5. De la triade comme principe des quantités irrationnelles. — Fol. 25 v°.

6. Examen comparé de la théorie de Théétète et de celle d'Euclide sur les quantités commensurables en longueur et en puissance, ou en puissance seulement. — Fol. 25 v° à 26 v°.

7. De l'existence réelle des quantités incommensurables dans les choses matérielles. — Fol. 26 v°.

8. Des principes métaphysiques (Dieu et la matière) de la commensurabilité et de l'incommensurabilité. — Fol. 26 v° à 27 r°.

9. Que les lignes rationnelles existent par convention et non pas naturellement. Qu'il existe des lignes rationnelles commensurables en longueur et cependant incommensurables en longueur à la ligne proposée comme rationnelle. — Fol. 27 r° à 28 r°.

10. Différence des opinions de Platon et d'Euclide sur la définition des lignes rationnelles. Classification des lignes rationnelles. — Fol. 28 r° à 28 v°.

11. De l'espace médial et de la ligne médiale. — Fol. 28 v° à 29 r°.

12. Des irrationnelles formées par addition et par soustraction, et des développements dont la théorie d'Euclide est susceptible [2]. — Fol. 29 r° à 30 r°.

[1] Voir ci-dessus, p. 691 et suiv.

[2] Voir ci-dessus, p. 693 et suiv.

13. Division du dixième livre en treize sections, et indication sommaire du contenu de chacune de ces sections. — Fol. 30 r° à 31 r°.

SECOND LIVRE.

§ 20.

1. De l'ordre des irrationnelles [1]. — De la relation qui existe entre les irrationnelles et les espaces qu'elles peuvent. — Fol. 31 v°.
2. De la nature d'un rectangle compris sous deux droites, selon que ces droites sont rationnelles ou irrationnelles, et commensurables en longueur, ou en puissance, ou incommensurables. — Fol. 31 v° à 32 r°.
3. Des irrationnelles formées par addition. Examen des différents cas que présente la composition de deux droites, selon que ces droites sont commensurables en longueur, ou en puissance, ou incommensurables, et selon que, dans chacun des deux derniers cas, la somme de leurs carrés est rationnelle, et le rectangle compris sous elles médial, ou la somme des carrés médiale et le rectangle rationnel, ou la somme des carrés et le rectangle tous les deux médiaux. — Fol. 32 r° à 33 r°.
4. Pourquoi Euclide, dans le cas où les deux éléments sont commensurables en puissance, les désigne, suivant leur espèce, comme rationnels ou médiaux, tandis qu'il ne le fait pas lorsque les deux éléments sont incommensurables. — Fol. 33 r°.
5. Théorème. Lorsque deux lignes sont commensurables en puissance, et que la somme de leurs carrés est rationnelle ou médiale, les deux lignes seront rationnelles ou médiales; si elles sont incommensurables, la même chose

[1] Voir ci dessus, p. 701.

n'aura plus lieu [1]. Démonstration de ce théorème. — Fol. 33 v° à 34 r°.

6. Des irrationnelles formées par soustraction. Leur affinité avec les irrationnelles formées par addition. — Fol. 34 r°.

7. Comme les irrationnelles formées par addition tiennent leurs noms de la composition des espaces qu'elles peuvent, de même, les irrationnelles formées par soustraction tiennent les leurs de la division (soustraction) des mêmes espaces [2]. Examen des six cas analogues à ceux du n° 3. Génération des irrationnelles formées par soustraction au moyen de deux espaces donnés. — Fol. 34 r° à 35 r°.

8. Génération des irrationnelles formées par addition ou par soustraction, au moyen d'un espace rationnel et d'un espace médial, ou de deux espaces médiaux qu'on combine par addition ou par soustraction, et dont le plus petit [3] est compris sous deux lignes, soit commensurables, soit incommensurables en puissance, et qui, ensemble, peuvent le plus grand [4]. Cela donne lieu à douze cas, correspondant aux douze irrationnelles. — Fol. 35 r° à 36 r°.

[1] Posons $x : y = r$, $x^2 + y^2 = s$; on aura

$$x = \sqrt{\frac{s\,r^2}{r^2+1}} \qquad y = \sqrt{\frac{s}{r^2+1}}$$

Lorsque x et y sont commensurables en puissance, r^2 est rationnel dans l'acception moderne de ce terme, et, comme la ligne qui peut un espace rationnel ou médial est elle-même rationnelle ou médiale, x et y seront, en même temps que s, rationnels ou médiaux. Lorsque, au contraire, x et y sont incommensurables en puissance, r^2 sera irrationnel, et, par conséquent, x et y seront des lignes irrationnelles.

[2] Si le carré d'une irrationnelle formée par addition s'exprime par $S + 2R$, celui de l'irrationnelle correspondante formée par soustraction s'exprime par $S - 2R$.

[3] $2R$; car on a toujours $x^2 + y^2 > 2xy$.

[4] Telles sont les expressions employées à plusieurs reprises dans le texte; pour parler plus exactement, il faut dire que la somme des carrés des deux droites qui comprennent la moitié de l'espace mineur est égale à l'espace majeur.

9. De la relation qui existe entre les trois genres d'irrationnelles et les trois genres de proportions. Génération de la médiale au moyen de la proportion géométrique, et des irrationnelles formées par addition au moyen de la proportion arithmétique. — Fol. 36 r° à 36 v°.

10. Génération des irrationnelles formées par soustraction, au moyen de la proportion harmonique [1]. — Fol. 36 v° à 37 v°.

11. Théorème. Lorsqu'un espace rationnel est compris sous deux droites, dont l'une est une des irrationnelles formées par addition, l'autre droite sera l'irrationnelle correspondante formée par soustraction. Démonstration de ce théorème. — Fol. 37 v° à 38 v°.

12. Démonstration du même théorème pour un espace médial [2]. Fol. 38 v°.

[1] Voir ci-dessus, p. 692.

[2] En posant

$$\frac{E}{x+y} = \xi - \eta$$

on aura

$$\xi = \frac{E}{x^2 - y^2}\, x \qquad \eta = \frac{E}{x^2 - y^2}\, y$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{E}{x^2 - y^2}\right)^2 (x^2 + y^2)$$

$$\xi\,\eta = \left(\frac{E}{x^2 - y^2}\right)^2 \cdot (x\,y)$$

$$\xi^2 : \eta^2 = x^2 : y^2.$$

Tant que E est un espace rationnel ou médial, et que $x + y$ représente une des six irrationnelles formées par addition, $\left(\frac{E}{x^2 - y^2}\right)^2 = \frac{E^2}{(x^2+y^2)^2 - (2\,x\,y)^2}$ sera un facteur rationnel, dans l'acception moderne de ce terme. La somme et le rapport des carrés des deux éléments constitutifs, ainsi que le produit de ces deux éléments, c'est-à-dire les expressions qui, comme nous l'avons vu ci-dessus (§§ 5 et 6), décident de la nature de l'irrationnelle composée de ces deux éléments, ne changeront donc pas de nature, lorsque de x et y on passe à ξ et η. En conséquence, $\xi - \eta$ sera une irrationnelle de la même espèce que $x - y$; *c. q. f. d.*

13. Des six droites de deux noms et des six apotomes; et des relations qui existent entre les six droites de deux noms et les six irrationnelles formées par addition d'un côté, et entre les six apotomes et les six irrationnelles formées par soustraction de l'autre côté. — Fol. 39 r° à 39 v°.

14. Théorème. Le carré d'une quelconque des six irrationnelles formées par addition, appliqué à une médiale, fait une largeur qui est la première ou la seconde de deux médiales. Démonstration de ce théorème. — Fol. 39 v° à 41 r°.

15. Théorème. Le carré d'une quelconque des six irrationnelles formées par soustraction, appliqué à une médiale, fait une largeur qui est le premier ou le second apotome de la médiale. Démonstration de ce théorème[1]. — Fol. 41 r° à 42 r°.

16. Remarque sur l'application du carré de la médiale aux irrationnelles formées par addition et par soustraction (voir n° 12); et sur l'application des carrés des irrationnelles for-

[1] En posant

$$\frac{(x \pm y)^2}{\sqrt[4]{m}} = \xi \pm \eta,$$

on aura

$$\xi = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt[4]{m}} \qquad \eta = \frac{2xy}{\sqrt[4]{m}}$$

$$\xi^2 : \eta^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{(2xy)^2}$$

$$\xi\eta = \frac{(x^2 + y^2) \cdot (2xy)}{\sqrt{m}}.$$

Il résulte de ces formules que, tant que x et y représentent les deux éléments constitutifs d'une des douze irrationnelles formées par addition et par soustraction, ξ et η sont deux médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant un rectangle rationnel ou médial. Conséquemment, $\xi \pm \eta$ représentera toujours, soit une première ou une seconde de deux médiales, soit un premier ou un second apotome de la médiale (voir § 5) *c. q. f. d.*

mées par addition aux irrationnelles formées par soustraction, et réciproquement. L'auteur dit que la discussion des largeurs produites par ces dernières applications donne lieu à une foule de propositions et de théorèmes. — Coup d'œil jeté sur l'infinité des irrationnelles[1]. — En se servant des théories exposées, on peut s'occuper du problème suivant : « Une rationnelle ou une médiale et une irrationnelle étant données, trouver la moyenne ou la troisième proportionnelle. » — Fol. 42 v°.

[1] Voir p. 702.

CONSIDÉRATIONS ANATOMIQUES

ET THÉRAPEUTIQUES

SUR LES FISTULES VÉSICO-VAGINALES,

(AUTOPLASTIE PAR GLISSEMENT)

PAR A. J. JOBERT DE LAMBALLE.

J'ai eu l'honneur, en 1845, d'adresser à l'Académie l'observation d'un cas de guérison d'une fistule vésico-vaginale à l'aide d'un procédé que j'appelais autoplastie par glissement; et je m'engageai alors à lui soumettre un travail plus étendu sur cette matière. Je viens aujourd'hui remplir cette promesse.

Avant cependant d'exposer les détails de ce nouveau procédé, j'ai cru devoir entrer dans quelques considérations rapides sur la gravité des fistules vésico-vaginales, sur leurs causes, sur les moyens divers proposés pour y remédier. Je serai conduit ainsi naturellement à rechercher l'origine des insuccès, à exposer le point de départ de mes investigations récentes; et les observations de six guérisons solides et durables, obtenues par cette nouvelle méthode, confirmeront l'opportunité de ma critique et la justesse de mes prévisions.

Les fistules vésico-vaginales constituent pour la femme une des infirmités les plus malheureuses, quand on songe surtout qu'elles arrivent le plus souvent dans un âge encore peu avancé, et que la malade se trouve ainsi condamnée à vivre de longues années dans

un état qui ne peut lui imposer à elle-même qu'un constant dégoût. Ces fistules ne sont pas seulement incommodes; elles peuvent devenir dangereuses par leur étendue, par leur durée, par leurs complications. La santé générale, déjà troublée par les affections morales, par la folie même qu'a parfois déterminée une telle position, finit par s'altérer gravement sous l'influence des désordres locaux que la maladie amène avec le temps. Un amaigrissement notable, une faiblesse liée à l'appauvrissement du sang, au défaut de réparation nutritive, épuisent la malade, et la mort peut être la suite de cette infirmité.

Il est donc peu d'affections qui réclament aussi impérieusement l'attention et les recherches de la chirurgie, et qui justifient d'avance si pleinement toutes les tentatives thérapeutiques destinées à en amener la guérison.

Mais pour bien comprendre les difficultés inhérentes à ce sujet, pour déterminer les dangers de tel ou tel procédé, il faut connaître succinctement les causes de ces diverses fistules. Elles sont de diverses natures, et portent, chacune avec elle, le cachet variable de leur gravité. Quelques-unes, et elles sont évidemment les plus rares, n'entraînent pas à leur suite un pronostic aussi fâcheux, si surtout on est appelé à y pouvoir remédier immédiatement. Elles sont habituellement produites par des causes traumatiques; ainsi : par l'introduction d'un corps tranchant, piquant ou contondant dans le vagin; par le crochet, qui déchire, ou le forceps, qui pince la paroi supérieure du conduit dans les manœuvres d'un accouchement laborieux; par le bistouri, dont le tranchant égaré va léser le vagin pendant l'extirpation du col de la matrice; enfin, par le chirurgien lui-même dans l'opération de la taille.

Toutes ces fistules sont en général de peu d'étendue, à bords lisses et nets, offrant ordinairement toutes les conditions d'une plaie récente sans complications dans les organes voisins et surtout dans l'état de la vessie et de l'urètre, qui ont conservé leurs dimensions ordinaires. Toutes les fois qu'on s'est aperçu de cette

lésion et qu'on y a apporté de prompts remèdes, la maladie a pu guérir, quoique bien rarement encore, sans laisser de traces. Ce genre de fistules vésico-vaginales constitue donc un groupe tout à fait isolé; et l'on entend rarement s'en occuper quand on parle de la gravité et de l'incurabilité des fistules de cette nature.

Mais d'autres causes plus sérieuses peuvent malheureusement y donner lieu. Des ulcérations de nature diverse ayant pris naissance, soit dans le vagin, soit dans la vessie (calculs, ulcères syphilitiques, cancéreux, abcès avec décollement, ulcères produits par le séjour d'un pessaire, etc.), les progrès d'un cancer utérin qui s'avance, ronge et perfore la paroi vésico-vaginale, déterminent très-fréquemment de larges fistules ayant détruit une portion plus ou moins grande du bas-fond de la vessie. En dernière analyse, la cause la plus constante, et celle qui donne habituellement lieu aux plus grands désordres, a sa source dans les gangrènes produites par la pression de la tête d'un enfant demeuré longtemps au passage. Ces escarres plus ou moins larges donnent presque toujours lieu à des perforations, à des pertes de substances irrégulières, variables en étendue, tantôt longitudinales, plus fréquemment transversales et plus ou moins déchirées sur leurs bords. On en a vu occuper presque toute l'étendue de la paroi supérieure du vagin, depuis le col, détruire l'urètre et ne plus laisser qu'un vaste cloaque, dans lequel étaient incessamment versées les urines.

L'importance qu'on a cherché à attacher aux fistules placées en arrière, au niveau ou en avant des uretères, n'est pas toujours très-grande au lit de la malade, quand il faut opérer. On conçoit, dans tous ces cas, la gravité de la lésion, gravité encore accrue le plus souvent par les désordres que la durée du mal a amenés dans les lèvres mêmes de la solution de continuité et dans l'état de la vessie. En effet, ce dernier organe ne contenant plus d'urine, et se trouvant dépourvu de son bas-fond, a peu à peu perdu de son volume. La vessie s'est rétractée et n'offre plus qu'une surface très-limitée, qui parfois s'invagine dans la fistule; les lèvres de la plaie sont devenues dures, calleuses, épaisses; elles ont

perdu leur vitalité normale, l'urètre s'est rétréci, s'est même oblitéré, de telle sorte qu'il faut dans de semblables cas refaire de toutes pièces un urètre, une vessie, une paroi supérieure du vagin.

Contre tant de lésions diverses, contre tant de fistules variables dans leur forme, dans leur étendue, dans leur direction, dans leurs complications, bien des moyens ont dû être proposés.

Quelques-uns, mais dans des circonstances très-limitées, ont dû et pu réussir; presque tous les autres ont nécessairement échoué; et l'effet de ces insuccès a été tel, qu'il a presque découragé, pendant un certain temps, les chirurgiens dans leurs tentatives. Ce n'est, en effet, qu'à cette époque moderne où l'élan donné à toute espèce de recherches a comme renouvelé la face de la médecine, que l'esprit des chirurgiens a été ramené à l'étude des vrais moyens physiologiques destinés à guérir les fistules vésico-vaginales.

Oubliées, comme perdues, et non suffisamment décrites dans les anciens auteurs, ces fistules n'ont laissé les traces d'aucun traitement spécial. Il faut arriver à Desault et Choppart pour l'histoire rationnelle de cette thérapeutique chirurgicale. Ils avaient compris tous deux les indications capitales qu'on devait remplir. C'était : 1° de rendre aux urines leurs cours naturel; 2° d'agir sur les lèvres de la fistule de manière à les rapprocher et à en obtenir l'adhérence. Pour cela une sonde était introduite dans l'urètre, et un tampon épais, résistant, placé dans le vagin, devait, en pressant sur les lèvres de la fistule, en opérer la réunion. De ces deux moyens, le premier seul était utile, mais il devenait nul à cause de l'insuffisance, du danger même attaché au second. Le siphon de Henri Van-Heer n'offrait pas de plus solides garanties.

La cautérisation a été proposée comme pouvant seule amener la guérison des fistules. Évidemment, si l'on doit quelquefois y recourir, ce ne peut être que dans les fistules de très-petite étendue.

En 1825, M. Lallemand a imaginé, pour rapprocher les lèvres de la fistule, un procédé ingénieux.

Il s'agit d'une sonde qui, après avoir pénétré dans la vessie par l'urètre, laisse échapper de son extrémité vésicale une érigne dont la mission est d'accrocher une des lèvres de la plaie et de la rapprocher de l'autre. Malgré les inconvénients attachés à cette méthode, on ne peut contester que ce ne soit là un pas fait dans la bonne voie, une idée heureuse, mais incomplète de la suture appliquée à ces fistules.

C'est, en effet, à la suture que beaucoup de chirurgiens ont eu recours : suture simple, entortillée (Roux), enchevillée (Gerdy), entrecoupée (Jobert), précédée de l'avivement des lèvres de la plaie. Chacun sait le sort qui a été réservé aux tentatives opérées dans ce sens. Je ferai remarquer seulement à quoi l'on s'exposait en pratiquant, d'après la méthode de M. Malagodi, l'abaissement des bords de la fistule avec le doigt pour l'attirer à la vulve et l'aviver plus facilement. Sans parler du déchirement possible, tous ces tiraillements opérés sur des parties qui allaient encore devenir le siége de points multipliés de suture, ont sans doute contribué à rendre infructueux les essais tentés par cette méthode.

M. Gerdy (juin 1841) a conseillé de détacher la muqueuse du vagin des deux côtés de la solution de continuité; puis, comme deux feuillets d'un livre, de les réunir par suture et d'oblitérer ainsi l'espace produit par la perte de substance. Une hémorrhagie accompagna ce procédé, et la guérison ne fut pas obtenue.

Antécédemment à la plupart de ces travaux, j'avais aussi étudié cette question, et les idées émises déjà par moi en 1826, quand je proposai d'obturer certaines plaies de l'intestin avec perte de substance par un bouchon d'épiploon, me conduisirent à pratiquer une opération de même nature pour remédier aux fistules vésico-vaginales.

Ce fut le 2 juin 1834 que je pratiquai l'élytroplastie. Pour cela j'empruntai un lambeau aux grandes lèvres et à la partie interne de la cuisse; et après avoir ravivé les bords de la plaie, je réparai la perte de substance par l'application, dans toute sa pureté, des vrais procédés d'autoplastie. Je ne reviendrai pas ici sur les

détails de cette opération, que j'ai deux fois pratiquée avec succès, mais qui a également échoué entre mes mains. C'est qu'à ce procédé, comme à tous les autres, étaient attachés des inconvénients réels.

L'idée de M. Velpeau de faire adhérer d'abord la partie postérieure du vagin avec sa partie antérieure (oblitération de ce conduit), puis de rétablir une ouverture pour l'écoulement des menstrues, n'a eu qu'un commencement d'exécution, et se rapproche de la méthode d'oblitération dont je parlerai plus bas, et que M. Vidal (de Cassis) a appliquée sous le nom de méthode indirecte de curation des fistules vésico-vaginales, ou infibulation.

Tel était, il y a deux ans environ, l'état de la question. J'étais arrivé par l'élytroplastie ou vésicoplastie à des succès, mais qui n'étaient pas suffisants, et, je dois le dire, qui ne satisfaisaient pas toutes mes idées, car il y avait des cas où j'aurais éprouvé les plus grandes difficultés pour mettre en pratique l'élytroplastie, et où, sans doute, elle eût été impraticable.

Une femme, la nommée Calmés, que j'avais opérée par la suture, par l'autoplastie avec lambeau, n'avait pas guéri. Elle n'avait plus de col de la vessie, plus d'urètre; la fistule était d'un grand diamètre, et la perte de substance plus étendue qu'avant les opérations qu'elle avait subies. Ce fait et les insuccès dont il fut suivi me donnèrent beaucoup à penser, et ce fut dès ce moment que je dus chercher, dans un autre ordre que celui des idées connues, le moyen de remédier à cette infirmité. Mes recherches devaient porter sur l'état anatomique précis et sur les rapports exacts de la paroi supérieure du vagin avec le bas fond de la vessie et les parties environnantes. J'ai déjà eu l'honneur de faire connaître à l'Académie les résultats de ces études, mais je ne lui ai soumis qu'une analyse rapide.

Je vais maintenant indiquer avec ordre les recherches anatomiques où j'ai puisé les idées de mon nouveau travail, et je les ferai suivre du procédé pour pratiquer l'opération à laquelle j'ai donné le nom d'*autoplastie par glissement*.

1° Examen anatomique des rapports spéciaux de la partie inférieure de la vessie avec la partie supérieure du vagin et de l'utérus. Disposition du péritoine relativement à ces parties.

Ces rapports varient suivant l'état de plénitude ou de vacuité de la vessie.

A. — Les parois de l'abdomen étant écartées et les anses intestinales refoulées hors de la cavité du bassin, *si la vessie ne contient pas d'urine,* on voit ses parois affaissées sur elles-mêmes, un peu rétractées, de manière à offrir un volume total de peu d'étendue dans le sens antéro-postérieur surtout; tandis que, latéralement, elles se déversent d'une façon plus notable. Dans ce cas, toute la vessie repose pour ainsi dire sur la partie supérieure du vagin et sur l'origine de l'utérus.

B. — *Si la vessie est distendue par l'urine,* son développement envahit alors une surface ou un espace plus considérables. Les parties latérales du vagin sont dépassées, et l'utérus, entièrement recouvert, n'a plus assez d'étendue pour continuer d'être en rapport par la face supérieure avec le bas-fond de la vessie.

La disposition du péritoine dans ces deux cas est fort différente. Si, dans le premier cas, on soulève avec précaution le bas-fond de la vessie, en ayant bien soin de n'exercer aucune traction, on aperçoit dans un sillon transversal, correspondant à l'insertion supérieure du vagin, un certain nombre de plis formés par le péritoine lui-même. Ces plis n'existent pas au même degré sur les parties latérales, ou, pour mieux dire, aux extrémités de ce sillon. Ainsi donc, à l'état de vacuité de la vessie, le péritoine au-dessous d'elle, et dans les points qui correspondent avec la partie supérieure du vagin, forme des plis apparents.

Dans l'état de plénitude, alors que le volume de la vessie prend de l'étendue, ces plis du péritoine s'effacent, se prêtent au développement de l'organe, et lui permettent une grande distension, sans que des tiraillements pénibles ou dangereux soient exercés.

Si, pour se rendre compte de l'état profond des parties dans

ces cas, on dissèque l'intervalle compris entre le péritoine et l'insertion du vagin au col de l'utérus sur la ligne médiane, on arrive dans un espace long environ de trois centimètres. Le péritoine dans cette étendue est uni aux parties sous-jacentes par un tissu cellulaire, lâche surtout vers les parties latérales. Sur le milieu de cet espace, c'est-à-dire tout à fait entre le bas-fond de la vessie et la partie supérieure du vagin, le tissu cellulaire est facile à diviser; mais il est plus dense et plus serré jusqu'à ce qu'on arrive au point d'insertion du péritoine, à l'origine du corps de l'utérus. Là, il devient plus résistant et beaucoup plus difficile à détacher.

Les plexus vasculaires ne se rencontrent que sur les parties latérales, et à plusieurs centimètres du col utérin. La dissection apprend que les artères utérines, situées d'abord dans l'épaisseur des ligaments larges, sont éloignées, vers la partie inférieure et médiane du col, de quatre centimètres; mais à mesure qu'elles gagnent le corps de l'utérus, elles se rapprochent de plus en plus des parties latérales du col, qu'elles finissent par toucher, du moins quand les vaisseaux sont injectés. Si l'on cherche à apprécier les rapports des uretères avec ces parties, on constate que ces derniers se trouvent sur les côtés de la cloison vésico-vaginale. Dans leur trajet le long du col, les artères utérines envoient de nombreux rameaux sur les côtés de ce dernier. Du tronc de l'artère utérine, à l'endroit où elle se coude pour gagner les parties latérales de l'utérus, partent des branches qui vont au vagin et à la vessie. Celles qui se rendent à cette dernière gagnent d'abord ses côtés pour se répandre ensuite vers son sommet. De très-faibles rameaux seulement se distribuent à sa partie moyenne. Les nombreuses et volumineuses branches vaginales fournies un peu en dedans des précédentes, au niveau des urétères, se dirigent vers la partie moyenne du conduit vulvo-utérin, pour gagner sa région antérieure en s'anastomosant avec des rameaux du côté opposé.

Mais au niveau de l'insertion du vagin au col, sur la ligne médiane, on ne rencontre que de très-faibles rameaux rétrogrades

des branches vaginales; et encore ces branches se répandent-elles dans les couches cellulaire et dartoïde qui unissent le vagin à la vessie, avant de se distribuer dans la muqueuse vaginale.

Ainsi donc, en attaquant le vagin tout à fait à son insertion, au pourtour du col utérin et à sa partie supérieure, par une incision semi-circulaire à convexité postérieure, on arrive à un espace de trois centimètres environ, dans lequel le péritoine peut être très-facilement respecté, puisqu'il s'est écarté fortement en haut et en arrière (la vessie étant distendue), et qu'il forme au contraire des plis mous et extensibles quand la vessie ne contient plus d'urine.

La laxité du tissu cellulaire sous-vésical permet de faire opérer, aux organes qui lui sont superposés, des mouvements plus ou moins étendus, et, dans cette opération, on ne blessera que des rameaux vasculaires très-déliés.

Si l'on exerce alors une douce traction sur les parties placées au-devant de l'incision semi-lunaire pratiquée au vagin, ces parties, devenues mobiles, cèdent facilement à l'effort qui les attire, et l'on obtient ainsi un allongement immédiat plus ou moins considérable; mais on n'a pas besoin d'exercer de traction sur le vagin et la vessie qui, après cette incision, se portent en avant d'eux-mêmes. Il ne reste dans ce cas, au fond et en haut du vagin, qu'une petite plaie dont la surface est formée par le tissu cellulaire sous-jacent à la face inférieure et tout à fait reculée du bas-fond de la vessie. Cet allongement est encore favorisé, en dehors de l'effet de la traction, par la rétraction naturelle des parties musculaires de la tunique du vagin situées au-devant de l'incision.

A l'instant où l'on attire le col utérin en avant et en bas, si la vessie est vide, son bas-fond est entraîné dans la direction du vagin, et se roule sur lui-même de façon à subir un mouvement de rotation ou de spirale qui va de haut en bas et en avant. En même temps aussi, la partie inférieure de la vessie subit une traction et cède à l'effort, de telle sorte qu'une portion de son étendue s'engage, en se roulant de haut en bas et de dedans vers le dehors, au-dessous de l'insertion fixe de son col.

Dans ces diverses manœuvres ou expériences, si l'on ouvre la vessie à sa partie supérieure pour bien suivre les mouvements qu'opère sa face inférieure, il est facile de voir que l'orifice des uretères reste encore assez éloigné sur les parties latérales, et que le triangle circonscrit entre eux et le col vésical offre un espace de quatre à six centimètres de diamètre.

Ces études anatomiques et physiologiques ont été plusieurs fois répétées sur le cadavre en présence de plusieurs médecins, entre autres, de M. le docteur Vernois, médecin des hôpitaux, et de M. Colin, mon interne, etc.

J'ai appelé autoplastie par glissement le procédé à l'aide duquel se déplace la vessie de l'endroit où elle repose sur le col utérin, en se portant vers le pubis. Il en résulte un relâchement dans les lèvres de la fistule et une facilité très-grande à les rapprocher et à les maintenir en contact.

Pour être exécuté, ce procédé réclame un manuel opératoire spécial dont je dois indiquer les différents temps.

MANUEL OPÉRATOIRE.

1er temps. — Attirer le col utérin vers la vulve, c'est la première condition à remplir, et l'on s'étonne à juste titre que, dans les méthodes connues et pratiquées jusqu'ici, il n'en ait jamais été fait mention. Cette traction, comme si l'on procédait à l'amputation du col utérin, doit être faite graduellement et avec de fortes érignes doubles, et en général le col doit être saisi dans une direction opposée au grand diamètre de la fistule, c'est-à dire de droite à gauche si la fistule est longitudinale, d'avant en arrière si elle est transversale. Cette marche a pour but de rendre plus libre l'action de l'opérateur sur les lèvres de la plaie. Dans tous les cas, les points d'implantation des érignes ne doivent en aucune manière gêner la vue de l'insertion antérieure et latérale du vagin au col de l'utérus.

2e temps. — Détacher le vagin à son insertion au col de l'utérus. Selon *l'étendue de la fistule* et les *besoins variables* de l'opération, une

incision semi-circulaire est pratiquée transversalement sur le vagin à son point d'insertion au col, en ayant soin de le décoller avec la muqueuse par une dissection lente faite d'avant en arrière et en agissant contre le col de l'utérus, dont on ne doit pas craindre de diviser les fibres superficielles. Il faut alors que les aides maintiennent les érignes solidement fixées et ne laissent pas remonter l'utérus. Il devient évident que déjà, par l'accomplissement de ce temps, on peut avoir gagné plusieurs centimètres d'espace et diminué d'autant l'ouverture de la fistule.

3e temps. — Ravivement des bords de la fistule. Il ne faut pas craindre de mordre assez avant sur les lèvres de la plaie. Si l'on n'excisait qu'une faible partie des bords, souvent indurés par l'ancienneté de la lésion, on n'aurait mis au vif que des tissus calleux dont la vascularité rare et peu nourrie n'offrirait que peu de chances à la réunion par première intention.

Il faut, en principe, obtenir de chaque côté de larges surfaces saignantes, et pour cela ne pas redouter d'attaquer la muqueuse et le tissu même du vagin. Lorsque la fistule est dirigée d'avant en arrière et est longitudinale par conséquent, on peut indifféremment raviver la lèvre gauche ou la lèvre droite. Il est cependant plus rationnel de raviver la lèvre qui offre le plus de difficulté pour être saisie et que l'œil du chirurgien découvre plus difficilement. Au contraire, toutes les fois que la fistule est transversale, il convient de raviver la lèvre postérieure, qui est la plus déclive et sur laquelle le sang tombe lorsque, contrairement à ce principe, on ravive d'abord la lèvre antérieure. Les commissures ou les angles de la fistule sont ensuite ravivés, et enfin la lèvre antérieure. Pour pratiquer le ravivement, on se sert d'un bistouri droit boutonné, de ciseaux droits ou courbes, et aussi d'une longue pince à disséquer qui offre des dents assez saillantes pour saisir les tissus qu'elle touche.

4e temps. — Bien passer et fixer les fils de la suture. La suture doit être entrecoupée. Des aiguilles courtes, portées sur un manche *ad hoc*, saisissent isolément chaque lèvre, et chaque point de suture

doit être séparé. Il faut que toute l'épaisseur du bord soit comprise par l'aiguille. Toutes les fois que la fistule a pu être amenée aux bords de la vulve, l'aiguille commence par attaquer la face vaginale du bord saignant, ressort par son côté vésical, et, sans quitter celui-ci, traverse la paroi opposée de la vessie vers le vagin de manière à former une anse dont la convexité regarde la cavité de la vessie, et dont les deux extrémités libres plongent dans le conduit vulvaire. C'est le cas où la suture se pratique le plus facilement; mais il est des circonstances où l'on ne peut pas manœuvrer aussi ouvertement. La fistule placée profondément n'a pu être assez attirée en avant pour que les doigts agissent librement sur ses bords; alors on introduit par l'urètre dans la vessie une sonde d'où s'échappe une aiguille chargée d'un fil. Cette espèce de sonde à dard appuyée sur une des lèvres de la plaie, le chirurgien pousse le dard armé de son fil ciré, et bientôt la paroi de la cloison vésico-vaginale est traversée de la vessie vers le vagin. Le fil est alors dégagé et retenu à l'extérieur de la vulve, puis le dard est retiré dans la gaîne, et la canule appuyée sur la lèvre opposée. L'opérateur pousse le dard, qui traverse la cloison vésico-vaginale. Le fil est dégagé et l'anse est ainsi complétée.

Pendant les manœuvres que nécessite la suture, la face inférieure du vagin doit être constamment protégée par une valve de spéculum en ivoire ou en bois qui déprime la cloison recto-vaginale, et maintenue par un aide dans un abaissement convenable. Il ne faut pas appliquer trop de points de suture : en général, dans un espace de six centimètres, on peut en placer cinq; les fils doivent être serrés modérément et de manière à amener les deux lèvres de la fistule au simple contact. S'il en était autrement, on s'exposerait à enflammer le vagin et la vessie par des sutures trop multipliées, et on pourrait déchirer les tissus, qui ont perdu souvent de leur consistance. Une phlogose exagérée troublerait surtout le travail de plasticité nécessaire à la réunion de la plaie, déterminerait, avec des envies fréquentes d'uriner, des contractions incessantes de la vessie et pourrait amener la rupture des

points de suture. Une fois ce temps accompli, il faut faire dans le vagin des injections froides pour chasser les caillots de sang auxquels l'opération a donné lieu.

5e temps. — Placer une sonde dans la vessie. Ce temps de l'opération est très-important et réclame toute l'attention du chirurgien. On doit se souvenir que l'on fait pénétrer une sonde dans une vessie *rétrécie* dont le volume a diminué d'autant plus que la fistule est plus ancienne et que la perte de substance a été plus considérable, et en second lieu dans une vessie rapprochée du pubis par suite de la section du vagin au niveau du col et de la descente simultanée de ce conduit et du bas-fond de la vessie.

De plus, si l'on n'y faisait attention, la sonde irait heurter contre la nouvelle paroi inférieure que l'opération vient de reconstituer, et contre les points de suture, qui demandent à être respectés avec tant de soin. Il faut encore changer souvent la sonde dans la crainte que des sels ne viennent se déposer sur l'extrémité qui plonge dans les urines et ne rende ainsi son extraction douloureuse, ou que des caillots de sang ou de pus ne s'introduisent dans les yeux, les bouchent et déterminent une rétention d'urine. On doit enfin la fixer au dehors d'une façon assez mobile afin que, dans les mouvements opérés par la malade, elle ne soit pas exposée à se porter brusquement sur les parois de la vessie ou sur la suture. Ce qu'un praticien aussi n'oubliera pas, c'est qu'on a vu quelquefois dans ces circonstances les émotions morales supprimer les urines. Avant donc de songer à retirer la sonde ou à lui imprimer des mouvements, il faut par la percussion s'informer s'il y a de l'urine dans la vessie, et par l'interrogation savoir si la malade a été soumise à quelque vive impression.

6e temps. — Placer un tampon d'amadou dans le vagin. Ce tampon est destiné à absorber le sang qui, pendant quelques heures après l'opération, pourrait suinter de certains points ravivés et non compris dans la suture. Ce tampon doit être placé et fixé de telle sorte que son extraction puisse être opérée sans aucun danger pour la suture, et sans que le doigt soit obligé d'exercer de longues ma-

nœuvres pour l'amener à la vulve. Si l'on a soin d'y attacher un fil ciré dont l'anse demeure au dehors, on peut, à l'aide de douces tractions, l'attirer facilement à soi. De toutes manières, ce tampon ne doit séjourner que peu de temps dans le vagin, un jour, par exemple.

7e temps. — Je dois enfin ajouter que, selon les cas, selon la disposition de la fistule, selon la facilité plus ou moins grande avec laquelle le vagin aura glissé et répondu au vœu du chirurgien, on pourra gagner encore du terrain en pratiquant, dans la muqueuse et dans l'épaisseur même du vagin, des incisions parallèles aux lèvres de la fistule, à droite ou à gauche, ou même tout à fait au point opposé de la fistule lorsqu'il existe de la tension dans ses lèvres.

Ces incisions s'opposeront à la déchirure des points de suture, rendront plus mobiles les lèvres de la plaie et en faciliteront d'autant mieux le rapprochement et la réunion.

Mais je n'aurais pas tout dit si je me bornais à décrire les divers modes et les temps de l'opération : il faut aussi indiquer quand il convient le mieux d'agir et quand la méthode que je propose ne saurait plus être applicable. En général, on doit presque toujours préparer les malades à l'opération. Je ne parle pas ici des cas dans lesquels la fistule a été le résultat d'une cause traumatique accidentelle. Là, comme dans toute plaie simple, la réunion doit toujours être tentée immédiatement.

Je parle de fistules anciennes, ou de celles qui, plus récentes, sont survenues à la suite d'un accouchement laborieux; fistules qu'on diagnostique dès qu'elles sont produites alors que la femme est encore sous l'influence de l'état puerpéral.

Dans ce dernier cas, il est de toute prudence de s'abstenir et d'attendre. On sait que l'accouchement place les femmes dans un état général tel, que toutes les maladies qui se déclarent concurremment avec lui, que toutes les plaies qui surviennent dans cette période, prennent un cachet particulier, un caractère spécial dont l'effet le plus commun est la tendance à la suppuration.

Ajoutons à cela qu'en opérant à une époque trop rapprochée de la chute de l'escarre, les tissus, mous et friables, se déchireraient sous la moindre traction et ne pourraient pas supporter la suture. Le chirurgien serait donc imprudent s'il agissait dans ces circonstances : il compromettrait le sort d'une opération qui a déjà contre elle tant d'éléments d'insuccès. Ce qu'il doit faire seulement, là comme dans les anciennes fistules, c'est de placer une sonde dans la vessie, c'est d'accoutumer les urines à prendre en partie leur cours normal, et de rendre par l'habitude le contact de la sonde moins offensant pour la muqueuse vésicale. On ajoutera à ce moyen l'emploi de grands bains et d'injections dans le vagin, l'usage de l'eau de Vichy si les urines sont chargées de dépôts acides, et on entourera la malade de toutes les précautions hygiéniques convenables.

L'opération des fistules vésico-vaginales par le procédé autoplastique par glissement, tel que je l'ai décrit, pourra en général être appliquée dans tous les cas d'après les règles que je viens d'établir. Néanmoins, il peut se présenter des circonstances où le vagin aurait contracté des adhérences étendues et solides avec le col utérin lui-même en dehors de ses limites ordinaires. Le col utérin lui-même a pu être détruit antérieurement par d'autres maladies, ou offrir un état de souffrance qui ne permette pas d'agir sur lui, ni à son pourtour. Dans ces cas, ou l'on s'exposerait à pénétrer dans le péritoine, si l'on agissait comme on peut le faire à l'état normal; ou l'on pratiquerait des incisions sur des tissus enflammés et ramollis, et toutes les chances mauvaises se multiplieraient.

C'est pour remédier à ces cas imprévus, mais possibles, que j'ai imaginé une espèce de corollaire à mon procédé, une espèce de deuxième mode opératoire.

Voici comment alors on agira.

On amènera la fistule aux bords de la vulve en fixant fortement les pinces de Museux sur le vagin, et en pratiquant sur elles les tractions convenables; et quand on aura pratiqué l'opération de la

suture d'après les indications déjà prescrites, on fera de chaque côté des lèvres de la fistule de profondes incisions, si elle est longitudinale, qui s'opposeront aux tiraillements des points de suture, et donneront artificiellement à droite et à gauche l'espace qu'on n'aura pas pu se procurer par le détachement du vagin à son insertion au col utérin; et si elle est transversale, une ou plusieurs incisions seront faites dans le même sens, en avant et en arrière. Par cette méthode, on pourra encore guérir un grand nombre de fistules vésico-vaginales de natures diverses.

Il est cependant des cas où cette opération ne pourra être pratiquée. Quand un cancer utérin et vaginal aura perforé la cloison vésicale, il n'y a aucune tentative à faire. D'autre part on a vu, soit à la suite d'une gangrène considérable du vagin, soit comme conséquence d'une gangrène primitive limitée et des désordres causés par des efforts infructueux de guérison, que des malades n'avaient plus trace ni de col utérin, ni de cloison vésico-vaginale, ni de canal de l'urètre : un vaste cloaque a remplacé l'état normal. Évidemment de pareilles lésions échappent à la restauration que l'autoplastie par glissement est appelée à procurer, et on est encore à découvrir le procédé le plus ingénieux pour remédier à d'aussi graves désordres.

C'est dans cette circonstance que M. Vidal (de Cassis) a eu l'idée d'appliquer aux malades l'opération de l'infibulation ou l'oblitération artificielle et tout à fait externe du vagin. Cette opération, pratiquée depuis un temps immémorial par un grand nombre de peuples de l'Orient, n'est pas, comme chacun le sait, d'invention récente. En cela, il n'y a de nouveau que la pensée de l'appliquer à la cure ou à la palliation d'une maladie rebelle à tout autre mode de traitement. Comme aucun essai jusqu'ici n'a donné lieu à des résultats, il faut attendre pour juger cette méthode que l'expérience ait prononcé.

Voici maintenant six observations de guérisons obtenues à l'aide de l'autoplastie par glissement. Elles sont ici données avec les plus grands détails, afin que les chirurgiens puissent apprécier par

eux-mêmes toutes les circonstances du fait, en suivant pour ainsi dire, comme je l'ai suivie moi-même, la marche de la guérison des fistules opérées.

PREMIÈRE OBSERVATION. — *Fistule vésico-vaginale occupant l'urètre, le col et le bas-fond de la vessie. — Élytroplastie. — Insuccès. — Nouveau procédé de réunion autoplastique par glissement. — Guérison complète.*

La nommée Calmès (Marie), âgée de vingt-six ans, frangère, entra dans mon service à l'hôpital Saint-Louis, le 7 décembre 1843.

Cette femme, qui est d'une bonne constitution, et qui a toujours joui d'une santé parfaite, devint enceinte, pour la première fois, vers la fin de l'année 1840. La grossesse fut heureuse et ne présenta dans son cours rien de particulier, mais, au bout de huit mois (vers la fin de juin 1841), le travail commença, et ce ne fut que douze heures après que l'accouchement eut lieu.

Cette femme rapporte que le fœtus se présenta par la tête, et que l'on ne fut pas obligé de se servir du forceps. L'enfant, dont la tête surtout était très-volumineuse, ne vécut que vingt-quatre heures.

Pendant les quatre premiers jours qui suivirent l'accouchement, il ne survint aucun accident; mais le cinquième jour, la malade s'aperçut qu'elle ne pouvait plus garder ses urines : celles-ci ne sortaient plus par la voie naturelle, mais tombaient dans le vagin, d'où elles s'écoulaient goutte à goutte et continuellement.

Elle resta dans cet état pendant un mois; mais comme l'écoulement involontaire des urines augmentait et qu'elle ne pouvait se livrer à aucun exercice sans être mouillée, elle se décida à venir chercher dans les hôpitaux un terme à son infirmité.

Elle entra donc à l'Hôtel-Dieu dans le service de M. Breschet; ennuyée de ce qu'on n'entreprenait aucune opération pour la guérir, elle en sortit, après un séjour d'un mois environ. Après être restée un an dans sa famille, elle entra à l'hôpital de la Cha-

rité et y resta trois mois; mais les mêmes raisons qui l'avaient engagée à sortir de l'Hôtel-Dieu lui firent quitter le service de M. Velpeau. Dès cette époque, l'infirmité de cette femme paraissait donc incurable.

Ce ne fut que dix mois après être sortie de la Charité, que Marie Calmès se présenta à l'hôpital Saint-Louis. Je la reçus dans mes salles, le 7 décembre 1843. Elle était alors dans l'état suivant : cette femme, depuis son accouchement, est affectée d'une fistule vésico-vaginale. Celle-ci, située sur la ligne médiane, dirigée d'arrière en avant et parallèlement au grand axe du vagin, revêt une forme elliptique. Elle commence à un centimètre et demi du col utérin et va se terminer à l'urètre, dont il n'existe plus que la paroi supérieure. Elle intéresse donc l'urètre, le col de la vessie et la cloison vésico-vaginale dans presque toute sa longueur. Enfin, cette fistule, dont le diamètre transversal est moindre que le diamètre antéro-postérieur, permet cependant d'introduire facilement dans la vessie les trois premiers doigts.

Les bords de l'ouverture, assez épais et irrégulièrement taillés, ne sont pas âpres au toucher, et n'offrent, ainsi que le reste du vagin, aucune trace de ces incrustations calcaires que l'on remarque chez quelques malades.

Le vagin ne présente ni brides, ni rétrécissement appréciables. L'intérieur de la vessie paraît lisse et ne présente pas de calculs; sa capacité ne paraît pas notablement diminuée, et sa paroi antérieure n'a aucune tendance à faire saillie dans le vagin, à se renverser à travers la perte de substance.

Quelle que soit la position que prenne la malade, qu'elle soit assise ou debout, couchée sur le dos ou sur les côtés, l'urine coule involontairement et continuellement par le vagin, et de là sur les grandes lèvres et le long des cuisses. Elle retient cependant quelquefois ses urines dans la position assise, ou debout en rapprochant fortement les cuisses, mais alors l'urine est retenue dans le réservoir commun, le vagin et la vessie; et au moindre mouvement, au moindre soulèvement du tronc, l'urine s'écoule

par flots, et inonde la malade. Lorsqu'elle est debout, l'urine s'échappe goutte à goutte et continuellement, et on remarque sur les grandes lèvres, sur la partie interne des cuisses et au siége des rougeurs érythémateuses avec des saillies tuberculeuses du derme. Le col utérin lui-même est le siége de petites ulcérations et de granulations déterminées par le contact de l'urine. Quant à l'état général, il est assez satisfaisant.

Ne voyant de moyen de guérison à tenter que dans la cystoplastie, et la malade désirant qu'on fît pour elle quelque chose, elle fut préparée par des bains tièdes, par les boissons émollientes et diurétiques, les eaux gazeuses, les injections émollientes et quelques purgatifs. La malade étant suffisamment préparée, je procédai à l'opération qui fut pratiquée de la manière suivante :

1° Je procédai au ravivement des bords de la fistule;

2° Je taillai un lambeau aux dépens de la fesse et de la partie interne de la cuisse droite; il était long de plus de six pouces et large de plusieurs. Son large pédicule joignait le lambeau à la partie supérieure de la cuisse, presqu'au niveau de la grande lèvre correspondante. Le lambeau, légèrement tordu sur lui-même, fut hissé dans le vagin et fixé aussi bien que possible, sur les lèvres de la fistule. Les fils se rompirent, et le lambeau se détacha et tomba à l'extérieur. Il avait conservé toute sa vitalité : il était gonflé et couvert d'une pseudo-membrane par sa surface saignante. Il offrait sur les côtés plusieurs échancrures dues à l'action des fils. Ce lambeau n'était pas gangrené comme on l'a prétendu; j'ai dû en faire la section au ras de son implantation. Dès lors je m'occupai d'obtenir la cicatrisation de la plaie de la fesse, et la malade sortit de l'hôpital le 5 mai 1844, n'ayant éprouvé aucune amélioration dans l'état de la fistule. Cette malade est donc demeurée six mois à l'hôpital.

Pendant dix mois, cette malade ne fit rien, mais au bout de ce temps, le désespoir la ramena de nouveau à l'hôpital Saint-Louis où elle fut reçue le 11 mars 1845.

L'élytroplastie ne m'ayant pas réussi, et ne pouvant pas réussir

à cause de l'étendue du désordre, je renonçai à cette forme d'autoplastie, pour essayer pour la première fois l'autoplastie vésicale par glissement, dont je n'avais encore fait usage que sur le cadavre. Ce fut alors que je songeai, avant de pratiquer la cystoplastie, à refaire la paroi inférieure de l'urètre et le col de la vessie. Pour cela je taillai deux lambeaux latéraux aux dépens de la peau et du tissu dartoïde des grandes lèvres, et je les réunis sur la ligne médiane, où ils furent maintenus à l'aide d'une sonde placée dans la vessie et de la suture entrecoupée. L'opération pratiquée dans ce but réussit en partie, et l'on obtint ainsi, au niveau de l'urètre normal, une espèce de bride large de plus d'un centimètre, étendue d'une petite lèvre à l'autre, simulant assez bien un urètre de première formation. Au-dessus de cette bride se trouvait un trou qui représentait l'orifice antérieur de l'urètre, et par lequel passait librement une sonde de femme. L'urètre, il est vrai, était reformé, mais ce nouveau conduit ne servait à rien.

Je m'occupai donc de refaire la vessie en la ramenant en bas et en avant, en la déplaçant en même temps que le vagin, avec lequel elle est unie. Je me proposai donc de rendre mobile et de porter en avant toute la partie de la cloison vésico-vaginale, qui adhérait en avant, au col de l'utérus, de l'attirer d'arrière en avant et de haut en bas, afin de réparer ainsi la perte de substance dans le sens antéro-postérieur et transversal, et de rapprocher ensuite les bords de l'ouverture vésico-vaginale sur la ligne médiane et jusqu'au point urétral.

Je pratiquai l'opération le 9 juin 1845, de la manière suivante :

La malade est couchée sur le dos, comme pour l'opération de la taille sous-pubienne ; le bassin est amené sur le bord du lit, en sorte que le siége fait saillie en avant. Les cuisses, fléchies à demi sur le bassin, sont fortement écartées et soutenues par deux aides qui écartent en même temps les grandes lèvres. Des pinces de Museux, enfoncées dans le col utérin, servent à attirer la matrice en bas et en avant jusque vers l'orifice inférieur du vagin. Alors je pratique une incision transversale et demi-circulaire au-dessus

de la lèvre antérieure du museau de tanche, dans le sillon que forme la paroi antérieure du vagin lorsqu'elle va s'insérer sur le col utérin; ensuite, en conduisant le tranchant du bistouri de bas en haut (l'utérus étant attiré en bas), ou mieux du col utérin vers la partie postérieure de la fistule, je détache en partie cette portion de la cloison vésico-vaginale qui restait, et qui n'avait, comme je l'ai dit, qu'un centimètre et demi de largeur. En tirant en avant cette portion de cloison ainsi disséquée, on constate qu'elle a acquis une plus grande étendue, et qu'ainsi le diamètre antéro-postérieur de la fistule est beaucoup diminué.

Je procédai alors avec l'instrument tranchant à l'avivement des bords de l'ouverture vésico-vaginale dans toute sa circonférence, puis j'affrontai facilement les lèvres de la division, et je les maintins réunies à l'aide de sept points de suture entrecoupée.

De cette manière, l'ouverture se trouva fermée aux dépens des parties restantes de la cloison vésico-vaginale elle-même, d'une part, en les tirant dans le sens latéral, et d'autre part en les faisant glisser, après une dissection préalable, dans le sens postéro-antérieur.

Ce dernier temps de l'opération justifie la dénomination de réunion autoplastique par glissement que je lui ai donnée.

La vaste perte de substance que présentait le bas-fond de la vessie étant réparée, la vessie et le vagin, qui tout à l'heure ne formaient qu'un vaste cloaque, constituent maintenant deux cavités parfaitement distinctes et tout à fait isolées par la nouvelle cloison.

L'opération terminée, je procédai au pansement : j'appliquai un morceau d'agaric cératé sur la partie antérieure du vagin, et je tamponnai modérément avec de la charpie. Ensuite j'introduisis une sonde en gomme élastique dans la vessie, par l'urètre de nouvelle formation; je la laissai en permanence afin de donner un libre écoulement à l'urine. Enfin, l'opérée est portée à son lit avec précaution et couchée sur le dos; les cuisses sont un peu fléchies sur le tronc et rapprochées l'une de l'autre.

Le 11 juin, aucun accident ne s'est développé, et c'est à peine si l'on observe un léger mouvement fébrile. Les règles sont survenues; elles se trouvent avancées de quinze jours. On a soin que les urines passent par la sonde, qui est laissée à demeure dans la vessie.

Le 12, une petite quantité d'urine paraît s'écouler par la partie antérieure de la plaie, que l'on a réunie et qui se trouve derrière l'urètre. Du reste, pas de fièvre, pas de céphalalgie (deux bouillons).

Le 14, le canal urétral s'est rompu, et cependant les urines s'écoulent encore par la sonde. Les menstrues continuent (une portion).

Le 23, je pratiquai le toucher vaginal, et il me sembla que j'étais parvenu, sinon à rétablir toute la cloison vésico-vaginale, du moins à diminuer beaucoup l'étendue de la perte de substance.

Le 28, c'est-à-dire le vingtième jour depuis l'opération, la malade se lève sans qu'on le lui ait permis.

Le 15 juillet, en présence de MM. A. Duvergie et Émery, de plusieurs médecins et d'un grand nombre d'élèves, j'examinai cette femme. Après avoir refoulé en bas la paroi postérieure du vagin à l'aide d'une gouttière en buis, on voit, en procédant d'arrière en avant :

1° Au fond du vagin le col de l'utérus;

2° Au-devant de ce col, et à la partie supérieure de la paroi antérieure du vagin, ou mieux de la cloison vésico-vaginale, une saillie prononcée formée par le lambeau qu'on a détaché des parties voisines;

3° Plus en avant, la cicatrice épaisse et solide présentant un sillon qui est dirigé d'arrière en avant, et qui indique l'endroit où s'est faite la réunion des deux lèvres de la fistule;

4° Au-devant de ce sillon et à la hauteur du col normal de la vessie, le col artificiel et une dépression formée par une ouverture que peut traverser une sonde de femme et qui livre passage aux urines : c'est l'orifice vésical de nouvelle formation.

Une sonde, introduite dans la vessie, pénètre à une grande profondeur, et y exécute des mouvements très-variés et très-étendus. Ce dernier résultat prouve d'une manière bien évidente que, malgré la date ancienne de l'affection, l'étendue de la fistule et le rapprochement de ses bords, la capacité de la vessie n'a pas été notablement diminuée.

Cette femme peut maintenant retenir ses urines pendant plusieurs heures. Elle est avertie du besoin d'uriner et y satisfait à volonté. Lorsqu'elle marche elle conserve encore ses urines, mais moins complétement que dans toute autre circonstance. Enfin, bien qu'il n'existe plus d'urètre, lorsqu'on fait uriner cette femme et qu'on l'examine avec soin, on constate que les urines ne tombent ni dans le vagin, ni sur les grandes lèvres; mais qu'elles s'échappent toutes par le col artificiel de la vessie, en formant un jet et en faisant un bruit particulier.

Cette malade a été examinée à différentes époques depuis sa sortie de l'hôpital, et jamais la guérison ne s'est démentie. A différentes reprises, en 1847, au mois de janvier, elle a été examinée dans l'amphithéâtre de l'hôpital Saint-Louis par beaucoup de médecins français et étrangers, et dans le courant de mars 1847 j'ai eu l'honneur de la présenter à l'Académie royale de médecine, en même temps qu'une autre malade guérie de la même infirmité. Elle a été examinée par MM. les professeurs Roux, Lallemand, Bégin, etc., etc. On put s'assurer qu'une grosse sonde était parfaitement reçue dans la vessie par l'ouverture artificielle qui représente tout à la fois le col et l'urètre. Cet orifice, depuis l'opération, a conservé le même diamètre, et il n'a par conséquent pas eu de tendance à s'oblitérer, comme quelques personnes avaient semblé le craindre. Une expérience de deux ans répond parfaitement à tout.

Sur la ligne médiane on a pu constater une longue cicatrice longitudinale, dirigée d'avant en arrière, beaucoup plus blanche que le reste du vagin, et qui atteste la réunion des parties autrefois séparées. On aperçoit enfin transversalement des cicatrices

parfaitement blanches qui indiquent que là avaient pressé les fils qui avaient servi à maintenir les surfaces saignantes en contact.

Deuxième observation. — *Fistule vésico-vaginale. — Autoplastie par glissement. — Guérison.*

Madame Gourg (Virginie), âgée de 35 ans environ, habitant la Pointe-à-Pitre, après s'être constamment très-bien portée étant demoiselle, se maria en 1833, et devint immédiatement enceinte. Arrivée presque au terme de sa grossesse, elle fit une fausse couche qui, à ce qu'il paraît, fut provoquée par une frayeur. Cette fausse couche ne donna lieu à aucun accident, et la malade se remit promptement.

En 1836, elle devint de nouveau enceinte. Cette seconde grossesse ne présenta rien de particulier, si ce n'est que pendant toute sa durée l'appétit était tel que, pour le satisfaire, madame Gourg était obligée de se relever la nuit. Son ventre acquit un volume tel, que tout le monde crut qu'elle accoucherait de deux enfants. Arrivée au terme de sa grossesse, le travail de l'accouchement commença et s'annonça par des douleurs peu intenses; il dura trois jours, pendant lesquels la tête de l'enfant resta engagée dans le détroit inférieur du bassin. Après avoir en vain administré des potions destinées à raviver les contractions utérines entièrement éteintes, les médecins résolurent d'avoir recours au forceps, et terminèrent ainsi l'accouchement, qui fut compliqué de la rupture du cordon. Il survint immédiatement une hémorrhagie assez abondante qui produisit une syncope qui ne dura que quelques instants, après lesquels la malade reprit sa connaissance; on opéra la délivrance. L'enfant qui fut mis au monde vint mort et pesait dix-neuf livres et demie; le cordon était gangrené, s'il faut en croire la malade, qui l'a entendu dire à son médecin.

Immédiatement après la délivrance, la malade perdit de nouveau connaissance et resta pendant vingt-deux jours dans cet état.

On était obligé pour la nourrir de lui mettre du bouillon dans

la bouche; elle opérait alors elle-même un mouvement de déglutition dont elle avait légèrement conscience.

Au bout de vingt-deux jours cet état d'anéantissement se dissipa, elle reprit conscience d'elle-même et s'aperçut immédiatement que son urine coulait sous elle sans qu'il lui fût possible de la retenir. Les médecins attribuèrent ce phénomène à une incontinence d'urine, et ce ne fut que longtemps après que la persistance de son état décida madame Gourg à se laisser examiner. M. Lherminier, ancien élève des hôpitaux de Paris, constata alors qu'il existait au bas-fond de la vessie une fistule vésico-vaginale.

Depuis cette dernière couche, les règles, sans se supprimer complétement d'abord, ne parurent plus avec la même régularité qu'avant. Quelquefois même il arrivait que, pendant l'espace de six mois, elles s'arrêtaient complétement, ce que la malade attribua à l'usage habituel d'eau froide qu'elle faisait pour se laver. Dans d'autres circonstances le sang paraissait, mais en très-petite quantité. Chaque époque menstruelle était d'ailleurs marquée par des douleurs plus ou moins intenses dans le bas-ventre.

Il y a trois ans, les règles se supprimèrent complétement et furent pour ainsi dire remplacées par un écoulement hémorrhoïdal, paraissant assez régulièrement le 27 de chaque mois.

Six mois environ après l'accouchement, M. Lherminier fit une première tentative pour guérir la fistule vésico-vaginale. L'opération consista dans le ravivement pur et simple de la fistule et la mise en contact de ses bords au moyen de plusieurs points de suture entrecoupée. Trois jours après l'opération, l'époque des règles arriva, la malade perdit une très-grande quantité de sang, la suture se déchira, et la fistule resta ce qu'elle était auparavant.

Ce premier échec ne découragea pas M. Lherminier, et au bout d'un an il fit une seconde tentative. Ce chirurgien, après avoir ravivé les bords de la fistule, tailla un lambeau aux dépens de la paroi inférieure du vagin, et par des points de suture le maintint fixé contre l'ouverture anormale de la vessie. Le lambeau resta ainsi fixé pendant huit jours, et déjà on comptait sur une agglu-

tination lorsqu'il survint une hémorrhagie utérine; le lambeau se détacha et la malade ne retira pas plus de bénéfice de cette seconde opération que de la première.

Ce fut alors que M. Lherminier l'engagea à venir à Paris trouver M. Jobert. Elle arriva le 6 septembre 1846 et présenta à cette époque l'état suivant.

Constitution forte et bonne, stature haute, bassin très-développé, tempérament essentiellement nerveux, teinte jaune de la peau; la figure est fatiguée. La malade arrive de Marseille, où elle est restée un an, et où elle a consulté plusieurs médecins, mais sans vouloir se laisser examiner par aucun d'eux. Elle dit être souvent tourmentée par des migraines violentes qui durent quelquefois plusieurs jours.

Du reste, l'appétit est bon et toutes les fonctions s'exécutent bien, si toutefois l'on en excepte les fonctions urinaires.

Quant à ces dernières, voici ce que la malade nous déclare. Depuis son dernier accouchement, elle perd constamment ses urines, surtout lorsqu'elle est couchée dans une position horizontale. Dans la position assise, au contraire, elle peut les garder pendant environ deux heures. Mais alors, au moindre mouvement qu'elle fait pour se lever ou pour changer de position, les urines sortent avec une abondance telle qu'elle s'en trouve inondée. Aussi, quand elle veut se lever, prend-elle les précautions suivantes. Après s'être suffisamment garnie de linges, si elle est demeurée longtemps assise, au lieu de se lever tout d'un coup, elle commence par faire un léger mouvement qui permet à l'urine de s'écouler par le vagin en petites quantités, qui sont successivement absorbées par le linge. Lorsqu'il est sorti de cette manière une quantité suffisante, alors elle se lève, et ce qui reste d'urine dans la vessie se trouve absorbé de la même manière.

Dans la position horizontale l'urine coule par le vagin d'une manière constante, la malade la sent très-bien passer par la fistule lorsqu'elle fait le moindre effort, même pour se moucher. Quel que soit le côté sur lequel la malade est couchée, l'urine coule avec la même facilité et la même abondance. Du reste elle

ne souffre pas, à moins qu'elle ne fasse quelque course un peu longue. Dans ce cas, le frottement des linges imbibés d'urine contre la peau détermine des irritations à la partie supérieure et interne des cuisses. Ces irritations ont été telles, que depuis quelque temps la malade ne sort qu'en voiture.

En examinant la région malade, on constate que les parties génitales externes sont saines. Sur la paroi inférieure du vagin il existe une perte de substance qui indique le lieu où M. Lhermi-nier a taillé son lambeau autoplastique. Toutes ces parties sont inondées d'urine et répandent une odeur urineuse caractéristique. État pustuleux des grandes lèvres et surtout de la partie inférieure de la vulve. Le vagin était induré, gonflé, dans un état continuel d'irritation; dans son trajet on rencontrait des graviers, principalement au niveau de la fistule. On en retire plusieurs au moment de l'opération. Autour de l'anus il existait un bourrelet hémorrhoïdal très-volumineux, saignant au moindre attouchement, et surtout lorsque la malade faisait le plus petit effort. Sur ce bourrelet existaient de petites ulcérations.

En explorant l'intérieur du vagin on découvre, à la paroi supérieure et postérieure, une énorme fente transversale, large de six centimètres au moins, siégeant au bas-fond de la vessie, tout à fait en arrière, au niveau du col de l'utérus, de telle sorte que la fistule urineuse repose sur ce dernier organe, qui en forme la lèvre postérieure. Les bords de cette fistule sont durs et calleux, ses angles dépassent beaucoup à droite et à gauche le col de l'utérus.

En portant dans la vessie une sonde de femme, on rencontre sans difficulté la large ouverture accidentelle qui donne passage aux urines. On peut promener l'instrument d'un angle à l'autre et apprécier ainsi ses dimensions. Pendant l'abaissement du diaphragme, une portion de la vessie forme une tumeur qui se réduit par la pression. Cette tumeur disparaît en grande partie pendant l'expiration et la position horizontale. Cette lésion a pu être étudiée et observée par MM. Bégin, Trousseau, Bouillaud, Piorry, Vernois, et mes internes MM. Niobey et Rosé, qui ont prodigué

leurs soins à la malade jusqu'à complète guérison. Les organes génitaux étaient tellement irrités et enflammés, que la moindre pression déterminait les plus vives douleurs.

Le col de l'utérus lui-même est le siége d'une altération. Sa surface est ulcérée et son tissu ramolli.

Après avoir laissé la malade se reposer et se remettre des fatigues de son voyage, je procédai, le 21 octobre, à l'opération, qui fut pratiquée en présence de MM. les professeurs que nous avons nommés.

Après avoir, avec des pinces de Museux, attiré autant que possible le col de l'utérus en avant et fait maintenir dans cette position par des aides, je pratiquai d'abord le ravivement de la lèvre postérieure de la fistule, sur le col même de l'utérus, puis celui de la lèvre antérieure sur une assez grande étendue, de manière à pouvoir mettre en contact une plus grande quantité de parties saignantes. Cela fait, j'appliquai trois points de suture entrecoupée, séparés l'un de l'autre d'environ un centimètre. Ces fils furent introduits à l'aide d'aiguilles placées sur le porte-aiguille de M. Roux. Ils furent passés par la lèvre antérieure du vagin vers la vessie; la même aiguille fut plongée dans la lèvre postérieure de la vessie vers le vagin, en comprenant une certaine partie de la paroi antérieure du col de l'utérus dans l'anse du cercle qu'elle décrivait: les fils représentaient donc un arc de cercle dont la convexité était dirigée en haut, et la concavité vers les deux extrémités vaginales du fil. Après avoir nettoyé le sang, fait plusieurs injections froides, et s'être assuré que les artérioles qui fournissent du sang étaient bien comprises dans les anses du fil, je rapprochai peu à peu les surfaces saignantes, et les maintins en contact en assurant chaque point de suture par un double nœud. Les fils dont je me servis étaient plats et avaient environ deux lignes de largeur; ils furent fortement serrés et coupés auprès de la suture. On put voir alors que les lèvres de la fistule étaient parfaitement en contact l'une avec l'autre. Pour que ce contact fût encore plus parfait et que les tissus sur lesquels

la fistule était appliquée ne fussent pas tiraillés, à l'aide du bistouri j'incisai assez profondément le col de l'utérus en avant, et le détachai légèrement de son insertion en arrière. Immédiatement tous les tissus se relâchèrent et les bords de la fistule ne furent plus tiraillés, quoique parfaitement en contact. Mais comme il était à craindre que la lèvre antérieure ne fût le siége d'un tiraillement trop grand, je fis une incision transversale de l'étendue de plusieurs pouces dans l'épaisseur du vagin, et en avant, par conséquent, de la fistule. C'est alors que le relâchement fut tout à fait complet.

L'opération terminée, on mit une sonde à demeure dans la vessie afin d'éviter le séjour prolongé de l'urine dans cet organe, Il ne s'écoula pendant l'opération qu'une faible quantité de sang. (Infusion de tilleul; diète absolue.)

La première journée se passa assez bien, la malade n'éprouva pas de douleurs dans le ventre, et on fut seulement contraint de changer plusieurs fois la sonde, qui s'est trouvée bouchée par quelques caillots de sang.

Dès le lendemain les urines sont claires et passent entièrement par la sonde, ce qu'atteste la couche de la malade, restée parfaitement sèche. Aucune douleur dans le ventre, qui n'offre pas de sensibilité à la pression. Le pouls est bon et l'état général, si ce n'est que le soir il survient un état nerveux caractérisé par de la fatigue dans les membres et des bâillements fréquents. (Potion avec 16 grammes sirop de pavots blancs.)

Au bout de deux heures environ, l'état nerveux a disparu et la malade passe bien le reste de la nuit. Durant cet état nerveux, les urines ont été sécrétées en beaucoup moins grande abondance, au point que l'on aurait pu croire la sonde bouchée; mais aussitôt que l'état spasmodique a cessé, les urines sont venues en grande abondance par la sonde.

23. Les urines continuent à couler en totalité par la sonde, mais pour cela on est obligé, de temps en temps, de l'enfoncer dans l'intérieur de la vessie avec légèreté; alors l'urine coule par

un jet assez abondant; ce qui démontre qu'une certaine quantité d'urine peut s'amasser dans la vessie, et que la suture est tellement parfaite qu'aucune goutte de liquide ne passe par l'ouverture de la fistule. Le soir, reparaît cet état d'agitation nerveuse que nous avons décrit, et qui disparaît au bout de deux heures sous l'influence d'une potion antispasmodique éthérée. Les urines sont claires et transparentes; je change la sonde et j'en place une d'un plus petit calibre. Depuis, ces petites sondes ont été continuées. (Tilleul; diète.)

24. L'état de la malade est toujours satisfaisant, elle se plaint seulement d'avoir le ventre embarrassé par des gaz que sa position ne lui permet pas de rendre. Le ventre est légèrement tendu, ballonné et donne un son clair par la percussion. La sonde continue de donner issue à la totalité de l'urine sécrétée, la malade est convaincue qu'aucune goutte d'urine ne passe par la fistule. (Tilleul, bouillon de poulet.) Le soir on remet une nouvelle sonde et on continue la potion antispasmodique.

25. Rien de particulier à noter; dans la journée la malade est prise d'une névralgie de l'œil, qui reparaît chaque fois que l'état nerveux se renouvelle. Le soir on change la sonde, et on remplace la potion calmante par deux pilules d'extrait aqueux d'opium de 0,01 chacune. La malade a pris environ une tasse de bouillon de poulet dans la journée.

26. La peau des fesses commence à s'excorier, on y applique de la baudruche avec beaucoup de précaution. L'état de la malade est très-satisfaisant. Elle est seulement incommodée par les gaz et fatiguée du décubitus sur le dos. Si elle exécute quelque mouvement, soit à droite, soit à gauche, ce n'est qu'avec une extrême prudence. La sonde continue de bien fonctionner, pourvu qu'on ait soin de la changer quand elle vient à se boucher. (Tilleul, bouillon ordinaire, 2 pilules d'opium, car l'agitation se montre toujours le soir.)

27. Même état du côté des voies urinaires. Dans la journée, il s'est écoulé une petite quantité de sang par l'anus, et l'écoulement

a continué jusque dans la journée du 28. Le soir il avait complétement cessé. Le ventre est considérablement ballonné, tendu, non douloureux à la pression. (Tilleul, bouillon, une petite côtelette de mouton, 2 pilules d'opium.)

29. La malade a rendu par l'anus quelques gaz. Son ventre est moins embarrassé. Elle est plus gaie, et l'état spasmodique lui-même paraît diminué. (Même prescription.)

Le 30 et le 31, l'état est très-satisfaisant, la sonde coule toujours bien, les urines sont claires et abondantes. Le ventre est de nouveau ballonné, et, le soir, l'état spasmodique est redevenu ce qu'il était avant. Le matin, la malade se trouve beaucoup mieux que le soir.

1er novembre. J'examine les parties opérées et coupe les fils du milieu. Malgré la plus grande attention, je ne puis apercevoir aucune solution de continuité. L'introduction du doigt dans le vagin me permet de constater que les lèvres de la fistule sont intimement unies. Sans qu'il soit fait de plus grandes tentatives la malade est remise dans son lit et la sonde appliquée de nouveau. Il se présente alors une chose digne d'être notée. Pendant un quart d'heure environ il ne s'écoule pas une seule goutte d'urine par la sonde; au bout de ce temps elle sort comme à l'ordinaire. Ce fait s'explique par l'état spasmodique dans lequel se trouvait la malade au moment de l'examen qu'elle appréhendait, dans la crainte qu'on ne lui apprît la non-réussite de l'opération. Au bout d'un quart d'heure le calme se rétablit et avec lui la sécrétion urinaire, qui s'était arrêtée. Les fils de droite et de gauche sont laissés en place.

Le 2 novembre et les jours suivants il ne survient rien de particulier. Le soir, la malade est toujours prise de cet état nerveux qui ne dure que quelques heures, au bout desquelles elle s'endort. La sonde est scrupuleusement surveillée, et changée lorsque quelque mucosité vient en charger les yeux. (Tilleul, 2 pilules d'opium, potage, côtelette.)

Le 5 novembre, je retire les deux derniers fils. Les lèvres de

la fistule sont réunies d'une manière parfaite et ne laissent pas passer la plus petite quantité d'urine. En introduisant le doigt dans le vagin, je constate que la réunion est déjà solide. Malgré cela, la sonde est immédiatement remise en place et nous présente le même phénomène que le 1^er^ novembre, c'est-à-dire que l'urine ne recommence à couler par la sonde qu'un quart d'heure après son application.

Le reste de la journée se passe comme à l'ordinaire. Le ventre est toujours ballonné, tendu; la malade rend de temps en temps quelques gaz qui la soulagent. Les fesses sont encore excoriées; on les saupoudre avec de la farine de fécule. L'état général est du reste très-bon. La malade mange avec appétit.

Les jours suivants même état. Quelquefois, quand la sonde est bouchée, l'urine passe entre elle et le canal de l'urètre. La malade dit sentir très-distinctement par où elle passe.

8. La malade, qui n'a pas été à la garderobe depuis qu'elle a été opérée, a pris un lavement émollient qui a procuré plusieurs selles. Elle a rendu les dernières sous elle afin de ne pas faire d'efforts compromettants.

Le 9 au soir, la malade a pris un nouveau lavement qui a provoqué également plusieurs selles. Le ventre est mou: il n'est de nouveau ni tendu, ni ballonné. La malade est gaie, convaincue qu'elle est guérie, ce dont elle s'aperçoit lorsqu'elle fait une grande inspiration, car elle sent alors que les bords de la fistule sont réunis. Le soir, elle a toujours de l'agitation. Remarquant la périodicité des accès, j'ordonne, le 17, deux pilules composées de 10 centigrammes sulfate de quinine et d'un centigramme de thridace. La malade en a pris une à une heure de l'après-midi, et l'autre à deux heures.

Le 1^er^, l'accès est encore revenu, mais d'une heure plus rapproché, vers quatre heures du soir.

19. On prescrit deux nouvelles pilules, à prendre à neuf heures et à dix heures du matin. Depuis, les accès nerveux ont complétement disparu.

Le 11 novembre, c'est-à-dire 21 jours après l'opération, on retire la sonde et on introduit de temps en temps l'instrument pour faire uriner la malade environ toutes les deux heures, et on retire une quantité suffisante d'urine qui s'amasse dans la vessie sans couler par la fistule.

Le 12, la malade a encore été sondée dans la journée, et toujours avec le même succès. Mais le soir il survient un spasme vésical qui force à remettre la sonde pendant quelques jours.

Le 21, la sonde est encore retirée. La malade prend un bain, et dans le courant de la journée urine toute seule quand le besoin s'en fait sentir. Au moment qu'elle va uriner elle sent quelques gouttes s'échapper malgré elle par le canal de l'urètre.

Le 22, la malade a uriné toute la journée seule. Elle est complétement sèche, quelle que soit la position qu'elle affecte dans son lit. En un mot, elle est complétement guérie.

Le 27, Mme Gourg a eu ses règles, elles ont duré, comme autrefois, deux jours et une nuit. Elles ont été assez abondantes et ont soulagé la malade.

Le 1er décembre, ayant examiné la malade, j'aperçus une portion de l'anse d'un fil placée dans la commissure droite et qui faisait saillie dans le vagin. D'un coup de ciseaux je retranchai les deux bouts. Il resta la fin de l'anse, qui est tombée le 5 au soir. Elle avait un centimètre et demi, et imitait une demi-courbure à convexité parfaitement dessinée.

Lorsque, le 6 décembre, j'examinai la malade, le tubercule avait entièrement disparu.

Le 5 décembre, cette malade a été examinée par MM. Bégin, Trousseau, Piorry, Bouillaud, Vernois, plusieurs internes, au nombre desquels M. Rosé.

En écartant les grandes lèvres et en abaissant la paroi recto-vaginale avec une vulve de bois creusée en gouttière, on aperçoit, d'avant en arrière, le long de la paroi vésico-vaginale:

1° Une cicatrice linéaire transversale occupant en grande partie le diamètre correspondant de la paroi antérieure du vagin.

2° A deux centimètres en arrière de cette cicatrice, on en aperçoit une autre formant une espèce de plan incliné avec le col de l'utérus, et s'étendant du côté droit au côté gauche, bien au delà de la circonférence du col de l'utérus. Cette cicatrice, d'un blanc rosé, parfaitement solide, était identifiée avec le col lui-même.

3° Les ulcérations que l'on observait sur le col avant l'opération n'existent plus, et on ne rencontre pas la plus petite ouverture qui puisse anormalement donner passage à l'urine.

4° Le vagin est complétement dans son état normal et n'offre aucune trace d'irritation.

5° Les hémorrhoïdes, qui formaient bourrelet autour de l'anus, ont complétement disparu.

6° Les grandes lèvres n'offrent ni tubercules, ni ulcérations.

7° Quoique la malade ait uriné à huit heures du matin, nous avons pu à dix heures retirer une certaine quantité d'urine incolore et transparente, parce que la malade était sous l'influence d'une vive émotion.

8° L'urètre est faiblement sensible à l'introduction de la sonde, si l'on compare cette irritation à celle que la malade éprouvait avant l'opération. Le canal a déjà repris un peu de son diamètre, qu'il avait perdu par suite du passage de l'urine pendant dix ans par la fistule.

9° Les organes génitaux, qui, avant l'opération, offraient une vive sensibilité, ont repris leur sensibilité normale.

10° La santé générale de la malade est entièrement revenue, ainsi que la gaieté; la coloration jaune paille a disparu et l'embonpoint commence à se faire sentir.

Nos réflexions porteront sur l'action de l'urine sur les organes génitaux, sur les troubles fonctionnels et enfin sur les effets de la suture.

Action de l'urine. — L'urine, par ce qu'on a vu d'après ce que nous avions rapporté, avait agi sur les voies génitales par son passage incessant et par les principes âcres qu'elle contient. Non-seulement la membrane muqueuse a été le siége d'un travail inflam-

matoire, mais encore d'ulcérations, d'indurations; et souvent elle a agi plus profondément en provoquant l'engorgement et l'œdème des grandes et des petites lèvres. Tout ce que l'urine a pu toucher elle l'a irrité, enflammé, ou elle y a provoqué une susceptibilité morbide.

L'urine a pu déposer de l'acide urique, qui s'est cristallisé et a agi par son séjour comme un corps étranger sur les parties intéressées. Chez cette malade, les graviers n'étaient pas en très-grande quantité, parce qu'elle était très-soigneuse d'elle-même. On aurait certainement rencontré bien d'autres désordres, si cette malade n'avait rencontré dans sa moyenne aisance de quoi veiller à une propreté si indispensable. Aussi le désordre, quoique très-grand, n'était pas en rapport avec la durée de la maladie (dix ans). Chez les femmes où la propreté manque, il se fait le plus ordinairement des amas d'acide urique dans le vagin et les grandes lèvres.

L'urine, en irritant sans cesse l'anus, a fini par déterminer une congestion hémorrhoïdaire et ensuite une dilatation variqueuse, qui a été portée au point de produire un bourrelet hémorrhoïdal qui gênait le cours des matières fécales, déjà retardées par une constipation opiniâtre. Ces varices étaient le siége d'un écoulement de sang périodique qui paraissait à chaque époque menstruelle.

Cette observation nous a permis d'étudier, sous le rapport physiologique et pathologique, la sécrétion urinaire.

A différentes reprises il nous a été possible de faire des expériences positives sur l'influence du système nerveux sur la sécrétion urinaire. Or il a été démontré par nous que l'urine comme les larmes, comme la salive, peut offrir de l'intermittence dans sa sécrétion, et pendant les ébranlements nerveux auxquels la malade était exposée, les urines devenaient rares, blanches, limpides, et enfin se supprimaient complétement lorsque l'influence nerveuse était portée à son plus haut degré. Toutes les fois que la malade était soumise à un examen, elle pâlissait, s'inquiétait vivement du résultat, et la sécrétion urinaire présentait les phénomènes que nous venons d'indiquer. Ce n'était qu'au bout de dix minutes environ

qu'on pouvait retirer quelques gouttes d'urine de la vessie, et que le calme était rétabli.

L'urine n'a pas seulement une influence fâcheuse sur les tissus qu'elle touche, mais encore sur les fonctions des organes environnants. Bien certainement l'action de l'urine n'est pas directe sur le rectum, et cependant sur toutes les femmes qui ont des fistules vésico-vaginales, il existe une constipation opiniâtre qui ne cède à aucun régime ni à aucune médication. L'urine semble alors augmenter les contractions du rectum.

L'utérus voit lui-même ses fonctions troublées. Chez certaines femmes, les règles ne se montrent qu'un an, quatre ans, et beaucoup plus longtemps après l'établissement de la fistule. Pendant dix ans, notre malade a vu ses règles remplacées par un flux hémorrhoïdal périodique. Ce n'est pas seulement par l'action directe sur le col de l'utérus que l'urine produit de semblables effets, mais bien parce qu'elle exerce une influence sur la vitalité de l'organe comme elle en exerce une sur le rectum. Tout ceci est mis hors de doute par le fait que nous avons sous les yeux. Notre malade était constipée et n'avait pas ses règles pendant le temps que l'urine a suivi une voie anormale, et nous avons vu qu'immédiatement après la guérison les fonctions de l'utérus et du rectum ont repris leur rhythme normal.

Que s'est-il passé du côté de la vessie? D'abord nous voyons l'urine portée au dehors par une sonde, et l'organe demeure inactif. C'est pour ainsi dire un vase dans lequel l'urine est versée, laquelle est portée au dehors par un conduit inerte. Mais nous voyons ensuite cette poche musculo-membraneuse reprendre ses fonctions, et successivement on voit l'urine passer entre le canal et la sonde, puis la malade avoir conscience de la présence de l'urine dans la vessie. Lorsque la sonde a été retirée, la malade a pu conserver ses urines et les retenir pendant plusieurs heures.

Quinze jours après avoir retiré l'algalie, M^me^ G... n'urinait que deux fois par jour. Le besoin d'uriner s'est donc fait sentir de plus

en plus rarement; la vessie a dû s'habituer au contact de l'urine, qu'elle ne connaissait pas depuis si longtemps.

Quoi qu'il en soit, ce n'est que le vingtième jour après avoir retiré la sonde, que la malade a uriné comme dans l'état normal, c'est-à-dire que l'urine produisait le bruit particulier qui annonce son expulsion chez les femmes. La malade elle-même a senti que la vessie avait repris son ressort et ses fonctions.

Que s'est-il passé après l'opération? De la lymphe s'est déposée entre les surfaces saignantes qui ont été ainsi confondues. Rien de différent de ce qui arrive dans d'autres régions du corps ne s'est passé chez cette malade. Dès le quinzième jour, nous voyons que la cicatrice était complète, et que, partant, la lymphe était organisée.

Tout prouve dans cette opération qu'il est indispensable de favoriser jusqu'à complète guérison le contact des lèvres de la fistule par le déplacement des parois du vagin divisées suivant le plus grand diamètre de la fistule. Voilà pourquoi nous avons dû débrider transversalement sur le col et diviser dans le même sens les parois du vagin en avant de la fistule.

Sur une malade qui est actuellement à l'hôpital, nous avons dû diviser le vagin d'arrière en avant, et suivant par conséquent le grand diamètre de la fistule qui se trouvait du col vers la vulve.

En relâchant ainsi les parois sur lesquelles la suture est appliquée, on évite leur trop prompte section, et le travail de réunion n'est alors troublé par aucun tiraillement.

Nous allons terminer par quelques réflexions sur l'espèce de sonde qu'il convient d'employer après l'opération et sur la manière dont les fils doivent être coupés. Bien des fois j'ai eu l'occasion de m'apercevoir que toutes les sondes ne pouvaient pas également servir de conducteur à l'urine. Les sondes d'argent sont lourdes, fatiguent l'urètre et la vessie, et irritent tellement par leur présence qu'on ne peut les laisser longtemps en place. Il n'en est pas de même des sondes en gomme élastique, qui sont légères, souples, et ne fatiguent par leur poids que quand elles ont trop de lon-

gueur. L'expérience m'a appris que les grosses sondes en gomme élastique ne peuvent être supportées que difficilement, à cause de la distension qu'elles amènent dans le canal et de l'irritation qu'elles provoquent. C'est à tel point que leur présence devient insupportable à certaines malades. D'ailleurs, elles ont l'inconvénient de se boucher très-promptement par le mucus et même par la vessie, qui tend à se contracter sur elles. Très-souvent je me suis trouvé embarrassé après avoir introduit de grosses sondes à différentes reprises, en voyant qu'elles ne fournissaient pas d'urine, ou qu'elles n'en donnaient que pendant un temps très-court. Les grosses sondes ne peuvent convenir que pendant quelques heures ou un jour, afin de donner issue aux caillots de sang qui peuvent s'être formés dans la vessie; et encore est-on obligé de les renouveler plusieurs fois dans la journée et de les surveiller.

Les petites sondes fatiguent moins la vessie, ne la forcent pas à se contracter, et pompent l'urine d'une manière incessante. Les caillots en bouchent avec plus de difficulté les yeux, ce qui fait que l'urine filtre toujours. Lorsqu'il se trouve beaucoup de mucus dans la vessie, on est obligé de les changer souvent.

La malade dont nous venons de rapporter l'observation ne pouvait supporter les grosses sondes, et on a été forcé d'en introduire de petites qui ont rempli toujours parfaitement le but. Quelquefois nous les avons remplacées cinq ou six fois dans la journée, et autant de fois la nuit. Il est fort important de ne pas fatiguer la vessie par la présence de l'urine, et de veiller à ce qu'elle ait une issue toujours facile. Dans les premiers temps qui suivent l'opération, le décubitus sur le dos est très-nécessaire, et ce n'est qu'au bout d'une dizaine ou d'une quinzaine de jours qu'on peut permettre à la malade de se coucher sur le côté.

Les fils ne doivent pas être retirés trop tôt, et ce n'est que vers le quinzième jour qu'on peut commencer par en retirer un; puis le dix-huitième, puis le vingt-cinquième les autres peuvent être retirés.

Pour retirer les fils en totalité, il faut diviser un des côtés de

l'anse derrière le nœud, afin de pouvoir, en tirant sur le nœud lui-même retirer la totalité de l'anse. En coupant la totalité du fil à la fois, on s'expose à laisser en place une portion de l'anse, et alors il faut attendre que la nature s'en débarrasse par les efforts d'expulsion, car elle tend toujours à chasser les corps étrangers. Sur notre dernière malade, une partie de l'anse d'un fil est restée en place, parce que les deux bouts avaient été coupés à la fois.

Enfin on a vu qu'à la suite de l'autoplastie par glissement pratiquée chez notre malade, il n'est survenu aucun trouble traumatique local ni général. La malade a été seulement incommodée par la rétention des gaz, qui déterminaient une douloureuse distension des intestins. Nous préférions que la malade ne fît pas d'efforts pour aller à la selle dans les premiers jours qui suivirent l'opération.

Notre malade cependant éprouvait un trouble périodique nerveux qui a cédé à l'administration du sulfate de quinine.

La malade est partie le 10 décembre pour Marseille.

TROISIÈME OBSERVATION. — *Fistule vésico-vaginale. — Autoplastie par glissement. — Guérison.*

La nommée Roger (Élisa), âgée de vingt-deux ans, née à Arnouville, entra à l'hôpital Saint-Louis, le 26 juin 1846, pour y être traitée d'une fistule vésico-vaginale, survenue à la suite d'un accouchement laborieux.

Douée d'une forte constitution, cette femme n'a jamais eu de maladie sérieuse. A l'âge de vingt ans, elle se maria, et eut un enfant l'année suivante (septembre 1845). Le travail dura huit jours, et ne marcha d'abord qu'avec beaucoup de lenteur, puisque l'accoucheur ne fut mandé que le quatrième jour après l'apparition de la première douleur. Toutes les tentatives que l'on fit pour l'accélérer restèrent sans résultat, et le huitième jour, on se détermina à terminer l'accouchement par l'opération de la céphalotripsie. Il y avait trois jours que la malade n'avait pas uriné. Après la délivrance, des douleurs assez intenses se déclarèrent dans les

régions vésicale et hypogastrique. Pendant les huit jours qui suivirent, il ne se manifesta aucun trouble dans le cours des urines; mais au bout de ce temps, dans un effort que la malade fit pour se tourner dans son lit, elle sentit tout à coup s'échapper par la vulve un corps étranger de couleur noirâtre, ayant le volume et la dimension d'une amande. Au même instant, sa couche fut inondée d'un flot de liquide qui, à partir de ce moment, n'a plus cessé de couler. Après la chute de l'escarre et la formation de la fistule vésico-vaginale, les forces, l'embonpoint même, ne tardèrent pas à renaître, et, au bout de quelques semaines, cette femme était en pleine convalescence.

Néanmoins, l'écoulement continuel des urines l'empêchait de reprendre ses travaux, et, après avoir cherché vainement à faire disparaître son infirmité, elle vint à Paris et entra à l'hôpital Cochin dans le service de M. Michon. Elle y resta trois semaines, pendant lesquelles elle subit plusieurs cautérisations avec le fer rouge et le nitrate d'argent. Ces cautérisations n'apportèrent aucune amélioration dans l'état de la malade, qui demanda sa sortie, et vint à l'hôpital Saint-Louis réclamer des soins. A son arrivée, on constata l'état suivant.

Il n'existe plus d'envie d'uriner. Les urines, qui ne passent plus par le canal de l'urètre, tombent involontairement et goutte à goutte dans le vagin, pour s'écouler ensuite à l'extérieur d'une manière continue, quelle que soit la position que prenne la malade.

Le doigt indicateur, introduit dans le vagin à une certaine profondeur, rencontre sur la paroi antérieure de ce conduit une large ouverture longitudinale, par laquelle il pénètre facilement dans l'intérieur de la vessie. En examinant avec plus de soin l'état des parties malades, et en procédant de dehors en dedans, on découvre au périnée, et particulièrement à la partie interne et supérieure des cuisses, une multitude de petits tubercules rougeâtres, durs et rugueux, qui semblent s'être développés dans ce point par le seul fait du contact des urines avec les téguments. Outre cette éruption, toute la peau qui avoisine les parties génitales est

rouge, sensible et dure au toucher. Elle est dépouillée de son épiderme en plusieurs points, et l'urine, continuellement versée à la surface, y produit des cuissons et des démangeaisons assez vives. Du reste, les organes génitaux dans leur partie externe ne présentent rien autre chose de particulier. Le col de la matrice, examiné au spéculum, est sain et dans son état normal.

C'est sur la paroi antérieure du vagin, à quatre centimètres du méat urinaire, que la fistule a son siége. Elle est située à gauche de la ligne médiane, environ à cinq millimètres de distance, et présente une forme longitudinale. Ses dimensions dans ce sens sont de sept centimètres d'étendue, et elle occupe en longueur une grande partie du bas-fond de la vessie, de telle sorte qu'elle arrive tout près du col de l'utérus. Son diamètre transversal est à peu près d'un centimètre, ses bords sont assez réguliers et comme tranchants; ils sont dans un état de tension permanent et considérable; l'orifice de la fistule reste béant, et une partie de la vessie vient faire hernie par cette ouverture. La sonde de femme, introduite par le canal de l'urètre, traverse la vessie, arrive dans le vagin et peut être ramenée jusqu'à l'orifice de la vulve, si l'on vient à lui imprimer un mouvement de bascule.

Quant à l'état général, il est satisfaisant. La malade désire ardemment l'opération, à laquelle elle est préparée pendant plusieurs jours par l'usage des bains, des injections et des émollients.

Le 2 juillet, je pratiquai l'opération de la manière suivante : la malade est couchée sur le dos, le tronc et la tête dans la position horizontale, et le siége approché sur le bord du lit; les jambes fléchies sur les cuisses et celles-ci sur le bassin. Alors le spéculum à une valve est introduit dans le vagin de manière à déprimer sa paroi postérieure; puis, deux aides écartent en même temps les grandes et les petites lèvres, ce qui permet à l'opérateur d'apercevoir le col de l'utérus, de le saisir avec une pince de Museux et de l'attirer au dehors par des tractions modérées. Le col de l'utérus par son déplacement a entraîné à sa suite le bas-fond de la vessie et par conséquent la fistule. Celle-ci, se présentant à

l'entrée du vagin, devient plus accessible à l'action des instruments tranchants; les bords sont avivés, soit à l'aide de ciseaux, soit avec le bistouri. C'est le second temps de l'opération.

On procède ensuite à la suture, qui est pratiquée à l'aide d'une petite aiguille courbe armée d'un fil double ciré. Cette aiguille est fortement fixée à l'extrémité d'un porte-aiguille. Le bord gauche de la fistule, étant saisi avec une pince, est traversé par l'aiguille qui le pénètre de dehors en dedans; celle-ci, débarrassée de son support, est ramenée par l'orifice de la fistule de la cavité vésicale dans le vagin. L'aiguille, étant fixée à l'extrémité de l'instrument, est de nouveau introduite dans la vessie et pénètre de dedans en dehors le bord correspondant de l'orifice fistuleux; elle est attirée alors dans le vagin, entraînant à sa suite le fil dont elle est armée. Ce fil se trouve ainsi disposé en forme d'anse à concavité inférieure dans l'épaisseur des lèvres de la fistule en deux points correspondants et à deux lignes environ de leur bord libre. Les deux chefs de ces fils sont ensuite ramenés et maintenus à l'extérieur, tandis que l'on passe successivement, et en procédant toujours d'arrière en avant, quatre autres fils disposés, comme le premier, à travers les bords correspondants de la fistule. Tous ces fils sont placés à une distance assez rapprochée les uns des autres pour qu'il ne reste entre eux aucun espace libre après le rapprochement des lèvres de l'ouverture.

Après avoir retiré la sonde de la vessie, on pratique une incision longitudinale de cinq centimètres de longueur sur le côté droit du vagin et dans la partie de ce conduit qui correspond à la fistule. Cette incision fait immédiatement disparaître la tension de ses lèvres et permet alors de les amener facilement au contact. On saisit le premier fil, et en tirant légèrement sur ses deux chefs, on voit les bords de la fistule se rapprocher exactement l'un de l'autre. On fait un double nœud pour les maintenir dans cette position, puis on coupe les deux bouts du fil pour ainsi dire à ras nœud. Les quatre autres fils sont ensuite serrés, noués et coupés absolument de la même manière.

Le col de l'utérus, débarrassé des érignes, rentre immédiatement au fond du vagin. On fait ensuite plusieurs injections d'eau froide dans cet organe, puis on le tamponne légèrement avec un cylindre d'agaric. On transporte enfin la malade dans son lit et l'on place une sonde à demeure dans la vessie. (Tilleul; potion gommeuse, 32 grammes sirop diacode.)

Pendant la journée, il n'y eut que peu de douleurs; mais, à la nuit, la malade n'eut pas un instant de repos. Les urines ont très-bien passé par la sonde.

Le 3 juillet, un peu de fièvre. Pouls à 80. Peau chaude, soif vive. Les urines continuent de passer en totalité par la sonde. (Potion antispasmodique.)

Le 4, il n'existe plus de fièvre. Les urines ont coulé par la sonde et pourtant les alèzes, placées sous le siége de la malade, sont mouillées en quelques points.

Le 5, la sonde s'étant trouvée bouchée pendant la nuit, il s'est écoulé sous la malade une certaine quantité d'urine; mais, dès qu'une nouvelle sonde a été placée, les urines ont repris leur cours habituel.

6. La sonde livre toujours passage aux urines. Il en fut de même les jours suivants : cependant la malade se plaignit plus d'une fois qu'elle sentait couler les urines sous elle, et le matin on trouvait en effet son alèze mouillée.

Du 15 au 24 juillet, l'urine passa presque en totalité par la sonde. La malade d'ailleurs a de l'appétit, le sommeil tranquille et paraît entièrement remise de son opération.

Le 24, elle fut examinée; on trouva l'un des fils tombé sur la paroi postérieure du vagin; on coupa les autres avec des ciseaux, et on les retira successivement avec les pinces. Le doigt introduit dans le vagin permit de constater que la réunion immédiate était complète. Ce jour-là on ne laissa pas la sonde à demeure; la malade fut sondée un grand nombre de fois et chaque fois on retira près d'un verre d'urine.

Le 25, on remit la sonde à demeure, et la presque totalité des urines passa par cette voie.

Le 29, la malade fut encore examinée, et on retira du vagin une dernière portion de fil.

Le 30 et le 31, on cautérisa deux fois de suite un petit bourgeon charnu qui s'était développé dans un des points où existait la suture.

La sonde alors livrait passage à la totalité des urines.

5 août. La malade est examinée de nouveau. La cicatrisation est complète.

Le 8, la réunion semble définitivement assurée.

Le 13, la sonde est retirée.

Le lendemain, la malade déclare qu'elle a uriné à volonté et gardé ses urines assez longtemps; mais que cependant il s'est fait par le vagin un léger suintement d'urine. L'examen des parties fait découvrir un petit point presque imperceptible situé vers l'extrémité postérieure de la cicatrice. Ce point a été touché avec le nitrate d'argent.

Du 14 au 20, la sonde est remise pour être définitivement retirée le 21.

Le 24, la malade affirme qu'il ne s'est pas écoulé une seule goutte d'urine par le vagin.

Quand on examine au spéculum l'intérieur du vagin, on retrouve sur la paroi latérale droite la trace de l'incision qui fut pratiquée dans ce point.

Sur la paroi antérieure on constate l'existence d'une cicatrice régulière à la place occupée par la fistule. Cette cicatrice se distingue des tissus environnants par une coloration rouge plus foncée et par quelques légères inégalités existant à la place des points de suture. Les parties génitales sont parfaitement saines, la santé générale est des plus satisfaisantes.

Aujourd'hui 27 décembre, cette malade ne perd pas une goutte d'urine et elle peut, pendant plusieurs heures de suite, conserver une assez grande quantité de ce liquide dans la vessie. Le besoin d'uriner se fait sentir plus rarement dans la nuit que dans le jour.

L'examen au spéculum ne fait pas découvrir la plus petite trace de l'ancienne fistule, mais on aperçoit, à droite et à gauche de la ligne médiane, deux cicatrices parfaitement blanches qui se dirigent d'arrière en avant. Sur le trajet de la cicatrice gauche on aperçoit deux ou trois points blanchâtres correspondant aux points de suture. La paroi antérieure du vagin a très-peu diminué de largeur.

L'orifice de l'urètre a repris à peu près la même largeur, et le bourgeonnement vasculaire et anormal qu'il offrait a cédé à quelques cautérisations avec le nitrate d'argent.

Cette malade a du reste repris sa gaieté, sa fraîcheur et son embonpoint.

QUATRIÈME OBSERVATION. — *Fistule vésico-vaginale du bas-fond de la vessie. — Opération d'autoplastie par glissement. — Guérison.*

La nommée Pellier (Joséphine), âgée de vingt-quatre ans, entra à l'hôpital Saint-Louis le 3 décembre 1845. Réglée à vingt ans, cette malade a été mariée dans le courant de la même année. On fut obligé d'extraire son premier enfant avec le forceps, trois jours de douleur n'ayant pu amener l'accouchement naturel. Cette femme devint enceinte une seconde fois, et elle accoucha à terme. Comme la première fois, l'accouchement ne put se faire par les seuls efforts de la nature, et l'on fut obligé de perforer le crâne de l'enfant et de terminer l'accouchement avec des moyens mécaniques. Les manœuvres durèrent à peu près deux heures. Il survint ensuite une inflammation violente des organes génitaux. Les premiers jours qui suivirent l'accouchement n'offrirent rien de particulier. Les urines étaient chassées par l'influence de la volonté, et ce ne fut en effet qu'au bout de six jours qu'elles passèrent par le vagin. D'abord elles s'écoulèrent en partie, et bientôt en totalité par la fistule. Les urines s'échappèrent par la voie artificielle, incomplétement d'abord, parce que l'escarre n'était qu'incomplétement séparée; elles la traversèrent ensuite

en totalité à dater du moment où l'escarre fut complétement séparée. Dès ce moment, les urines s'écoulèrent involontairement et d'une manière incessante, quelle que fût la position que prît la malade.

Voici quel était l'état de cette malade lors de son entrée à l'hôpital :

1° Les parties génitales sont baignées par l'urine;

2° Toutes les parties avec lesquelles l'urine était en contact sont érythémateuses, excoriées ou tuberculeuses;

3° La paroi vésico-vaginale est irrégulière, inégale et sillonnée par des brides qui limitent des enfoncements, ce qui dénote l'existence d'anciennes pertes de substance et d'ulcérations cicatrisées;

4° Le col de l'utérus est irrégulier et ulcéré;

5° Dans le trajet de l'urine, on rencontre des graviers;

6° Au-devant du col on sent, au toucher, une dépression où la paroi vésico-vaginale paraît manifestement amincie;

7° L'introduction d'un liquide par la vessie fait immédiatement reconnaître le siége de la fistule, car, à mesure qu'il entre dans la vessie, il en sort par le vagin sous la forme de jet continu;

8° L'introduction du spéculum permet à l'œil de reconnaître une dépression dure, formée par un tissu inodulaire, et au fond de laquelle on peut introduire une grosse sonde qui pénètre immédiatement dans la vessie;

9° Cette malade est agitée, irritable, et a les facultés intellectuelles visiblement troublées : ce n'est pas la première femme chez laquelle nous voyons ainsi des changements graves s'opérer dans les fonctions du système nerveux à propos de ces graves lésions de la vessie;

10° Par les efforts de toux, l'urine s'échappe par jets.

La direction et l'étendue de la fistule ayant été reconnues, et la nécessité d'une opération jugée indispensable, je préparai la malade par des bains, des injections émollientes, narcotiques et des purgatifs.

La malade étant convenablement disposée, je pratiquai, le 23 décembre, l'opération autoplastique par glissement.

Cette femme étant placée sur un lit, les jambes fléchies sur les cuisses et celles-ci sur le bassin, j'introduisis le spéculum à deux valves et attirai le col de l'utérus à l'extérieur à l'aide de pinces de Museux, puis je ravivai, à l'intérieur du trajet fistuleux et à la circonférence vaginale de la fistule, toutes les parties qui étaient comme indurées. Je détachai ensuite le vagin de son insertion au col, et bientôt il me fut facile d'appliquer trois points de suture entrecoupée pour maintenir en contact les lèvres de la fistule. Les surfaces saignantes furent ainsi rapprochées sans difficulté et sans qu'elles éprouvassent la moindre tension. Une sonde fut ensuite placée dans la vessie et un coussin de paille d'avoine sous les jarrets.

Le jour même de l'opération, la sonde laissa d'abord couler une urine sanguinolente, puis claire et transparente. Il y eut un peu de ténesme vésical quelques heures après l'opération, mais le pouls demeura à 70. Il ne survint par conséquent pas de fièvre.

Le 24, on put donner à la malade des bouillons, et rien de particulier ne se présenta.

Le 25, un léger ténesme vésical se renouvela; mais il n'y eut pas de fièvre, et la malade n'éprouva aucun accident. Dans l'après-midi, elle retira la sonde et urina sous elle.

Le 26, l'urine s'écoula par la sonde en totalité, jusque dans l'après-midi, où elle la retira. Elle la replaça elle-même et n'éprouva aucun accident.

Le 28, la malade ne fut pas plus raisonnable que les jours précédents. Elle urina en partie par le canal et, en partie, par la sonde.

Jusqu'au 11 janvier, la malade tantôt urina par la sonde, tantôt la retira, et cependant nous allons voir que, malgré ces imprudences, elle a guéri complétement. Les fils jusqu'ici ne furent pas retirés, et ce ne fut que le 11 janvier que j'examinai le col de l'utérus pour les extraire.

Le 11 janvier 1846, les urines ne passent plus par la fistule;

elles sortent de leur réservoir par un jet continu, lorsque la malade éprouve le besoin d'uriner. La vessie peut les garder même assez longtemps.

L'examen de la partie au spéculum permet d'apercevoir un des fils qui ont servi à pratiquer la suture; on le retire avec des pinces.

Le 15, la malade a des envies fréquentes d'uriner; on l'examine de nouveau au spéculum, et on enlève encore un fil.

Les jours suivants, l'irritabilité de la vessie disparaît; l'émission des urines se fait par le canal de l'urètre d'une manière tout à fait normale. Jusqu'au 6 février, tout va pour le mieux, malgré l'indocilité de la malade, qui, depuis longtemps déjà, fait une foule d'imprudences capables de compromettre la guérison de sa fistule. On était sur le point de la renvoyer dans sa famille, lorsque, dans la nuit du 7 février, elle est prise d'un accès de manie bien caractérisée (délire, agitation, hallucination, etc.); le lendemain, à la visite, on la trouve dans un état d'agitation considérable, la face est animée, les yeux hagards, le pouls accéléré.

(Saignée du bras; vingt sangsues sur les apophyses mastoïdes; glace sur la tête.)

Le 8, l'état maniaque continue, la malade chante et cherche toujours à s'évader. Il existe une grande incohérence dans les idées. On applique quinze sangsues derrière les oreilles et la camisole de force. (Potion antispasmodique et injections vaginales.)

Depuis lors jusqu'au 15 mars, la malade a presque toujours refusé de répondre aux questions qu'on lui adresse. Son agitation est moins grande, mais la raison est troublée. De nouvelles saignées ont été pratiquées; plusieurs vésicatoires appliqués à la nuque et aux apophyses mastoïdes sans produire d'amélioration notable dans le trouble des facultés intellectuelles.

Dans cet état, la malade a été placée, le 12 mars, dans un service d'aliénées à la Salpêtrière.

L'examen au spéculum permit alors de constater l'état définitif de l'opération qu'avait subie la malade. Le col de l'utérus ayant

été saisi et attiré vers la vulve, il fut facile de reconnaître le point du bas-fond de la vessie où la fistule avait son siége. Dans ce point existait une cicatrice linéaire un peu déprimée, offrant une étendue d'un centimètre et demi environ. Cette cicatrice était très-solide et nullement vicieuse, aucun pertuis fistuleux ne restait à sa surface; lorsqu'on l'essuyait avec une compresse ou un pinceau de charpie, elle restait sèche et ne fournissait aucun suintement urineux.

La cure de la fistule était radicale et complète.

Cinquième observation (recueillie à l'hôpital Necker, dans le service de M. Lenoir, par M. Colin, interne de ce chirurgien). — *Fistule vésico-vaginale opérée par le procédé de M. Jobert, de Lamballe. — Autoplastie par glissement. — Guérison.*

Marie-Françoise Quintin, âgée de quarante ans, aubergiste, demeurant à Uzel (Côtes-du-Nord), mariée à René Le Tessier, présente les attributs du tempérament lymphatique : ses cheveux sont blonds, sa peau blanche, maculée au visage de quelques taches de rousseur. Son embonpoint est ordinaire, sa constitution de force moyenne, sa taille également moyenne. Elle ne présente ni dans les membres, ni le long de l'épine, ni dans les os du bassin, de déformation appréciable. Le doigt, introduit dans le vagin, ne peut atteindre l'angle sacro-vertébral. Elle n'a point eu de parent contrefait. Sa mère a eu huit enfants, et tous ses accouchements ont été heureux. Cette femme dit n'avoir jamais été retenue au lit pour aucune maladie autre que la petite vérole, qui lui est survenue après une vaccination dont elle ne conserve pas de trace, et lui a laissé quelques cicatrices sur la figure. Elle ne peut préciser l'époque de l'apparition de ses règles, mais celles-ci, depuis ce moment, ont toujours été régulières; elles ne sont supprimées qu'à l'occasion de ses grossesses; elles coulent pendant quatre jours peu abondamment; le premier jour seulement elles s'accompagnent de douleurs dans les reins.

Il y a huit ans, quatre ans après son mariage, Marie Quintin

eut un premier enfant. Le travail de l'accouchement dura trois jours. Les douleurs se firent sentir uniquement dans les reins. Le médecin appelé près de la malade lui fit prendrs deux paquets d'une poudre qu'elle croit être du seigle ergoté. L'accouchement se fit dix minutes après la dernière prise. L'enfant, du sexe masculin, vint par la tête; il était peu volumineux, bien qu'à terme. Du reste, bien conformé; il vit encore.

Cette femme se rétablit parfaitement après cette couche, et vit reparaître ses règles au bout de quatre mois.

Devenue enceinte pour la seconde fois, elle eut une excellente grossesse. Elle fut prise des douleurs de l'enfantement le 26 février 1846; elle était à terme. Les douleurs, comme dans la première couche, avaient leur siége dans les reins seulement. A partir du deuxième jour elles s'accompagnèrent de crampes activées par l'administration du seigle ergoté. Elles persistèrent très-vives pendant deux jours et demi, puis, après avoir cessé pendant quinze heures, elles reparurent; mais l'accouchement ne se faisant pas, le médecin se détermina à l'achever artificiellement. Auparavant il essaya, mais en vain, de sonder la malade, qui n'avait pas uriné depuis vingt-quatre heures. Enfin il appliqua le forceps, trois jours et neuf heures après le début du travail, et en moins de cinq minutes il retira un enfant mort. Celui-ci vint par la tête. Je n'ai pu savoir ni en quelle position, ni en quelle présentation. Cet enfant, du sexe masculin, était volumineux. Dix minutes après sa délivrance la malade eut une perte peu abondante que l'on arrêta en jetant de l'eau et en appliquant une serviette mouillée sur le ventre. A partir de ce moment elle cessa complétement de voir en rouge malgré une application de sangsues faites le lendemain pour rappeler l'écoulement sanguin; mais pendant deux ou trois mois elle eut un écoulement blanc qu'elle ne croit pas avoir été fétide. Dans les jours qui suivirent son accouchement, sans frisson préalable, elle ressentit une soif vive, de la chaleur à la peau, sua beaucoup. Son pouls était fort, son appétit nul. Du reste elle ne ressentit aucune douleur dans le ventre, pas même les coliques

habituelles aux femmes dans la même position. Tous les jours son médecin pressait sur le ventre sans la faire souffrir. Ses seins ne gonflèrent qu'au bout de huit jours, seulement les parties génitales externes devinrent le siége d'un peu de douleur et de gonflement. Jusqu'au quatorzième jour elle ne prit qu'un peu de bouillon de poulet. Le huitième jour survint du dévoiement, qui ne dura que quatre ou cinq jours. Pendant ces deux premières semaines aucun trouble ne se manifesta du côté des voies urinaires. La malade sentait le besoin d'uriner. La miction était volontaire, ne se répétait pas plus souvent qu'à l'ordinaire, ne s'accompagnait d'aucune douleur. La malade n'était point mouillée dans son lit. A cette même époque le médecin examina ses urines et ne fit sur elles aucune remarque de nature inquiétante. On leva la malade pour faire son lit sans qu'elle en perdît une seule goutte; mais le quinzième jour, bien qu'on n'eût remarqué dans les urines aucun détritus qui pût donner l'idée d'une escarre, aucune odeur fétide qui pût signaler la gangrène, la malade se sentit mouillée dans son lit; ses urines coulaient involontairement sous elle, quelque position qu'elle prît. Pendant deux mois son médecin la fit inutilement coucher sur le ventre; l'incontinence d'urine persista. Au bout de ce temps il lui mit à demeure dans la vessie une sonde n° 10 ou 12 et lui permit de se coucher sur le dos. Dès lors les urines coulèrent par la sonde, que l'on ne supprima que trois mois après. On s'aperçut alors que, pendant le décubitus dorsal, la malade pouvait conserver ses urines pendant trois ou quatre heures. Au bout de ce temps, elle sentait le besoin d'uriner. A partir de ce moment on se contenta de la sonder chaque fois que ce besoin se faisait sentir, et la sonde, introduite par l'urètre, donnait un verre environ d'urine. Mais lorsque la malade se mettait sur le côté ou qu'elle se levait, elle était aussitôt mouillée par ses urines, dont le contact irritant, malgré l'usage quotidien de bains de siége, lui causait de vives cuissons vers les parties génitales, les fesses et la partie interne et supérieure des cuisses. Aussi garda-t-elle le lit constamment pendant six mois. Au bout

de ce temps elle essaya de se lever, mais chaque jour elle ne restait hors de son lit qu'une demi-heure, une heure au plus. Cependant sa santé s'était rétablie à partir du dix-septième jour après ses couches. L'appétit avait reparu. L'embonpoint lui-même était revenu. Le cinquième mois après l'accouchement elle avait vu reparaître ses règles. Celles-ci, depuis cette époque, ont toujours coulé régulièrement tous les mois, autant de temps et aussi abondamment qu'à l'ordinaire. Outre l'usage des bains de siége et de la sonde, son médecin lui fit faire des injections dans le vagin, et cautérisa une quarantaine de fois les bords de la fistule avec un crayon de nitrate d'argent. Aucune amélioration ne se manifestant dans son état, la malade vint à Paris réclamer les soins de M. Lenoir.

Le 1er février 1847 elle entre à l'hôpital Necker, où elle est couchée salle Sainte-Marie, n° 9. Nous la trouvons dans l'état suivant.

Elle a son embonpoint ordinaire; son teint est naturel; elle conserve la gaieté habituelle de son caractère; son intelligence est moyennement développée; elle désire vivement être opérée pour retourner dans son pays; elle est pleine de confiance dans le résultat de l'opération. Il n'existe aucun trouble ni dans les fonctions encéphalo-rachidiennes, ni du côté de la circulation, ni du côté de la respiration. Son appétit est bon, ses digestions normales, son ventre indolent, bien conformé. Elle est ordinairement constipée.

Lorsqu'elle est couchée sur le dos, elle conserve ses urines pendant trois ou quatre heures, parfois cinq heures, sans qu'il en coule sous elle, même lorsqu'elle écarte largement les cuisses. Une sonde, introduite alors dans le vagin, ne leur donne point issue; mais si l'on introduit cette sonde par l'urètre dans la vessie, on en retire de 100 à 140 grammes. Dès qu'elle fait effort pour se satisfaire, les urines s'écoulent en totalité par le vagin; de même elle les perd involontairement par cette voie, lorsqu'elle vient à rire, à tousser ou à éternuer. Elle peut se tenir sur son séant sans en perdre, à moins qu'elle n'écarte largement les cuisses. Mais lorsqu'elle se couche sur le côté, ses urines s'écoulent

continuellement et involontairement. A genoux elle les perd de même. Dans la position verticale, qu'elle marche ou qu'elle reste immobile, elle ne peut en garder dans la vessie. Ses parties génitales externes, les régions internes et supérieures de ses cuisses, le périnée, la rainure interfessière, sous l'influence de ce contact irritant, sont le siége de cuissons vives.

Ces taches sont de couleur jaunâtre un peu bistrée, luisantes; les grandes lèvres sont indurées vers leurs bords libres; elles présentent un état rugueux. Du reste, il n'existe d'ulcération et de dépôt calcaire ni à ce niveau, ni dans les environs. Examiné à l'aide du toucher et du spéculum, le col de l'utérus est sain; le vagin est très-large et de couleur normale. Sur le milieu de sa paroi intérieure, à quatre centimètres du méat urinaire, existe un trou qui fait communiquer ce canal avec la vessie par un trajet direct. Cette perforation est allongée transversalement; elle a, dans ce sens, deux centimètres et demi, tandis que les bords qui la limitent d'avant en arrière sont presque en contact. Cette perforation ne peut admettre complétement la première phalange du doigt indicateur, mais pourrait donner passage à un cylindre d'un centimètre au moins de diamètre. Les bords en sont arrondis, de même couleur que le reste du vagin, ni tendus, ni indurés. La sonde, introduite par l'urètre, peut être ramenée dans le vagin par cette fistule, ou bien poussée plus avant dans la vessie, et alors de l'urine s'écoule par son canal lorsque la malade a gardé quelque temps la position horizontale. Du reste, le canal de l'urètre ne présente d'autre altération qu'une dilatation considérable de son calibre, où l'on peut sans violence introduire le doigt annulaire, et l'on sent ce doigt resserré par un anneau au col de la vessie.

M. Lenoir, après avoir préparé la malade à l'opération par des bains répétés, et lui avoir donné un léger laxatif, applique sur elle le procédé d'autoplastie par glissement, inventé par M. Jobert pour des cas analogues. Il modifie seulement un des temps de l'opération.

Le col de l'utérus, saisi avec deux érignes, est abaissé au ni-

veau de l'entrée de la vulve. Le chirurgien en détache le vagin en avant dans toute son étendue transversale; il en décolle le bas-fond de la vessie jusqu'à une hauteur d'un centimètre au moins à partir de l'insertion vaginale; puis, laissant remonter le col de l'utérus, il introduit par l'urètre le doigt indicateur dans la vessie, déprime vers la vulve la partie de l'organe où siége la fistule, et, sur le doigt, il avive avec des ciseaux courbés les bords de cette dernière, ainsi que la partie adjacente du vagin dans une étendue de huit à dix millimètres. Enfin il réunit les parties avivées à l'aide de quatre points de suture. Immédiatement après l'opération, M. Lenoir remarque que le fil le plus rapproché du côté gauche est dirigé un peu obliquement et réunit moins régulièrement les lèvres de la plaie que les trois autres fils. Toutefois la réunion paraissant suffisante, il fixe une sonde n° 12 dans la vessie. La malade est couchée dans son lit, les jambes à demi fléchies, peu écartées, les jarrets appuyés sur des coussins. (Chiendent nitré; bouillon.)

Dans les jours suivants on change la sonde toutes les vingt-quatre heures.

Jusqu'au deuxième jour, aucun accident ne survient, la malade n'éprouve aucun des phénomènes de la fièvre, ne perd même pas l'appétit. Il ne s'écoule de sang ni par l'urètre, ni par le vagin. Pas de douleur dans la plaie. Une selle.

Le deuxième jour apparaissent des douleurs, non pas dans la plaie, mais dans le bas-ventre. Ces douleurs s'accompagnent d'envies fréquentes d'uriner; du reste pas de fièvre.

L'abdomen conserve sa forme, son volume normal; il ne devient point douloureux à la pression. (Julep; diacode.) Les douleurs diminuent et se calment complétement au bout de quarante-huit heures. Les urines, jusqu'au troisième jour, passent en totalité par la sonde; mais, à partir de ce moment, il s'en écoule sous la malade.

Le quatrième jour, on fait mettre l'opérée à quatre pieds sur son lit, le derrière relevé, et écartant les parois vaginales, posté-

rieures et latérales, on examine la suture; la réunion paraît se faire. Toutefois, à partir de la nuit suivante jusqu'au septième jour, quelque soin que l'on mette à arranger la sonde, les urines coulent en totalité sous la malade.

Le lendemain, cinquième jour, les envies fréquentes d'uriner reviennent et durent vingt-quatre heures. On examine de nouveau la suture. Les bords de la plaie ne présentent ni rougeur, ni gonflement; les points de suture les maintiennent bien réunis dans les trois quarts de leur étendue du côté droit; mais à gauche on remarque entre eux une dépression où la réunion paraît incomplète. Du pus liquide, jaunâtre, s'écoule de la partie supérieure du vagin. A partir de ce moment on renouvelle tous les jours ce même examen.

Le huitième jour, on remarque que le siége de la malade, irrité par le contact des urines, est devenu rouge, douloureux. Il s'excorie les jours suivants.

A partir du neuvième jour, les urines recommencent à s'écouler par la sonde; mais une partie continue de s'écouler sous la malade. Celle-ci qui était découragée, en se voyant mouillée par elles comme avant son opération, reprend confiance.

Le onzième jour, on enlève les deux fils latéraux, et, le douzième, celui du milieu. On constate que, dans les quatre cinquièmes de l'étendue de la plaie, du côté droit, la réunion de ses lèvres est parfaite; la cicatrice linéaire rosée très-solide. Sur le côté gauche, au contraire, ses lèvres sont légèrement béantes. Là on voit une dépression au fond de laquelle existe un passage oblique du vagin dans la vessie, de gauche à droite, par lequel on peut faire passer une sonde de femme. On continue l'usage de la sonde à demeure jusqu'au quatorzième jour.

Pendant toute la durée de ce traitement, il n'est survenu aucun accident fébrile, ni frisson, ni accélération du pouls, ni chaleur à la peau. Toutes les fonctions thoraciques et cérébrales sont restées intactes; le sommeil seulement a été presque nul; l'appétit a persisté. La malade prenait des bouillons et du potage.

Le douzième jour, on l'a mise à une portion. Elle eût bien mangé davantage. Jusqu'à la même époque, elle n'est pas allée à la selle. Des lavements amènent des garde-robes naturelles.

Le quatorzième jour, on commence à lui donner des bains. Les excoriations de la région sacrée se guérissent rapidement; mais la sonde à demeure une fois supprimée, les urines s'écoulent en totalité par le vagin comme avant l'opération; la malade les perd involontairement dans les mêmes circonstances. Sous ce rapport, cette femme n'a obtenu aucune amélioration.

Le 5 mars, vingt-quatre jours après la première opération, son état ne s'étant pas amélioré, M. Lenoir cautérise le passage oblique que nous avons dit persister sur le côté gauche de la fistule avec un cautère olivaire rougi au feu. Il remet la sonde à demeure dans la vessie. Aucun accident, ni ténesme, ni douleur, ne succèdent à l'application du cautère. Les urines coulent complétement par la sonde jusqu'au quatrième jour, mais, à partir de ce moment, elles coulent de nouveau par la fistule et mouillent le lit de la malade. La cicatrisation des bords de la plaie, déterminée par la cautérisation, étant opérée, on constate que le trajet fistuleux a été considérablement agrandi. Il a été converti en un trou arrondi, qui fait communiquer directement le vagin et la vessie. Il peut admettre une sonde n° 12 environ.

Le 22 mars, M. Lenoir fait pour la deuxième fois, sur cette malade, l'application du procédé de M. Jobert, qu'il modifie de la manière suivante :

Au lieu de placer la malade sur le dos, les cuisses fléchies, écartées et maintenues par des aides, il la fait mettre à quatre pieds, le siége élevé, la tête et la région lombaire abaissées : il fait écarter vers le sacrum la paroi postérieure du vagin, et de l'un et de l'autre côté les parois latérales avec le doigt des aides. Dans cette position, on découvre facilement la fistule.

Introduisant alors son doigt indicateur dans la vessie par le canal de l'urètre, il avive, comme la première fois, les bords de la fistule, et pratique quatre points de suture éloignés d'environ six

millimètres les uns des autres. Enfin, faisant retourner la malade sur le dos, comme la place M. Jobert, il termine l'opération par détacher le vagin du col de l'utérus, en ayant soin de l'en séparer dans une plus grande étendue sur le côté gauche que sur le côté droit. Sur le premier côté, en effet, il prolonge son incision jusqu'au niveau du diamètre transversal de l'organe.

La malade est ensuite reportée dans son lit; on lui met une sonde n° 12 à demeure dans la vessie. (Chiendent nitré; potion diacodée; bouillons, potages.)

Comme la premiere fois, il ne survient aucun accident après cette opération. Le pouls reste calme, à 75 pulsations par minute. La chaleur de la peau reste normale. Toutefois, le premier jour, la malade, que l'on a couchée la tête basse, éprouve quelques coliques; son ventre se développe un peu, devient très-légèrement douloureux à la pression dans toute son étendue. Du reste, ni selles, ni vomissements. La physionomie reste naturelle.

Le neuvième jour, on lui élève davantage la tête, et les accidents de la veille, qui avaient résisté à l'application d'un cataplasme, disparaissent; on fait chaque jour dans le vagin une injection d'eau tiède. Il s'écoule de ce conduit une sanie rougeâtre qui devient purulente à partir du troisième jour. On change la sonde tous les jours; jusqu'au troisième, elle donne issue à la totalité des urines. Celles-ci restent transparentes; toutefois, elles prennent une teinte très-légèrement opalisée. Sur les sondes se dépose un mucus filant qui les bouche de temps en temps.

Du troisième au cinquième jour la sonde cesse à plusieurs reprises de fonctionner. De l'urine s'écoule sous la malade, qui est mouillée dans son lit; on ne peut savoir par où cet écoulement se fait. Le méat urinaire devient rouge, l'introduction de la sonde douloureuse. Du reste, pas de ténesme.

A partir du cinquième jour, ces derniers accidents diminuent sans cesser complétement. Le sixième, les urines cessent de mouiller le lit de la malade, et, de là jusqu'à la fin du traitement, elles continuent de couler en totalité par la sonde.

Le septième jour, la malade, qui pour tout accident ne se plaint que de ne pouvoir dormir, parce qu'elle est mal couchée, demande une portion d'aliments; on la lui accorde.

Le neuvième jour, M. Lenoir examine pour la première fois la suture. Il n'existe ni rougeur, ni gonflement autour des fils. Ceux-ci ne coupent point encore les tissus. La réunion paraît immédiate et complète dans toute l'étendue de la plaie. La sanie purulente, qui venait de la partie supérieure du vagin, est beaucoup moins abondante. Sur la demande qu'en fait la malade, M. Lenoir permet de faire son lit. Cette femme qui jusque-là n'avait encore pu dormir que la deuxième nuit après son opération, retrouve dans les nuits suivantes un sommeil tranquille. Enfin, le 3 avril, douze jours après l'opération, M. Lenoir enlève les quatre fils. Ceux-ci n'ont point coupé les chairs. Les trous par où ils passent ont seulement été un peu élargis. Ils donnent issue à un peu d'urine. Ce suintement persiste par l'un d'eux pendant deux jours; on le touche avec un crayon de nitrate d'argent, le suintement disparaît.

Presque tous les jours, M. Lenoir examine la cicatrice, qui s'affermit de plus en plus. Le quinzième, pendant cet examen, il engage la malade à faire des efforts pour uriner; quelques gouttes d'urine sont expulsées par l'urètre, il n'en sort pas du tout par le vagin.

De légères excoriations se sont faites sur le sacrum. Un pansement avec du linge cératé et un bain donné le treizième jour, amènent une guérison rapide. Le seizième jour, la malade n'étant point encore allée à la selle depuis son opération, M. Lenoir lui donne 30 grammes d'huile de ricin, qui amènent deux évacuations.

Enfin, le dix-neuvième jour, la sonde à demeure occasionnant dans l'urètre une irritation caractérisée par un suintement sanguinolent, sans ténesme, ni douleur, excepté quand on l'introduit ou qu'on la retire, M. Lenoir la fait supprimer et recommande de sonder la malade de trois en trois heures. Il lui permet en outre de se lever, mais cette malade use rarement de cette permission,

parce que, comme plus tard nous le verrons, elle perd involontairement ses urines dans la position verticale.

Du reste, aucun accident ne survient; la guérison de la fistule persiste. Depuis la suppression de la sonde, le lit de la malade n'a point été mouillé par ses urines.

Le 22 avril, un mois après l'opération, cette femme se trouve dans l'état suivant :

A la place où existait la fistule, c'est-à-dire à quatre centimètres du méat, on voit sur la paroi vaginale antérieure une cicatrice linéaire dirigée transversalement, longue de quatre centimètres environ, à peine déprimée, parfaitement solide. Le long de cette cicatrice, en avant et en arrière, on voit six petites dépressions, trace des points de suture pratiqués dans les deux opérations.

Lorsqu'on engage la malade à faire des efforts pour uriner, on voit le bas-fond de la vessie, situé en arrière de la cicatrice, faire dans le vagin une saillie légère à peu près comme dans un commencement de cystocèle vaginale. Cette saillie est bridée en avant par la cicatrice, qui ne se déprime pas sous l'effort de la malade. Elle disparaît dès que l'effort cesse, et alors la paroi antérieure du vagin n'est pas plus relâchée qu'à l'état normal. Pendant cet effort, aucun liquide ne s'écoule par le vagin, tandis qu'un jet d'urine s'échappe par l'urètre, et si l'on écarte les grandes lèvres, ce jet est projeté à quinze ou vingt centimètres. En avant de la lèvre antérieure du col de l'utérus et sur son côté gauche, à l'insertion du vagin à cette lèvre, on voit une cicatrice un peu froncée, déprimée à son centre, qui n'a pas plus de deux ou trois millimètres d'étendue d'avant en arrière. En arrière d'elle et autour du museau de tanche, est survenue une ulcération granuleuse des lèvres du col, large comme une pièce d'un franc, et séparée de la cicatrice précédente par une bande de tissu sain.

Dans le fond du vagin se trouve un liquide jaunâtre purulent, mêlé de mucus semi-transparent. Quand la malade reste assise ou couchée, quelque position qu'elle prenne, soit sur le dos, soit sur les côtés, quelque mouvement qu'elle imprime à ses cuisses, soit

qu'elle les relève, qu'elle les écarte ou qu'elle les rapproche, elle ne perd pas une seule goutte d'urine involontairement. Elle n'en perd pas non plus quand elle tousse, qu'elle éternue ou qu'elle rit. Au bout de quatre ou cinq heures, elle éprouve le besoin d'uriner, et rend, sous forme de jet qui sort en totalité par l'urètre, de 200 à 250 grammes d'urine.

Lorsqu'elle est à genoux ou dans la position verticale, même sans faire ni effort, ni mouvement, ses urines s'écoulent involontairement sous elle goutte à goutte, si ses cuisses sont rapprochées; par un filet continu, si elle les écarte. Par l'inspection directe, en écartant les grandes lèvres, on peut s'assurer qu'alors elles sortent uniquement par le canal de l'urètre, et qu'il ne s'écoule pas une seule goutte par le vagin.

Le canal de l'urètre conserve une largeur anormale; le méat est rouge, un peu gonflé depuis huit jours. M. Lenoir a cautérisé deux fois ce canal avec un long crayon de nitrate. Jusqu'ici aucun avantage appréciable n'en est résulté : l'incontinence d'urine persiste dans les conditions précédemment indiquées. Du reste, les parties génitales externes et les régions voisines ont repris leur coloration et leur souplesse normale. L'état rugueux des grandes lèvres, les excoriations du sacrum sont complétement guéries; la santé de la malade est excellente, cette femme mange et digère trois portions. Toutefois elle n'a pas encore vu reparaître ses règles depuis son entrée à l'hôpital; mais elle n'en éprouve aucun inconvénient. Son teint est un peu pâle.

Elle s'inquiète de son incontinence d'urine et désire vivement retourner dans son pays.

SIXIÈME OBSERVATION. — *Fistule vésico-vaginale ancienne, opérée deux fois par la suture entrecoupée, et guérie d'une manière radicale et complète à la seconde opération.*

La nommée Godart (Marie), âgée de vingt-huit ans, domestique, entre à l'hôpital Saint-Louis, le 27 mars 1847, pour y être traitée

d'une fistule urinaire survenue, il y a neuf ans, à la suite d'une première couche.

Douée d'un tempérament sanguin, d'une constitution plutôt faible que robuste, cette fille est d'une intelligence bornée. Aussi les renseignements qu'elle fournit manquent-ils de justesse et de précision. Ce qu'elle se rappelle le mieux, c'est qu'à dix-huit ans elle est devenue enceinte, peu après l'éruption de ses règles, et qu'au neuvième mois de sa grossesse, elle est accouchée seule et naturellement après un travail de courte durée.

Au bout de quelques jours, ayant déjà repris ses travaux, elle s'aperçoit que l'émission des urines offre quelque chose d'insolite et ne s'accomplit plus comme par le passé. Un sentiment de gêne et d'embarras se fait sentir au passage du liquide; parfois, les vêtements se trouvent imprégnés d'humidité. Ces phénomènes ne fixent toutefois que passagèrement l'attention de la malade, et elle demeure ainsi près de sept ans avant de songer à se faire guérir d'une telle infirmité. Cependant, en 1845, elle vient à Paris au terme d'une seconde grossesse et entre à l'hôpital de la Pitié, où elle accouche. Après ses couches, elle se fait examiner pour la première fois et apprend qu'elle est affectée d'une fistule urinaire, mais elle refuse l'opération et retourne à ses travaux. Enfin, au mois de janvier dernier, elle revient à Paris et entre dans le service de M. Lisfranc, où elle passe deux mois sans subir aucune opération, ni aucun traitement spécial. Au bout de ce temps, elle quitte la Pitié et vient à Saint-Louis, où elle est admise dans l'état suivant :

On constate alors une ouverture fistuleuse qui établit une communication entre la vessie et la vagin. Cette ouverture est placée sur la ligne médiane à un centimètre en arrière de l'orifice du canal de l'urètre. Une sonde de femme, introduite dans ce conduit et ramenée dans le vagin par l'ouverture fistuleuse, permet d'en apprécier facilement la forme et les dimensions. Cette ouverture est assez exactement circulaire et semble formée comme par un emporte-pièce. Son diamètre est de sept millimètres environ.

Les bords sont minces. En arrière, la paroi antérieure du vagin, ainsi que toute la surface de ce conduit, ne présente rien de particulier. Le col de l'utérus est sain, de même que les parties génitales externes. On constate, en outre, que pendant la miction le jet des urines est affaibli et qu'il en passe en quantité notable par la fistule. Le même phénomène s'observe encore lorsque la malade est demeurée longtemps sans uriner et que la vessie se trouve distendue par le liquide; alors de l'urine s'échappe dans le vagin par la fistule, principalement dans la station.

Dès son entrée à l'hôpital, la malade est soumise à l'usage des bains, des injections, de quelques purgatifs, et lorsqu'elle est suffisamment préparée, je l'opère, le 30 mars, de la manière suivante :

Couchée sur le dos comme pour l'opération de la taille, le siége approché sur le bord du lit, les jambes fléchies sur les cuisses, et celles-ci sur le bassin, la malade est maintenue invariablement dans cette position par plusieurs aides. Le spéculum à une valve est alors introduit dans le vagin et fixé de manière à déprimer en arrière la paroi postérieure de ce conduit. Une sonde de femme, passée par le canal de l'urètre dans l'intérieur de la vessie, est également confiée à la main d'un aide. D'autres aides écartent de chaque côté les grandes et les petites lèvres, de façon que l'orifice vulvaire se trouve suffisamment dilaté. La fistule étant alors très-visible et accessible à l'action de l'instrument tranchant, j'en saisis les bords avec une pince à dents de Paris et j'enlève en dédalant et circulairement une lame mince des divers tissus qui les constituent. Les points du contour de la fistule qui ont échappé à l'action du bistouri sont rafraîchis avec les ciseaux. Des surfaces saignantes assez larges étant obtenues par le ravivement, on procède immédiatement au rapprochement de ces surfaces et à l'application de points de suture. Au lieu de réunir transversalement, ce qui pourrait avoir l'inconvénient d'abaisser et d'attirer en arrière le méat urinaire, je fais une suture antéro-postérieure. Pour cela, je saisis de la main gauche le bord corres-

pondant de la fistule au moyen d'une pince à dents; la main droite armée d'un porte-aiguille, à l'extrémité duquel se trouve une aiguille courbe enfilée d'un double fil ciré, parfaitement lisse, je traverse la lèvre de la fistule à trois millimètres de son bord libre, pénétrant ainsi du vagin dans la vessie pour le côté gauche, et de la vessie dans le vagin pour le côté droit. L'aiguille, alors débarrassée de son support et attirée à l'extérieur avec une pince ordinaire, fournit par son passage à travers les lèvres de la fistule une anse de fil dont la convexité se trouve dans l'intérieur de la vessie et dont les deux chefs restent pendants à l'extérieur. Deux autres fils semblablement disposés sont passés successivement et de la même manière, en procédant d'avant en arrière, à travers les bords de l'ouverture fistuleuse. Ces divers fils se trouvent placés à deux ou trois millimètres de distance les uns des autres, et par conséquent ne laissent entre eux qu'un faible intervalle. Après avoir nettoyé et abstergé les surfaces saignantes, enlevé, à l'aide de quelques injections d'eau froide, les caillots de sang tombés dans le vagin, les fils sont médiocrement serrés et noués successivement sur les lèvres de la fistule rapprochées dans un contact immédiat.

Avant de les couper, une incision transversale de quatre centimètres de longueur est faite sur la membrane muqueuse à douze millimètres en arrière de la suture. Cette incision produit un certain degré de relâchement sur les points de suture. Je coupe ensuite les fils à ras le nœud, et après avoir retiré la sonde de la vessie, le spéculum du vagin, et nettoyé toutes les parties, je place un tampon d'agaric dans le vagin et une sonde à demeure dans la vessie. La malade est portée dans son lit, couchée sur le dos, les genoux élevés au moyen d'un coussin placé sous les jarrets et le tronc dans la position presque horizontale. Un vase est placé sous le bec de la sonde pour recevoir les urines. On donne à la malade de l'infusion de tilleul édulcoré avec le sirop de gomme, et dans le courant du jour, deux pilules d'ext. aq. d'opium de 1 centigr. chacune.

Après l'opération, la malade reste silencieuse tout le jour et n'accuse aucun besoin, ni aucune souffrance. Les urines coulent assez abondamment par la sonde.

Le 1er avril, il n'y a pas de douleur et à peine de la réaction. On change la sonde à la visite du matin.

Le 2 avril, tout va pour le mieux. Déjà la malade demande des aliments. La sonde fonctionne parfaitement, mais on est obligé de la changer dans la nuit et on la trouve bouchée par des concrétions de matières lithiques. Les urines ont repris toute leur transparence.

Le 3, on accorde des bouillons et des potages à la malade, vu que son état est très-satisfaisant.

Le 4, rien de particulier; la sonde livre toujours passage aux urines.

Le 5, on aperçoit un peu de matière muco-purulente à l'entrée de la vulve; on l'enlève avec une éponge et l'on retire en même temps le tampon d'agaric placé dans le vagin. La malade est sans fièvre.

Le 6, même état.

Le 7, j'examine la suture et je trouve deux des fils tombés dans le vagin; le troisième lui-même ne tient presque plus; je le retire avec une pince. Les bords de la fistule sont légèrement écartés et non réunis. (Lotions et injections vaginales.)

On continue l'usage de la sonde à demeure et on donne chaque jour, ou tous les deux jours, un grand bain à la malade. Lorsque la malade est suffisamment préparée, on procède, le 23 avril, à une seconde opération. Pour cela, la malade étant placée sur le lit, comme il a été dit plus haut, et maintenue par des aides, le spéculum à une valve est introduit dans le vagin et confié à la main d'un aide, qui refoule en arrière la paroi postérieure. Les grandes lèvres étant écartées, je ravive avec beaucoup de soin le contour de la fistule, tantôt avec les ciseaux, tantôt avec le bistouri. Ce premier temps de l'opération terminé, je passe de suite à l'application des points de suture; les parties se prêtant mieux à une

réunion transversale qu'à une réunion antéro-postérieure, je saisis le bord antérieur de la fistule avec une pince, et commençant vers l'angle gauche de la perte de substance, je le traverse avec l'aiguille à deux ou trois millimètres de son bord libre du vagin dans la vessie, puis de la vessie dans le vagin. L'aiguille est alors saisie avec une pince et attirée à l'extérieur, entraînant avec elle le fil dont elle est armée. Trois autres fils, disposés de la même manière, sont passés successivement, en allant de gauche à droite, à travers l'un et l'autre bord de la fistule. Après s'être assuré par une légère traction qu'il ne reste qu'un petit intervalle entre chacun de ces fils, je les serre médiocrement et les noue sur les bords de la fistule ramenés au contact. Cela fait, j'obtiens une suture transversale régulière, offrant environ deux centimètres de longueur. A un centimètre en arrière de cette suture, la membrane muqueuse du vagin est divisée dans une étendue proportionnelle à celle de la suture, ce qui produit un relâchement notable sur les lèvres de la suture et prévient toute espèce de tiraillement. Les fils sont ensuite coupés tout près de leurs nœuds, les parties génitales sont lavées avec soin, un tampon d'agaric est introduit dans le vagin et une sonde à demeure dans la vessie. La malade est portée dans son lit avec précaution et placée comme il a été dit ci-dessus. (Infusion de tilleul; potion avec 32 grammes de sp. de pavot blanc.)

Pendant les vingt-quatre heures qui suivent l'opération, elle est entièrement calme et n'éprouve aucune douleur; les urines coulent abondamment par la sonde et ne renferment pas de sang.

Le 24 avril, il existe un peu de chaleur à la peau et une légère accélération du pouls. Il n'y a point de douleurs; les urines vont parfaitement.

Le 25, il n'y a plus de fièvre. La sonde a été changée pendant la nuit; elle continue de livrer passage aux urines. On accorde un potage et quelques bouillons à la malade.

Le 26, tout continue d'aller pour le mieux. On retire le tampon

d'agaric placé dans le vagin et l'on fait une injection d'eau tiède dans l'intérieur de ce conduit.

Le 27 et jours suivants, il ne se passe rien de particulier. La malade demande des aliments. On lui accorde une portion.

Le 1er mai, ayant mangé plus que de coutume, elle éprouve une indigestion accompagnée de vomissements et suivie de diarrhée. Cet accident est suivi, pendant quarante-huit heures, de deux accès de fièvre à forme intermittente quotidienne, qui cède le troisième jour à un lavement composé avec 128 grammes d'infusion de camomille et additionné de 0,3 décigrammes de sulfate de quinine.

Le 3 mai, on porte la malade à l'amphithéâtre, et l'on examine l'état de la suture. Les fils sont toujours en place et les bords de la fistule dans un contact immédiat. On coupe les fils et on les retire avec précaution. Les lèvres de l'ouverture fistuleuse restent adhérentes. La sonde à demeure est placée de nouveau dans la vessie et continue de livrer passage à la totalité des urines. (Deux portions d'aliments.)

Le 7 mai, on examine de nouveau la malade et l'on constate, cette fois, que la réunion est complète.

Le 10, nouvel examen qui montre que la cicatrisation des bords de la fistule est complète et définitive. On cesse de mettre une sonde à demeure dans la vessie.

Enfin, le 15 mai, en présence de M. Lallemand et d'un grand nombre de médecins et d'élèves, on constate une dernière fois le résultat de l'opération. On voit alors à la place de la fistule une cicatrice régulière et rosée, offrant environ deux centimètres de longueur et disposée transversalement. Cette cicatrice, au toucher, est ferme et solide. Elle ne présente aucune difformité. Lorsque surviennent les envies d'uriner, la malade expulse ses urines en jet continu et sans aucune espèce de difficulté. Aucun écoulement ni suintement d'urine, ne se fait dans le vagin. Le canal de l'urètre est entièrement libre et livre un passage facile à la sonde. En outre, l'état général de la malade est des plus satisfaisants. Son appétit est excellent, et ses forces sont revenues à leur état normal.

Les observations qui viennent d'être rapportées me paraissent établir suffisamment les avantages de la méthode autoplastique par glissement. Six observations ont été successivement exposées, et toutes ont rapport à des fistules graves avec perte de substance et qui affectaient le bas-fond de la vessie. Deux de ces fistules existaient sur le col même, et deux occupaient la plus grande longueur du vagin et se rendaient à une très-faible distance de son insertion au col utérin. On a pu remarquer que toutes avaient été produites par l'accouchement, et il est probable que la pression de la tête de l'enfant avait déterminé la gangrène. S'il en eût été autrement, la fistule n'aurait pu être expliquée que par une déchirure des parois du conduit vulvo-utérin, et alors les urines auraient immédiatement pris cette nouvelle voie. Or, c'est ce que nous n'avons pas observé, car l'urine n'a commencé à s'échapper par le vagin qu'au bout de plusieurs jours.

Chez toutes nos malades nous avons observé des altérations ayant leur siége dans les organes génitaux. Lorsque les urines s'écoulent sans cesse par une large ouverture faite à la cloison vésico-vaginale, nous n'avons pas rencontré de dépôt lithique, mais aussitôt que le trajet leur permet de séjourner, il s'est déposé de l'acide urique dans le vagin et les parties génitales externes. La forme du trajet n'a pas toujours de l'influence sur ces dépôts, et la constitution de la femme nous a paru en avoir beaucoup sur leur formation. Au reste, on a pu voir que le vagin, les organes génitaux externes étaient rouges, indurés, ulcérés même par endroits, suppurants et couverts de plaques et de pustules. Nous avons rencontré presque toujours des granulations, des ulcérations et une diminution de consistance du col de l'utérus, lorsque les fistules étaient surtout récentes. Voilà pourquoi il est si utile, lorsqu'on prend un point d'insertion sur le col de l'utérus, d'exercer sur lui des tractions avec prudence. Il n'en est pas toujours ainsi lorsque les fistules sont anciennes.

On a dû voir que les fonctions utérines s'étaient modifiées au point de ne pas permettre le retour des règles. L'urine, par son

contact sur l'utérus, a paru produire de semblables effets. N'avons-nous pas vu reparaître les règles immédiatement après la réunion, et sur l'une de nos malades nous avons vu disparaître des bourrelets hémorrhoïdaux et des flux sanguins.

Il est curieux de voir les changements qui se passent dans l'organisme avant et après l'oblitération de ces fistules. Il est certain que la santé générale s'altère, et que beaucoup de malades maigrissent et s'affaiblissent. Toutes d'ailleurs sont tristes et paraissent plongées dans le plus profond découragement; plusieurs ont offert des symptômes d'aliénation mentale.

Après la guérison tout change, la physionomie reprend sa gaieté, l'esprit sa souplesse, et la vie semble renaître.

Dernièrement, nous avons observé ces variations de scène sur une malade pleine d'intelligence, et chez laquelle l'opération a été couronnée de succès. Plus tard, je rapporterai son observation.

Chez quelques malades, nous avons observé des douleurs vives dans les membres inférieurs, qui suivaient principalement le trajet du nerf sciatique. Les douleurs étaient souvent accompagnées de convulsions, de contracture et d'atrophie. Elles pouvaient tenir à l'accouchement et à la compression du plexus sacré, et, dans quelques cas, l'irritation prolongée, déterminée par le contact de l'urine sur les organes génitaux, nous semble y avoir donné lieu.

On a pu voir, par la lecture de nos observations, que les urines s'écoulaient involontairement et constamment, quelle que fût la position prise par la malade, lorsque la cloison vésico-vaginale était ouverte ou détruite sur la ligne médiane. La fistule est-elle située sur les côtés, dans de certaines positions, le trou se ferme par le plissement du vagin, par l'application de la paroi opposée, par la pression du col de l'utérus; mais si les malades bougent ou se lèvent, l'urine les inonde de suite.

Nos observations font mention de la durée des fistules et des tentatives qui ont été faites pour obtenir la guérison. Nous voyons qu'une de nos malades a été opérée deux fois par un médecin distingué des colonies, M. Lherminier. La première opération fut

faite par la suture, et la seconde par mon procédé d'élytroplastie. On se rappelle que nous avons fait une troisième opération à cette malade, en détachant le vagin de son insertion, et on sait que l'opération a eu une issue heureuse. Sur une seconde malade, chez laquelle la vessie et le vagin ne formaient plus qu'une seule cavité, j'ai pratiqué d'abord la cystoplastie avec un lambeau emprunté à la fesse, et ensuite l'autoplastie par glissement. La première opération a été sans succès et la seconde a réussi. Enfin, les trois autres malades ont été opérées par glissement, sans avoir subi d'autre opération.

Dernièrement j'ai pratiqué, à l'hôpital Saint-Louis, l'autoplastie par glissement sur une femme qui avait été inutilement cautérisée avec le fer rouge. La fistule reposait sur le col. Le ravivement a pu néanmoins se faire, mais la suture a coupé les tissus avant l'adhésion. Ce revers était dû au ramollissement des tissus. Une seconde opération a réussi.

Relativement au temps, on peut remarquer qu'une de mes malades a porté une fistule pendant quatre ans, qu'une autre l'a conservée pendant dix ans, une troisième pendant neuf mois, une quatrième pendant un temps qui n'a pas été précisé; la cinquième, celle du service de M. Lenoir, pendant un an.

Le col de l'utérus, chez trois de nos femmes, était seulement rouge et granuleux, et chez deux ramolli et exulcéré. On a dû voir, par la lecture de nos observations, qu'il nous a été permis, après le décollement du vagin, de réparer des pertes de substance considérables et d'aboucher les lèvres ravivées de la fistule sans tiraillements. Cette lecture a appris enfin que cette opération se faisait presque sans écoulement de sang, excepté dans un cas où nous avons été obligé d'intéresser le col de l'utérus. N'est-il pas remarquable que, par une simple incision demi-circulaire, qu'en détachant le vagin et la membrane muqueuse vaginale de son insertion antérieure au col de l'utérus, on obtienne un relâchement de toutes les parties, et un déplacement réel du vagin et de la vessie d'arrière en avant. C'est ce que nous avons

observé sur toutes nos malades, sans avoir besoin d'exercer des tractions.

Il résulte aussi de ces observations, que cette méthode a également réussi pour les fistules longitudinales et transversales. Désormais, on n'attachera plus d'importance à la forme des fistules, et on ne s'occupera plus que de l'état de leurs lèvres, de leur complication et de leur étendue.

Si nous consultons les faits, nous voyons que la forme des fistules dépend de la manière dont la tête de l'enfant a comprimé les tissus, de la manière dont ils ont été plissés, et du sens dans lequel la compression a été exercée.

Nos observations ont démontré que la réunion était obtenue dans toute l'étendue de la fistule, excepté lorsque les lèvres étaient ramollies, mal ravivées, que le point de suture avait été mal appliqué. Sur quatre de nos malades, la réunion a été complète et immédiate.

Nos observations font mention de l'époque à laquelle les fils ont été enlevés, et on voit qu'ils ont été retirés du quatorzième au vingt-deuxième jour (14-16-19-22). Mais maintenant je retire les fils entre le cinquième et le dixième jour. Cette différence d'époque est en rapport avec les espèces de fistules. La guérison est parfaite lorsque l'urine est conservée dans son réservoir et expulsée à volonté.

On a vu que nous avions fait usage de petites sondes fréquemment renouvelées, et l'expérience nous a depuis démontré que c'était le moyen de prévenir les distensions de l'urètre et les pressions douloureuses du col de la vessie.

Nous ne pouvons terminer ces réflexions sans dire deux mots de l'influence du système nerveux sur la sécrétion urinaire. Une de nos observations fait mention de la suppression d'urine après de vives émotions et des inquiétudes éprouvées par la malade. De quelle manière le système nerveux a-t-il agi sur la sécrétion urinaire? Ce n'est pas certainement en arrêtant le cours du sang, d'où dérive toute sécrétion, puisque la circulation persistait, mais bien

en en modifiant le mécanisme, et cela sans doute par l'action directe des nerfs sur le rein auquel est dévolue cette fonction.

Ici se termine le premier Mémoire que j'ai eu l'honneur de lire à l'Académie des Sciences sur l'autoplastie par glissement. Depuis ce moment, j'ai fait connaître à la savante Compagnie de nombreuses recherches entièrement neuves sur les fistules vésico-utérines, vésico-utéro vaginales superficielles et profondes, et sur un grand nombre de procédés pour en obtenir l'oblitération; mais l'Institut m'ayant accordé seulement le droit d'imprimer le Mémoire sur lequel un rapport a été fait en séance publique, je n'ai pu ni dû insérer dans cet article les idées qui font le sujet d'une série de travaux mentionnés dans les comptes-rendus.

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

DIFFÉRENTIELLES

DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE,

PAR M. EDMOND BOUR,

ÉLÈVE INGÉNIEUR DES MINES.

PRÉSENTÉ À L'ACADÉMIE DES SCIENCES LE 5 MARS 1855.

(Un extrait de ce Mémoire a été inséré au *Journal de Mathématiques*, tome XX.)

Les équations différentielles des problèmes de mécanique ont été mises par Lagrange, par Poisson, et finalement par M. Hamilton, sous des formes remarquables, qui ont fourni aux géomètres un des sujets d'étude les plus intéressants et les plus féconds. Les travaux auxquels cette étude a donné lieu, en particulier ceux de Jacobi, ont été exposés avec une rare netteté par M. Bertrand dans son cours du Collége de France (année 1852-53); ils se trouvent résumés dans les notes placées à la suite de la *Mécanique analytique*, et forment le complément essentiel de ce bel ouvrage[1].

[1] *Mécanique analytique*, 3e édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand, t. I, notes VI et VII.

Je me contenterai de rappeler en quelques mots les résultats qui ont servi de point de départ à mes recherches, ne pouvant mieux faire que de renvoyer pour tous les détails aux notes déjà citées.

§ I[er].

Soit un problème de mécanique quelconque auquel s'applique le principe des forces vives. Si je suppose, avec Lagrange, qu'on ait profité des équations de liaison pour exprimer les coordonnées des divers points mobiles en fonction du plus petit nombre possible d'inconnues,

$$q_1, q_2, \ldots, q_n,$$

lesquelles seront alors absolument indépendantes; les équations différentielles du mouvement seront de la forme[1] :

$$(a) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq'_i}\right) - \frac{dT}{dq_i} = \frac{dU}{dq_i}.$$

U est la fonction des forces, et T la demi-somme des forces vives du système.

Posons maintenant :

$$\frac{dT}{dq'_i} = p_i, \quad U - T = H,$$

et substituons les variables p_i aux dérivées q'_i; les équations précédentes prennent la forme très-simple due à M. Hamilton[2] :

$$(b) \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{dH}{dq_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{dH}{dp_i}.$$

L'intégration de ces équations au nombre de $2n$ donnera l'expression des inconnues $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ en fonction du temps et de $2n$ constantes arbitraires. On peut aussi supposer les équa-

[1] *Mécanique analytique*, t. I, p. 411.
[2] *Ibid.* t. I, p. 413.

tions intégrales résolues par rapport aux constantes; et c'est sous cette forme que je les emploierai dans ce qui va suivre, en les désignant, pour abréger, par les constantes qui y figurent, mises entre parenthèses.

Ces intégrales présentent plusieurs propriétés importantes, parmi lesquelles il faut citer en première ligne la suivante, découverte par Poisson.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si*

$$\alpha = \varphi\,(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t),$$
$$\beta = \psi\,(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t),$$

sont deux intégrales d'un même problème, la quantité

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i}\right),$$

que l'on désigne par (α, β), *restera constante pendant toute la durée du mouvement.*

La manière la plus directe de démontrer ce théorème célèbre consiste à vérifier que

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = 0.$$

Les calculs n'offrent aujourd'hui aucune difficulté [1].

Jacobi a fondé sur ce théorème une méthode d'intégration remarquable. En effet (α, β) est une fonction de $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t$; si donc on l'égale à une constante arbitraire, on aura en général une nouvelle intégrale du problème, sans même effectuer de quadrature : celle-ci peut d'ailleurs servir, combinée avec l'une des deux premières, à en donner une quatrième, et ainsi de suite. Malheureusement cette méthode tombe souvent en défaut. C'est ce qui arrivera, par exemple, si (α, β), au lieu d'être une fonction des variables, est égale à zéro, ou à une constante numérique : ainsi, quand l'intégrale (β) ne contient pas t, et que l'intégrale (α)

[1] *Mécanique analytique*, t. I, p. 423.

est celle des forces vives, $\alpha = H$, on a identiquement $(\alpha, \beta) = 0$, en vertu de l'équation même qui définit les intégrales. Il peut se faire aussi que (α, β) se réduise à une constante au moyen des intégrales déjà connues, et alors on n'apprend rien de nouveau. Ces divers cas d'exceptions nuisent beaucoup à l'emploi de la méthode d'intégration indiquée ci-dessus. Mais, *quand ils ont lieu, les intégrales* (α) *et* (β) *jouissent de propriétés particulières dont on peut* souvent *tirer un autre profit pour l'intégration des équations dynamiques proposées.* J'emprunte les expressions mêmes de Jacobi dans une lettre adressée en 1840 au président de l'Académie des sciences (voir le tome V du Journal de M. Liouville, p. 350). Cette idée (que l'illustre géomètre devait développer dans un ouvrage auquel il a longtemps travaillé, mais que la mort l'a empêché de faire paraître, et qui jusqu'ici est resté inédit) est une des bases de mon mémoire.

Je m'appuierai encore sur un beau travail de M. Bertrand, relatif à ces mêmes cas d'exception, et en particulier sur le théorème que voici [1] :

THÉORÈME. — *Étant donnée une intégrale* (λ) *autre que celle des forces vives, et que je suppose indépendante du temps, on peut compléter la solution au moyen :*

1° De $2n - 2$ *intégrales comprenant* (λ), *qui sont indépendantes du temps et qui donnent* $(\lambda, \mu) = 0$, (μ) *étant une quelconque d'entre elles;*

2° D'une autre (ν), *également indépendante du temps, mais telle que* $(\lambda, \nu) = 1$;

3° Enfin, d'une dernière intégrale (ρ) *de la forme*

$$\rho = \varphi(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n) - t,$$

qui donne encore $(\lambda, \rho) = 0$.

Deux intégrales (λ) et (ν), pour lesquelles on a $(\lambda, \nu) = 1$, et par conséquent $(\nu, \lambda) = -1$, sont dites intégrales conjuguées. Celle qui contient le temps est la conjuguée de celle des forces

[1] *Mécanique analytique*, t. I, p. 426.

vives. La solution complète d'un problème de mécanique peut donc être formée de $2n$ intégrales du genre que voici : celle des forces vives $\alpha = H$; celle qui contient le temps, que j'écrirai $\beta = G - t$; enfin $2n - 2$ autres, indépendantes de t, que je désignerai par (α_1), (α_2), ..., (α_{2n-2}) : (α_1) est une intégrale quelconque indépendante du temps, autre que celle des forces vives; et, d'après le théorème de M. Bertrand, on peut supposer que l'on ait $(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, $(\alpha_1, \alpha_i) = 0$ pour tout indice i différent de 2, enfin $(\alpha_1, G) = 0$.

Les intégrales (α_1), (α_2), ..., (α_{2n-2}) vérifient l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dH}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dH}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0 \text{ ou } (H, \zeta) = 0,$$

qui est aussi satisfaite par $\zeta = H$, et dont la solution la plus générale est

$$\zeta = f(H, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-2}).$$

Au contraire, le premier membre de l'équation (1) se réduirait à l'unité si l'on posait $\zeta = G$: en d'autres termes $(H, G) = 1$. L'équation linéaire (1) peut remplacer les équations différentielles (b) : c'est à elle qu'on peut supposer appliqués les théorèmes de Poisson et de M. Bertrand, et c'est elle que j'étudie dans ce mémoire, en montrant comment on peut en abaisser l'ordre, quand on connaît une ou plusieurs intégrales.

§ II.

Et d'abord, je puis profiter de l'intégrale $\alpha = H$, qui est connue, pour éliminer l'une des inconnues, p_n par exemple. Une fonction F de $p_1, q_1, \ldots p_{n-1}, q_{n-1}, p_n, q_n$, se changera en une fonction de $p_1, q_1, \ldots, p_{n-1}, q_{n-1}, q_n$, H, et l'on aura pour sa

nouvelle dérivée par rapport à p_i, que je distingue au moyen d'un accent,

$$\frac{d'\mathrm{F}}{dp_i} = \frac{d\mathrm{F}}{dp_i} + \frac{d\mathrm{F}}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i}.$$

D'ailleurs

$$\frac{dp_n}{dp_i} = -\frac{\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_i}}{\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_n}};$$

donc

$$\frac{d\mathrm{F}}{dp_i} = \frac{d'\mathrm{F}}{dp_i} - \frac{d\mathrm{F}}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i} = \frac{d'\mathrm{F}}{dp_i} + \frac{d\mathrm{F}}{dp_n}\frac{\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_i}}{\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_n}}.$$

Je calcule ainsi toutes les dérivées de ζ pour les substituer dans l'équation (1); les termes qui contiennent $\frac{d\zeta}{dp_n}$ se détruisent deux à deux, et il reste

$$\frac{d\mathrm{H}}{dq_1}\frac{d'\zeta}{dp_1} - \frac{d\mathrm{H}}{dp_1}\frac{d'\zeta}{dq_1} + \ldots - \frac{d\mathrm{H}}{dp_n}\frac{d'\zeta}{dq_n} = 0.$$

Divisant par $-\frac{d\mathrm{H}}{dp_n}$ et supprimant les accents, il vient

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0.$$

En appliquant les mêmes calculs à l'équation $(\mathrm{H}, \mathrm{G}) = 1$, elle devient

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\mathrm{G}}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\mathrm{G}}{dq_i}\right) + \frac{d\mathrm{G}}{dq_n} = -\frac{dp_n}{d\mathrm{H}}.$$

L'équation (2) a les mêmes intégrales que l'équation (1), à l'exception de celle des forces vives $\alpha = \mathrm{H}$; c'est elle qu'il faudrait chercher à intégrer si l'intégrale (α) était seule connue.

Supposons maintenant qu'on ait en outre l'intégrale (α_1); si j'exprime qu'une fonction

$$\zeta = f(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$$

donne identiquement $(\alpha_1, \zeta) = 0$, j'obtiendrai une équation linéaire de même forme que l'équation (1) :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha_1}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0, \tag{4}$$

et cette équation, d'après ce que j'ai supposé plus haut, sera vérifiée quand on y remplacera ζ par H, G, α_1, α_3, α_4, ..., α_{2n-2}, mais non pas par α_2, qui donne

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1.$$

Cela posé, je puis faire subir à l'équation (4) la même transformation qu'à l'équation (1), puisqu'elle est aussi satisfaite par $\zeta = H$; et il arrivera, ce qui fait le succès de ma méthode, que cette opération, qui a pour but d'enlever la solution connue $\zeta = H$, conduira à deux équations différentes suivant que ζ sera égale à G ou à l'une quelconque des autres intégrales de l'équation (4); de manière qu'en prenant la deuxième forme, on aura aussi éliminé l'intégrale inconnue $\zeta = G$, qui seule est étrangère à l'équation (1).

Je développe les calculs qui conduisent à ce résultat fondamental.

Il s'agit de substituer dans l'équation (4)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha_1}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0,$$

les valeurs des anciennes dérivées en fonction des nouvelles,

$$\frac{d\alpha_1}{dq_i} = \frac{d'\alpha_1}{dq_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_n} \frac{dp_n}{dq_i},$$
$$\frac{d\zeta}{dp_i} = \frac{d'\zeta}{dp_i} - \frac{d\zeta}{dp_n} \frac{dp_n}{dp_i};$$

ce qui donnera quatre séries de termes :

1° Ceux qui proviennent des premiers termes;

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d'\alpha_1}{dq_i}\frac{d'\zeta}{dp_i}-\frac{d'\alpha_1}{dp_i}\frac{d'\zeta}{dq_i}\right);$$

2° La somme des produits des derniers termes;

$$\sum\left(\frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i}\right):$$

ces produits se détruisent tous deux à deux;

3° Ceux qui contiennent en facteur $\frac{d\zeta}{dp_n}$,

$$\frac{d\zeta}{dp_n}\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d'\alpha_1}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d'\alpha_1}{dq_i}\right)+\frac{d'\alpha_1}{dq_n}\right]:$$

ils forment une somme nulle; car α_1 vérifie l'équation (2);

4° Enfin, ceux qui multiplient $\frac{d\alpha_1}{dp_n}$,

$$-\frac{d\alpha_1}{dp_n}\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d'\zeta}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d'\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d'\zeta}{dq_n}\right].$$

Cette quantité est nulle également en vertu de l'équation (2), si ζ représente α_1, ou α_3, ..., ou α_{2n-2}; mais cette même quantité, si $\zeta = G$, prend, en vertu de l'équation (3), la valeur

$$\frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{dH}=\frac{d\alpha_1}{dH}.$$

Réunissant tous les termes qui subsistent et supprimant les accents, on arrive, comme je l'ai annoncé, aux deux équations

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)=0, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)=-\frac{d\alpha_1}{dH}. \tag{6}$$

On trouverait de même que α_2 satisfait à l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right)=1. \tag{7}$$

L'équation (5) est entièrement semblable à l'équation (1), et jouit des mêmes propriétés. Sa solution complète est formée des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-2}$, qui toutes sont des intégrales du problème et donnent $(\alpha_1, \alpha_i) = 0$. Enfin, les théorèmes de Poisson et de M. Bertrand s'y appliquent évidemment : seulement la fonction (α, β) a maintenant deux termes de moins.

Soit donc (α_3) une de ses intégrales : on peut concevoir, d'après le dernier des théorèmes cités, qu'on complète la solution au moyen de (α_1) d'abord, et d'intégrales $(\alpha_4), (\alpha_5), \ldots, \alpha_{2n-2}$, telles que, pour tout indice i différent de 4, on ait $(\alpha_3, \alpha_i) = 0$, tandis que $(\alpha_3, \alpha_4) = 1$. Elles donnent toutes d'ailleurs $(\alpha_1, \alpha_i) = 0$, puisqu'elles satisfont à l'équation (4).

J'en conclus que si l'on me donne l'intégrale (α_3), je pourrai, en opérant comme précédemment, tirer de l'équation

$$\alpha_1 = \varphi\,(\mathrm{H}, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

la valeur de p_{n-1} pour la substituer dans la quantité α_3, et calculer ensuite les coefficients de l'équation

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{d\alpha_3}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_3}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0 \text{ ou } (\alpha_3, \zeta) = 0,$$

qui aura la même forme que les équations (1) et (5) et admettra pour intégrales $(\alpha_3), (\alpha_6), (\alpha_6), \ldots, (\alpha_{2n-3})$.

Je puis supposer, au moins en théorie, que j'obtienne une série d'équations analogues aux équations (1), (5) et (8), le nombre des termes décroissant à chaque fois de deux unités. Le théorème de M. Bertrand s'applique à chacune de mes équations successives, et j'arriverai de proche en proche à mettre la solution complète du problème sous la forme *canonique* de $2n$ intégrales conjuguées deux à deux,

$$(a_1), (a_2), \ldots, (a_n),$$
$$(b_1), (b_2), \ldots, (b_n),$$

telles que l'on ait

$$(a_i, b_i) = 1, \quad (a_i, a_{i'}) = 0, \quad (a_i, b_{i'}) = 0.$$

Voici maintenant en quelques mots, extraits du travail de M. Bertrand, comment on doit transformer les intégrales du problème, telles qu'elles sont immédiatement découvertes, pour obtenir des solutions de mes équations (1), (5), (8), etc.

Si l'on connaît une intégrale quelconque (c_1), indépendante du temps, on peut poser $\alpha_1 = c_1$, et rien n'empêche de supposer que les autres intégrales, qui sont parfaitement inconnues, forment un système du genre de celui dont le théorème de M. Bertrand démontre la possibilité. On calculera alors les coefficients de l'équation (5), qui admettra pour intégrales

$$(\alpha_1),\ (\alpha_3),\ \ldots,\ (\alpha_{2n-2}).$$

Supposons maintenant qu'on ait une autre intégrale du problème, (c_2), également indépendante du temps. Pour chercher à continuer l'abaissement, on formera la quantité (c_1, c_2), et alors il pourra se présenter trois cas :

1° (c_1, c_2) est identiquement nulle; alors on peut poser $\alpha_3 = c_2$, et former l'équation (8), qui a deux termes de moins que l'équation (5).

2° (c_1, c_2) est une constante numérique que l'on peut toujours supposer égale à l'unité; alors (c_2) est la conjuguée de (c_1), et ne peut servir à pousser plus loin l'abaissement : en effet, la méthode qui a conduit à l'équation (5) consistait simplement à éliminer de la solution l'intégrale conjuguée de (α_1), qui se trouve ainsi complétement étrangère à l'équation réduite.

3° (c_1, c_2) est une fonction des inconnues du problème; alors cette fonction, égalée à une constante c_3, fournit une nouvelle intégrale. On formera $(c_1, c_3) = c_4$; $(c_1, c_4) = c_5$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on tombe sur une combinaison $(c_1, c_{k-1}) = c_k$, qui soit une fonction des précédentes et de H.

Alors il existe $k - 3$ intégrales du problème, fonctions de $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$, et de H, données par une équation différentielle partielle linéaire, et dont l'une quelconque peut être prise pour l'intégrale (α_3). Les autres satisfont à l'équation (5) et seront uti-

lisées pour l'abaissement de cette équation, de la même manière que les premières l'ont été pour celui de l'équation (1).

§ III.

Je viens de montrer comment on peut abaisser l'ordre de l'équation aux dérivées partielles du problème au moyen des intégrales qui sont connues; cette ressource épuisée, je vais indiquer l'usage que l'on doit faire de mes équations réduites pour essayer de continuer l'intégration.

Si, par exemple, on ne connaît pas d'intégrale autre que (α_1), on appliquera à l'équation (5) la méthode qui a donné l'équation (2). c'est-à-dire que l'on éliminera p_{n-1} au moyen de α_1; on transformera de même les équations (6) et (7), et il viendra

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d\zeta}{dq_{n-1}}=0,$$

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right)+\frac{d\alpha_2}{dq_{n-1}}=-\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1},$$

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)+\frac{dG}{dq_{n-1}}=\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}.$$

Mais je dis que l'on a

$$\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}=-\frac{dp_{n-1}}{dH};$$

en effet, on a tiré de l'équation

$$\alpha_1=\varphi(H,\,p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_{n-1},\,q_1,\,q_2,\,\ldots,\,q_n),$$

$$p_{n-1}=f(\alpha_1,\,H;\,p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_{n-2};\,q_1,\,q_2,\,\ldots,\,q_n):$$

si l'on remet dans le deuxième membre de cette équation la valeur de α_1 en fonction des variables p et q et de H, elle sera iden-

tiquement vérifiée; et cette identité, différentiée par rapport à H, donne précisément

$$0 = \frac{dp_{n-1}}{dH} + \frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}.$$

L'équation (11) peut donc être remplacée par

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{dG}{dp_i} - \frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right) + \frac{dG}{dq_{n-1}} = -\frac{dp_{n-1}}{dH}.$$

Je puis encore transformer les équations (2) et (3), en remplaçant la variable p_{n-1} par α_1, et l'équation (2) va de même en fournir deux différentes selon que ζ sera α_2, ou l'une quelconque des autres quantités $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}$. On obtient ainsi trois équations analogues à (9), (10), (12), avec cette différence que p_n et q_n ont pris la place de p_{n-1} et q_{n-1} :

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

$$(14)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right) + \frac{d\alpha_2}{dq_n} = -\frac{dp_n}{d\alpha_1},$$

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{dG}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right) + \frac{dG}{dq_n} = -\frac{dp_n}{dH}.$$

Les équations (9) et (13) admettent toutes deux pour intégrales $(\alpha_3), (\alpha_4), \ldots, (\alpha_{2n-2})$; ces fonctions, étant au nombre de $2n-4$, forment la solution complète de chacune d'elles; et toutes sont des intégrales du problème. Pourtant, comme q_n est considéré comme une constante dans l'intégration de l'équation (9), et q_{n-1} dans celle de (13), il s'ensuit qu'une intégrale de la première, par exemple, ne satisfait pas nécessairement au problème.

En effet, supposons qu'on connaisse $(\alpha_3), (\alpha_4), \ldots, (\alpha_{2n-2})$, intégrales du problème et partant de l'équation (9). Si l'on pose :

$$\zeta = \Phi(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}, q_n),$$

Φ désignant une fonction arbitraire, ζ ne sera plus une intégrale du problème et continuera de vérifier l'équation (9).

Ceci prouve qu'on ne peut pas substituer purement et simplement les équations (9) et (13) à (2), puisque les premières admettent des solutions étrangères au problème, bien qu'on en puisse former l'intégrale générale uniquement avec les intégrales des équations (1) et (2). Le paragraphe suivant est consacré à montrer comment on doit traiter ces deux équations.

§ IV.

Commençons par résumer, en le dégageant des calculs, ce que j'ai déjà dit sur la marche à suivre pour la solution du problème de mécanique proposé.

Je suppose que l'on connaisse deux intégrales qui comprennent celle des forces vives :

$$H = f(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n),$$

$$\alpha_1 = f_1(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n).$$

Je résous ces deux équations par rapport à p_n et p_{n-1}; je calcule les coefficients des deux suivantes :

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dp_{n-1}}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) + \frac{d\zeta}{dq_{n-1}} = 0,$$

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{dp_n}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

et je cherche à intégrer l'une ou l'autre de ces équations.

Soit (ζ_1) une intégrale de l'équation (9); je fais $\zeta = \zeta_1$ dans le premier membre de l'équation (13), et, si j'obtiens identiquement zéro, (ζ_1) est une intégrale du problème. Dans le cas contraire, soit Z_1 le résultat de la substitution, je dis que $Z_1 =$ constante est une nouvelle intégrale de l'équation (9). La vérification directe de ce fait n'offre aucune difficulté, mais la démonstration suivante suffit.

D'après la théorie des équations différentielles partielles linéaires, ζ_1 doit être de la forme

$$\zeta_1 = \Phi(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}, q_n).$$

En portant cette valeur dans l'équation (13), comme $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-1}$, donnent des résultats nuls, et que q_n donne l'unité, on a

$$Z_1 = \frac{d\zeta_1}{dq_n}.$$

Mais $\frac{d\zeta_1}{dq_n}$ est comme ζ_1 une fonction de $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}, q_n$, et, par conséquent, c'est une intégrale de l'équation (9).

Cette intégrale, à son tour, va m'en donner de nouvelles, tant par sa substitution dans l'équation (13) que par sa combinaison avec (ζ_1) pour former la fonction (ζ_1, Z_1) de Poisson; et j'obtiendrai ainsi un certain nombre d'intégrales distinctes, limité au plus tard quand elles formeront la solution complète de l'équation (9). Je puis considérer ces intégrales comme formant un système canonique partiel :

$$(a_1), (a_2), \ldots, (a_k),$$

$$(b_1), (b_2), \ldots, (b_k),$$

en entendant simplement par là que l'on a, pour des indices quelconques de 1 à k,

$$(a_i, b_i) = 1, \quad (a_i, b_{i'}) = 0, \quad (a_i, a_{i'}) = 0,$$

k pouvant d'ailleurs être égal ou inférieur à $n - 2$.

Les résultats $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k$, qu'on obtient en faisant successivement, dans l'équation (13), $\zeta = a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$, sont des fonctions de ces quantités seulement et de q_n, sans quoi ils fourniraient de nouvelles intégrales de l'équation (9).

Cela posé, il existe $2k$ intégrales du problème, qui sont fonc-

tion des variables a et b et de q_n; en effet, substituant dans l'équation (13)

$$\zeta = \varphi(a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k, q_n),$$

et exprimant que le résultat est nul, il vient

$$(16)\quad A_1 \frac{d\zeta}{da_1} + B_1 \frac{d\zeta}{db_1} + \ldots + A_k \frac{d\zeta}{da_k} + B_k \frac{d\zeta}{db_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

équation différentielle partielle qui admet $2k$ intégrales.

Or, il est très-remarquable que cette équation a précisément la même forme que les équations (2), (9) et (13), c'est-à-dire que

$$A_i = \frac{dL}{db_i}, \quad B_i = -\frac{dL}{da_i},$$

L étant une certaine fonction de quantités a_i et b_i, que l'on déterminera par quadrature.

Pour le faire voir, il suffit de prouver que

$$\frac{dA_1}{db_2} = \frac{dA_2}{db_1}.$$

Différentions par rapport à q_n l'équation

$$(a_1, a_2) = 0;$$

il vient

$$(17)\quad \sum\left(\frac{da_1}{dq_i}\frac{d^2a_2}{dq_n dp_i} - \frac{da_1}{dp_i}\frac{d^2a_2}{dq_n dq_i}\right) = \sum\left(\frac{da_2}{dq_i}\frac{d^2a_1}{dq_n dp_i} - \frac{da_2}{dp_i}\frac{d^2a_1}{dq_n dq_i}\right).$$

Mais A_1 est défini par l'équation

$$\frac{dp_n}{dq_1}\frac{da_1}{dp_1} - \frac{dp_n}{dp_1}\frac{da_1}{dq_1} + \ldots + \frac{da_1}{dq_n} = A_1;$$

si je la différentie par rapport à p_i et q_i, j'en tire

$$\frac{d^2a_1}{dq_n dp_i} = \frac{dA_1}{dp_i} - \frac{dp_n}{dq_1}\frac{d^2a_1}{dp_1 dp_i} + \frac{dp_n}{dp_1}\frac{d^2a_1}{dq_1 dp_i} - \ldots - \frac{da_1}{dp_1}\frac{d^2p_n}{dq_1 dp_i} + \frac{da_1}{dq_1}\frac{d^2p_n}{dp_1 dp_i}, \ldots,$$

$$\frac{d^2a_1}{dq_n dq_i} = \frac{dA_1}{dq_i} - \frac{dp_n}{dq_1}\frac{d^2a_1}{dp_1 dq_i} + \ldots - \frac{da_1}{dp_1}\frac{d^2p_n}{dq_1 dq_i} + \frac{da_1}{dq_1}\frac{d^2p_n}{dp_1 dq_i}, \ldots$$

J'aurais des formules analogues pour $\frac{d^2 a_2}{dq_n dp_i}$, $\frac{d^2 a_2}{dq_n dq_i}$. Je substitue toutes ces valeurs dans l'équation (17), et je dis qu'elle se réduit à

$$(a_1, A_2) = (a_2, A_1).$$

C'est ce que l'on obtient en remplaçant simplement $\frac{d^2 a_1}{dq_n dp_i}$, $\frac{d^2 a_1}{dq_n dq_i}$, etc., par les premiers termes de leurs expressions : $\frac{dA_1}{dp_i}$, $\frac{dA_1}{dq_i}$, etc., et je vais faire voir que tous les autres termes se détruisent.

Prenons d'abord ce qui multiplie l'une quelconque des dérivées secondes de p_n, par exemple $\frac{d^2 p_n}{dp_i dq_i}$. On trouve, dans le premier membre,

$$-\frac{da_1}{dq_i}\frac{da_2}{dp_i} - \frac{da_2}{dq_i}\frac{da_1}{dp_i},$$

et dans le deuxième membre les mêmes termes avec les mêmes signes.

Passons aux dérivées premières. Les termes qui multiplient $\frac{dp_n}{dq_i}$ sont, en les faisant tous passer dans le deuxième membre,

$$\Sigma\left(\frac{da_1}{dq_i}\frac{d^2 a_2}{dp_i dp_1} + \frac{da_2}{dp_i}\frac{d^2 a_1}{dq_i dp_1} - \frac{da_1}{dp_i}\frac{d^2 a_2}{dq_i dp_1} - \frac{da_2}{dq_i}\frac{d^2 a_1}{dp_i dp_1}\right).$$

Ils forment précisément la dérivée de (a_1, a_2) par rapport à p_1; leur somme est donc nulle, puisque (a_1, a_2) est identiquement zéro. Donc l'équation (17) se réduit bien à

$$(a_1, A_2) = (a_2, A_1).$$

Mais A_2 est une fonction de $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ et de q_n; donc, en vertu de la forme linéaire de la fonction de Poisson,

$$(a_1, A_2) = \frac{dA_2}{da_1}(a_1, a_1) + \frac{dA_2}{db_1}(a_1, b_1) + \ldots = \frac{dA_2}{db_1},$$

car toutes les parenthèses sont nulles, sauf (a_1, b_1), qui est l'unité.

On aurait de même

$$(a_2, A_1) = \frac{dA_1}{db_2}.$$

Donc

$$\frac{dA_2}{db_1} = \frac{dA_1}{db_2}.$$

On trouverait, par un calcul analogue,

$$\frac{dA_1}{da_1} = -\frac{dB_1}{db_1};$$

le signe — s'introduisant parce que, si $(a_1, b_1) = 1$, $(b_1, a_1) = -1$ [1].

[1] Des considérations analogues m'ont fait découvrir le théorème suivant, qui, appliqué au problème des trois corps, m'a conduit à des conséquences remarquables développées dans un mémoire spécial :

Si l'on a trouvé $2k$ *fonctions des variables* p *et* q (k *étant plus petit que* n *ou égal à* n) :

$$a_1, a_2, \ldots, a_k,$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_k,$$

formant un système canonique, et telles que H *s'exprime en fonction de ces quantités seulement; elles satisfont à des équations différentielles de la forme*

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{dH}{db_i}, \quad \frac{db_i}{dt} = \frac{dH}{da_i}.$$

En effet,

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{da_i}{dp_1}\frac{dH}{dq_1} - \frac{da_i}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \frac{da_i}{dp_2}\frac{dH}{dq_2} - \ldots = (H, a_i);$$

mais H étant une fonction des variables a et b, on a, comme dans le calcul précédent,

$$(H, a_i) = -\frac{dH}{db_i};$$

donc

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{dH}{db_i};$$

ce qui démontre le théorème

Le théorème se trouve ainsi démontré, et l'équation (16) prend la forme

$$(18) \qquad \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{d\mathrm{L}}{db_i} \frac{d\zeta}{da_i} - \frac{d\mathrm{L}}{da_i} \frac{d\zeta}{db_i} \right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0.$$

Cette équation n'admet plus d'intégrale étrangère au problème; elle est au plus du même ordre que les équations (9) et (13), et peut être d'un ordre bien inférieur, suivant la grandeur de k, c'est-à-dire que souvent l'intégrale (ζ_1), étrangère au problème, permettra d'abaisser son degré en divisant les intégrales inconnues en plusieurs groupes donnés par des équations distinctes, ce qui est bien dans la nature des problèmes ordinaires de mécanique. C'est à cette équation (18) que je suis ramené en définitive.

J'ai admis que les variables a et b formaient un système canonique, mais ce système peut être incomplet : si la variable a_k, par exemple, n'avait pas de conjuguée, c'est-à-dire si l'on s'était trouvé arrêté avant d'avoir b_k, on aurait pour tout indice i compris entre 0 et $k - 1$.

$$(a_k, a_i) = 0, \quad (a_k, b_i) = 0;$$

on en déduirait, par les calculs qui précèdent,

$$\frac{d\mathrm{A}_k}{da_i} = 0, \quad \frac{d\mathrm{A}_k}{db_i} = 0,$$

c'est-à-dire que A_k serait une fonction de a_k et de q_n seulement; l'équation (18) deviendrait

$$\sum_{i=1}^{i=k-1} \left(\frac{d\mathrm{L}}{db_i} \frac{d\zeta}{da_i} - \frac{d\mathrm{L}}{da_i} \frac{d\zeta}{db_i} \right) + \mathrm{A}_k \frac{d\zeta}{da_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

et l'on en aurait une intégrale en résolvant l'équation du premier ordre

$$\mathrm{A}_k \frac{d\zeta}{da_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0.$$

§ V.

Quand on aura la moitié de la solution d'un problème de mé-

canique, les équations telles que (9) et (13) deviendront illusoires; il ne restera plus à trouver que des intégrales conjuguées qui seront données par les équations (3), (10), (12), (14), (15), etc., qui se réduisent à

$$\frac{d\alpha_2}{dq_n} = -\frac{dp_n}{d\alpha_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dq_{n-1}} = -\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}, \ \ldots,$$
$$\frac{dG}{dq_n} = -\frac{dp_n}{dH}, \quad \frac{dG}{dq_{n-1}} = -\frac{dp_{n-1}}{dH}, \ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On en conclut

$$d\alpha_2 = -\left(\frac{dp_1}{d\alpha_1}\,dq_1 + \frac{dp_2}{d\alpha_1}\,dq_2 + \ldots + \frac{dp_n}{d\alpha_1}\,dq_n\right),$$

expression qui ne peut manquer d'être une différentielle exacte; on peut donc calculer les intégrales conjuguées :

$$(19)\quad \begin{cases} \alpha_2 = -\int\left(\dfrac{dp_1}{d\alpha_1}\,dq_1 + \dfrac{dp_2}{d\alpha_1}\,dq_2 + \ldots + \dfrac{dp_n}{d\alpha_1}\,dq_n\right), \\ \alpha_3 = -\int\left(\dfrac{dp_1}{d\alpha_3}\,dq_1 + \dfrac{dp_2}{d\alpha_3}\,dq_2 + \ldots + \dfrac{dp_n}{d\alpha_3}\,dq_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G = -\int\left(\dfrac{dp_1}{dH}\,dq_1 + \dfrac{dp_2}{dH}\,dq_2 + \ldots + \dfrac{dp_n}{dH}\,dq_n\right). \end{cases}$$

Ces intégrales peuvent s'écrire sous une forme plus simple; en effet, j'ai supposé identiquement nulles les quantités telles que (α_1, α_3), qui résultent de la combinaison deux à deux de toutes les intégrales (α_1), (α_3), ... (α_{2n-3}), dont j'ai fait usage. Or, M. Liouville a montré que, dans ces conditions, la quantité

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \ldots + p_n\,dq_n,$$

est toujours la différentielle exacte d'une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$;

donc, en désignant par V l'intégrale, on pourra écrire les intégrales (19) sous la forme

$$(20) \qquad \alpha_2 = -\frac{dV}{d\alpha_1}, \quad \alpha_4 = -\frac{dV}{d\alpha_3}, \quad \ldots \; G = -\frac{dV}{dH}.$$

On sait d'ailleurs, d'après un théorème de Poisson ou de Jacobi, que quand, ayant la moitié de la solution d'un problème, on peut tirer des intégrales connues les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$, et que la quantité

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \ldots + p_n\,dq_n,$$

est la différentielle exacte d'une fonction V, les intégrales qui complètent la solution sont :

$$\alpha_2 = -\frac{dV}{d\alpha_1}, \quad \alpha_4 = -\frac{dV}{d\alpha_3}, \quad \ldots \; G = -\frac{dV}{dH}.$$

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT,

D'APRÈS UNE REMARQUE FAITE PAR LA COMMISSION CHARGÉE DE L'EXAMINER

Dans ce qui précède, j'ai supposé que le principe des forces vives était applicable, c'est-à-dire que la quantité H des équations (*b*) ne contenait pas le temps explicitement. M. Liouville m'a fait remarquer que ma théorie s'étendait tout naturellement au cas où, sans se préoccuper des applications à la dynamique, on considère simplement les équations différentielles (*b*), H étant fonction de $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t$; l'ensemble du travail devient même ainsi plus complet et plus satisfaisant.

En effet, l'équation qui exprime que la dérivée complète d'une quantité α par rapport à t est nulle, est, dans ce cas,

$$\Sigma\left(\frac{dH}{dq_i}\frac{d\alpha}{dp_i} - \frac{dH}{dp_i}\frac{d\alpha}{dq_i}\right) + \frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle a précisément la même forme que les équations (2), (9), (13) et (18); toutes les équations sont ramenées à un type uniforme; H et t jouent le même rôle que deux variables conjuguées p_i et q_i. Si H est indépendante de t, le problème admet pour intégrale H = constante, de même qu'il admettrait p_i = constante si H était indépendante de q_i.

FIN DU TOME QUATORZE.

MÉMOIRE

SUR LA TORSION DES PRISMES, ETC.

PAR M. DE SAINT-VENANT.

(Pages 233 à 560.)

NOTES.

Sur l'article 24 (p. 278). *Conditions de résistance à la rupture éloignée.* — Puisque, d'après l'article 30, une compression longitudinale $-\partial_x$ d'un prisme dont les faces latérales ne supportent aucune pression produit des dilatations ∂_y, ∂_z d'environ 1/4 de ∂_x, l'on peut présumer que les *contractions* n'amènent, en général, l'énervation et la rupture des corps solides qu'en raison des dilatations qui les accompagnent, et dont le calcul fournit en même temps la grandeur; car, comme l'observe M. le capitaine du génie Michon dans un excellent cours (lithographié) de l'École de Metz (1848, art. 14 et 17) fait à l'aide de notes communiquées par M. Poncelet, le rapprochement des molécules ne peut être une cause de disjonction. Si cette vue théorique se trouve confirmée par l'expérience qui, jusqu'ici, n'y contredit nullement, il suffira, pour poser les conditions de résistance, d'astreindre seulement les dilatations proprement dites ∂ à ne pas excéder une limite δ relative à chaque direction, sans s'occuper des contractions $-\partial$.

Sur l'article 48 (p. 328). — L'équation (102) $p_{xz}\,dy - p_{xy}\,dz = 0$ à satisfaire au contour des sections du prisme s'obtient très-directement en observant que, puisque la pression sur ses faces latérales n'a pas de composante dans le sens longitudinal, celle sur la section n'a pas non plus de composante dans le sens d'une droite qui y est tracée normalement à son contour (2e théorème de l'art. 10); que, par conséquent, la composante tangentielle de cette pression sur la section, en un point quelconque de son contour, est dirigée suivant l'élément de ce contour, ce qui s'exprime par la proportion $\frac{p_{xz}}{p_{xy}} = \frac{dz}{dy}$ ou par l'équation (102).

Lorsque la contexture est égale dans tous les sens transversaux, en sorte que les composantes tangentielles soient constamment proportionnelles aux glissements dans les mêmes sens, on voit que les lignes primitivement normales à la surface latérale du prisme lui restent normales; que, par conséquent, les sections devenues des surfaces courbes coupent partout à angle droit cette surface latérale modifiée, et que les arêtes du prisme, devenues des hélices, se projettent toutes sur la section tangentiellement à son contour.

Cette propriété géométrique des sections gauchies, et celle que révèle l'équation $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$, d'avoir partout leurs deux *courbures* égales et de sens opposé, suffisent pour se faire une idée très-approchée de leur forme, quelle que soit celle du contour.

Sur l'article 57 (p. 338). *Gauchissement de la section elliptique.* — Les points du contour de cette section où le déplacement longitudinal $u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\theta y \cdot c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ est le plus grand, ont pour coordonnées $y = \pm b\sqrt{\frac{1}{2}}$, $z = \pm c\sqrt{\frac{1}{2}}$. Ce sont les quatre points où le contour est rencontré par les diagonales du rectangle circonscrit. A ces points l'on a

$$u = \mp \frac{\theta bc}{2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

Dans l'exemple de la fin du mémoire (art. 137, torsion du cylindre en fonte à base d'ellipse) pour lequel $2b = 0^m,20$, $2c = 0^m,10$, et $\theta = 0{,}00955\,\frac{392{,}5}{300}$ quand les forces atteignent la limite qu'on leur impose, on trouve cette valeur de $u = 0^m,00001874$ ou 1/54 de millimètre, ce qui fait 1/27 de millimètre de différence de *niveau* entre le point le plus haut et le point le plus bas de la section devenue courbe.

Bien qu'imperceptibles, de pareils *gauchissements* ont, sur le moment de torsion, une influence considérable.

Sur les articles 45 à 63, 90 à 105, 122 à 134. — Les formules de la torsion, données analytiquement pour les prismes à base d'ellipse, de triangle équilatéral, et de courbes algébriques de tous les degrés, et les équations de résistance à la rupture sous divers efforts simultanés, peuvent être démontrées d'une manière élémentaire, même pour des auditeurs qui ne connaissent pas le calcul différentiel.

Il n'en saurait être de même des formules en série transcendante relatives aux prismes carrés et rectangles. Mais, en supposant approximativement que le plan de la section carrée rectiligne se change, par la torsion, dans la même surface courbe que celui de la section carrée curviligne circonscrite à angles arrondis (art. 95), qui a avec elle huit points communs et dont l'équation est $b^2(y^2 + z^2) + 0{,}2\,(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) = 1{,}2\,b^4$, l'on obtient pour le moment de torsion du prisme carré 0,84 J, expression très-approchée de la valeur exacte 0,84346 J. En sorte que rien n'empêchera de faire passer notre théorie de la torsion dans l'enseignement. Ces démonstrations élémentaires se trouveront dans une nouvelle édition des *Leçons de Navier*, dont une première partie paraîtra en 1856.

Sur la dernière note de l'article 105 (p. 454). — En général, on a deux orbes séparés lorsqu'on fait c^2 négatif. Ils coupent l'axe des y non-seulement à la distance b mais encore à une distance b' de l'origine quand on prend $c^2 = -\frac{a}{a-1}b'^2$, b' étant plus petit que b.

Si $a =$ sa valeur extrême $-\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$, les orbes deviennent des sortes de croissants, résultant de l'intersection de deux hyperboles.

L'on voit sur la figure, par les coupes tracées sur les deux orbes répondant à $a = -1/6$, $b' = 0{,}6614\,b$, que les sections des deux cylindres qui les ont pour bases restent à peu près planes, mais en s'inclinant en sens opposés sur leur plan primitif commun, de manière à rester presque normales aux *axes respectifs* devenus des hélices. En général, si l'on tord solidairement deux prismes ayant entre eux un intervalle au moins double ou triple de leur lar-

geur, et si J′ est le moment d'inertie polaire *de chacun d'eux autour de son centre de gravité particulier*, on a approximativement $M_x = 2GJ'\theta$ pour le moment de leur torsion simultanée.

Sur l'article 132 (p. 512). *Prisme carré fléchi dans un plan quelconque et en même temps tordu.* — Du tableau de la fin de cet article, et qui donne $\frac{b^3}{b'^3}$, $\frac{b^3}{b''^3}$ pour chacune des trois positions *médiane*, *intermédiaire* et *diagonale* du plan de flexion, l'on déduit, par un calcul facile, un autre tableau fournissant les nombres qui, multipliés par $\frac{M'}{R}$, donnent b^3, pour diverses valeurs du rapport $\frac{R}{T}\frac{M''}{M'}$, et toujours pour chacune de ces trois positions. De la comparaison de ces nombres, on tire cette conséquence importante, relative aux arbres *carrés* tournants qui, comme l'arbre rond de l'article 129, sont sollicités, en même temps qu'à tordre, à fléchir successivement dans des plans coupant leurs bases de différentes manières : *Qu'il faut calculer leur équarrissage pour la position diagonale ou pour la position médiane du plan de flexion selon qu'on a* $\frac{M''}{T}$ *plus grand ou plus petit que* $1{,}03\frac{M'}{R}$ $\left(\text{ou, à peu près, que } \frac{M'}{R}\right)$.

Sur l'article 136. *Récapitulation des formules* (p. 544, paragraphe G_9. Torsion avec des sections d'une autre forme). — En composant une petite table à trois colonnes avec les valeurs de $\frac{J}{\omega^2}$, de $\frac{M_x}{G\omega^2\theta}$, de $\frac{\text{lim. } M_x}{T\,\omega^{3}/_{2}}$ puisées dans les paragraphes G_1, G_3, G_7, G_5, G_8 relatifs aux sections circulaire, carrée rectiligne, carrée curviligne à angles aigus, triangulaire équilatérale et en étoile à quatre pointes, on pourra, par l'intercalation proportionnelle du nombre $\frac{J}{\omega^2}$ relatif à une section de forme quelconque égale dans les deux sens, obtenir approximativement les valeurs de M_x et lim. M_x pour le prisme auquel elle appartient.

CHANGEMENTS ET ADDITIONS.

Page	Ligne		Lisez :
240	10	r_1, r'	r, r'
242	9	x, y, z	x, y, z
244	5	MG	$M_1 G$
245	3	$= g_{yz} \cos 2\epsilon$	$+ g_{yz} \cos 2\epsilon$
253	15 (la 3e des formules 13)	p_{yx}	p_{yz}
Ibid.	au bas (formule 14)	p'_{rr}	$p_{rr'}$
Ibid.	dernière ligne avant la note	$v' =$	$\gamma' =$
257	10 en remontant	$M\gamma_1$	$M_1\gamma_1$
259	12	p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}	p_{xx}, p_{xy}, p_{zz}
261	15 en remontant	$p'_{yz}, \ldots p'_{zy}, \ldots$	$p'_{yx}, \ldots p'_{zx}, \ldots$
Ibid.	11 en remontant	on voit cependant	on voit pourtant
262	3	de l'établir	d'établir le principe en question
265	4 en remontant	p_{yz} et g_{yz}	p_{yz}, g_{yz}, p_{xy} et g_{xy}
281	7 en remontant	soit au us	soit au plus
297	5	$\partial_y = \varepsilon\partial_x$	$\partial_y = -\varepsilon\partial_x$
316	dans la figure	$\psi \quad \varphi$	$\varphi \quad \psi$
329	12 en remontant	de l'altération	de non-altération
330	4 en remontant	(103) et (104)	(104)
332	6 en remontant (formule 109)	$+ \frac{d^2u}{dx^2}$	$+ \frac{d^2u}{dz^2}$
333	6	parallèles	parallèlement
335	3	elle donne	cette valeur donne
336	17	tournée	tourné
346		ajoutez au titre de l'art. 159 *quand les forces extérieures qui font tordre se réduisent à des couples à chaque extrémité*	
351	9 (formule 125)	g_{xz}	g_{xy}
356	6e lig. de la form. (134)	a'^2	a'_2
358	formule (138)	$\frac{d\xi}{dz}$	$\frac{du}{dz}$
Ibid.	4 en remontant	$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\cos\alpha +$	$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\sin\alpha +$
Ibid.	2 en remontant	$\frac{du}{rd\alpha}$	$\frac{du}{rdr}$

Page	Ligne		Lisez :
361	2 en remontant, avant les notes	(art. 74 et 86)	(art. 74, 86 et 111)
362	13	où elles se	où ces faces se
366	5	un nombre	un nombre entier
Ibid.	10		effacez le z avant $= A_n \frac{c}{2}$.
368			mettez une accolade } après la première formule (158) et la deuxième (159)
Ibid.	1re formule (159)		l'exposant 2 doit affecter $\left(\frac{4}{\pi}\right)$ et non $\frac{b}{c}$
371	11	l'art. 68	l'art. 69
390	9 (formule 175)	a_{12}	a'_{12}
391	3	a'^{5}	a'_{5}
407	ligne = 0,6 du 1er tableau	1,932	0,932
421	dernière	effectant	affectant
429	11	de z	des z
439	9 en remontant	$\frac{48}{48}$	$\frac{48}{49}$
445	au bout de la 3e ligne en remontant		*fermez la parenthèse*
449	4 en remontant	$-(1+2a)$	$-(1-2a)$
450	6 de la note	(101)	(201)
452	11	104	102
Ibid.	2 en remontant	$\int y^3\, dy$	$\int y^2\, d\omega$
454	7	46	51
461	2e formule (252)	$\frac{C\,b}{B\,c}$	$\frac{b}{c}$
466	2	chap. XII	chap. XII art. 130, 132, 133
488	16	124. *Formules*	124. *Formule*
495	Tableau	crochets (303)	crochets de (303)
500	4	que la flexion	et que la flexion
502	dernière	t. XVIII	t. XVII
513	9	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou 1,4142	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou 0,7071
Ibid.	dernière	123 et 124	127 et 128
515	6	$\frac{b''\,c''}{b'c'^2}$	$\frac{b''c''^2}{b'c'^2}$
519	5 en remontant	(283)	(331)
520	4	(333)	(334)
528	8	de manière à prendre	en prenant
530	4 en remontant avant la note	$y^2\,\omega$	$y^3\,d\omega$

Page	Ligne		Lisez :
537	dernière	$\omega =$ ou $<$	$\omega =$ ou $>$
542	4 en remontant	$-6y^2$	$-6y^2z^2$
543	1	$\frac{\omega^2}{J}$	$\frac{\omega^4}{J}$
Ibid.	7 en remontant	$0{,}9102\ r_0$	$0{,}9102\ \theta r_0$
544	4 en remontant ou formule (h_1)	$\pi b^3 c^2$	$\pi b^2 c^3$
553	4	$0^m{,}20$ et $0^m{,}10$	$0^m{,}20$ sur $0^m{,}10$
Ibid.	10	$b = 0{,}05$, $c = 0^m{,}10$	$c = 0{,}05$, $b = 0^m{,}10$
555	5	Donc	Donc, comme
557	12	1,000	1000
Ibid.	7 en remontant	1,006	1006
Ibid.	15	2 P	2 PP′
Ibid.	9 en remontant	880, 880, 1535279	800, 800, 1359024
Ibid.	8 en remontant	1239	1166

Fig. 4.

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 1

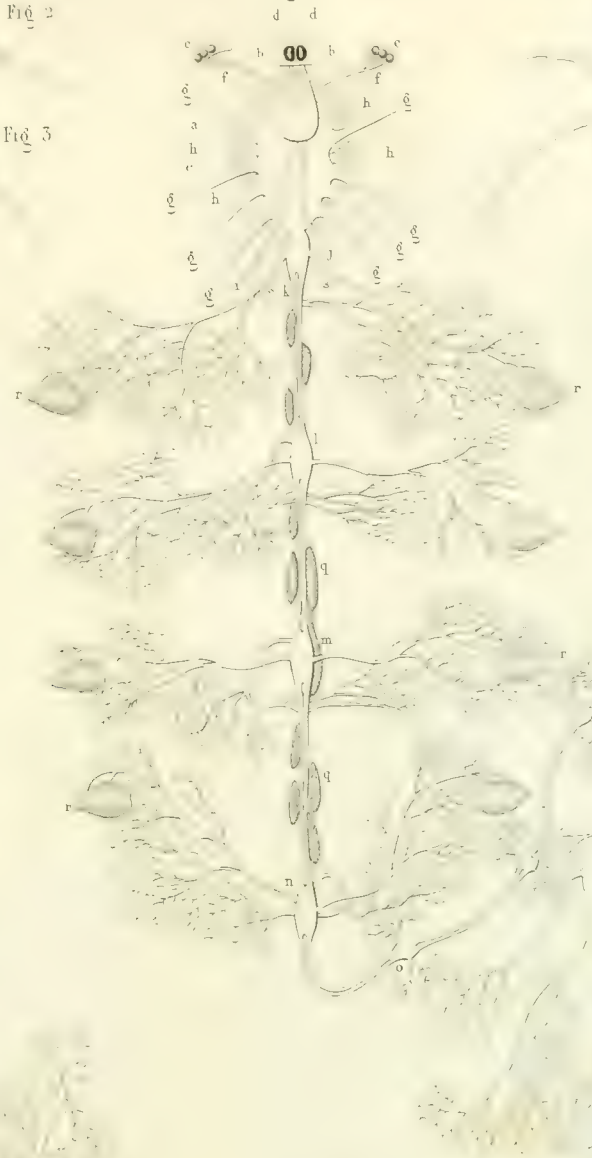


Fig. 5

Fig. 8

Fig. 7

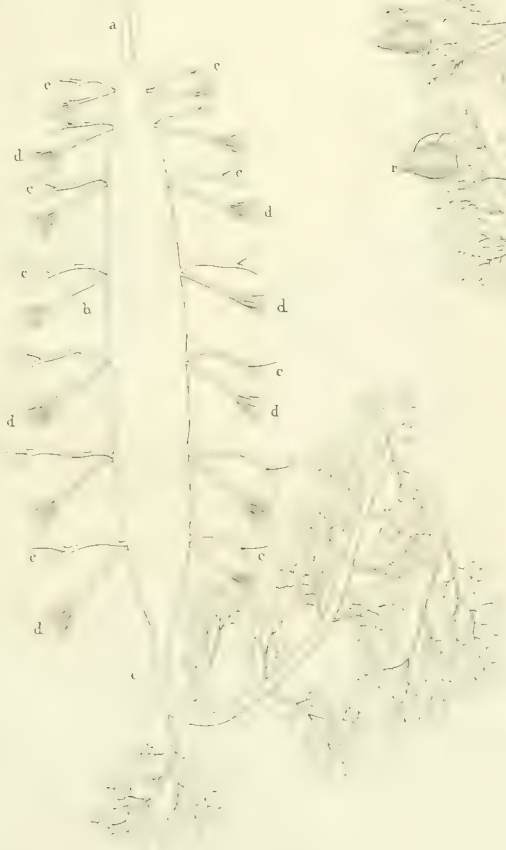


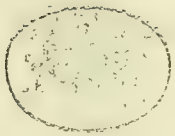
Fig. 9.

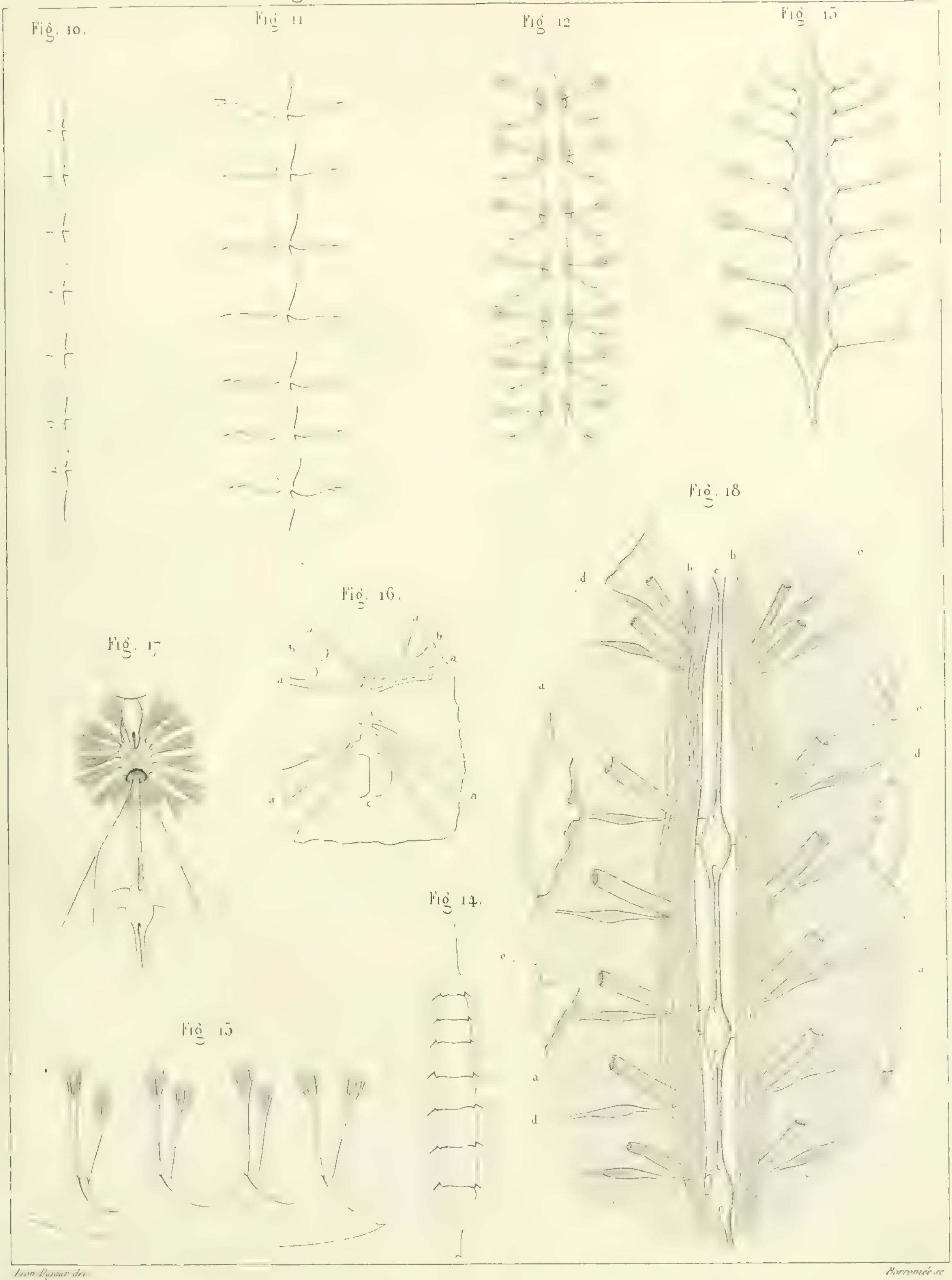
Fig. 6

Léon Dufour del.

ANATOMIE DES SCORPIONS. (Par Mr. Léon Dufour.)

Fig. de 1 à 9.





Léon Dufour del. Borromée sc.

ANATOMIE DES SCORPIONS, (Par Mr. Léon Dufour)

Fig. de 10 à 18.

Fig. 19

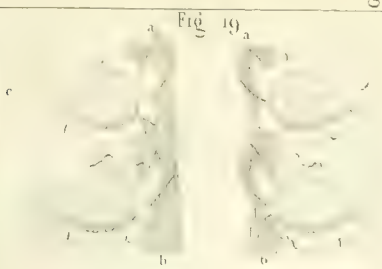
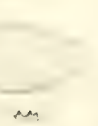


Fig. 20

Fig. 21



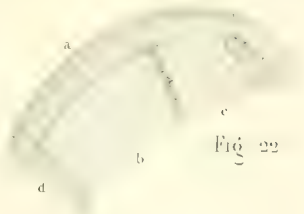


Fig. 22

Fig. 25

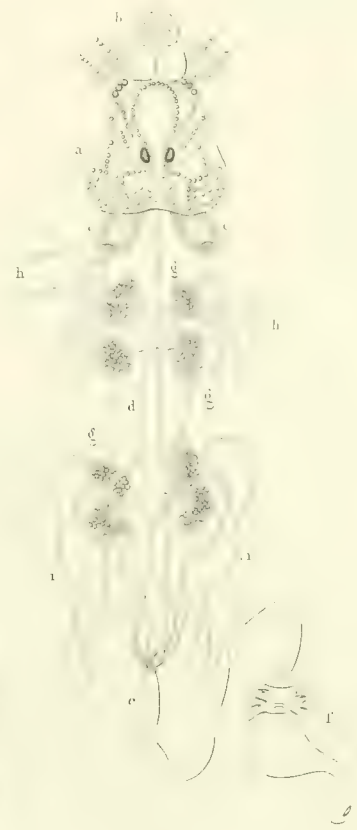


Fig. 26

Fig. 33

Fig. 30

Fig. 24

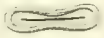


Fig. 27

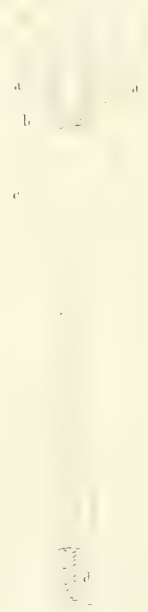


Fig. 29

Fig. 23

Fig. 28

Fig. 32

Fig. 31

Léon Dufour del.

Bertrand sc.

ANATOMIE DES SCORPIONS. (Par Mr Léon Dufour.)

Fig. de 19 à 33.

Fig. 34

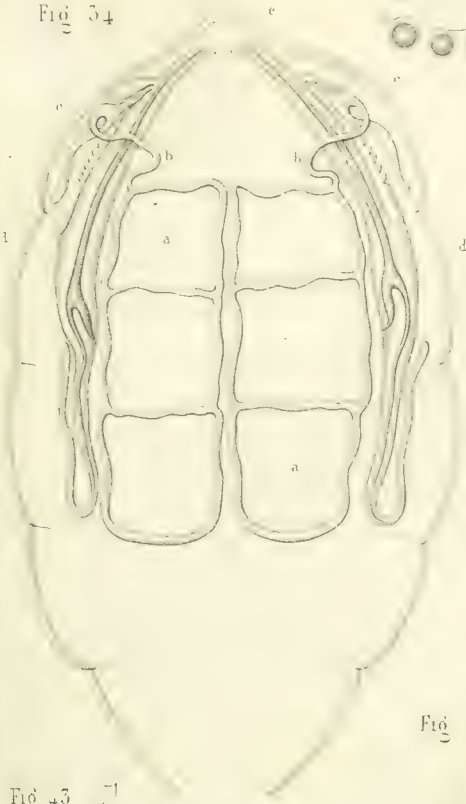


Fig. 38

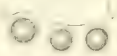


Fig. 35

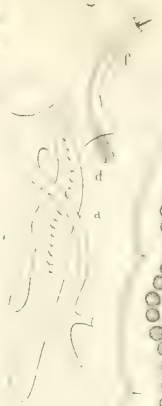


Fig. 37

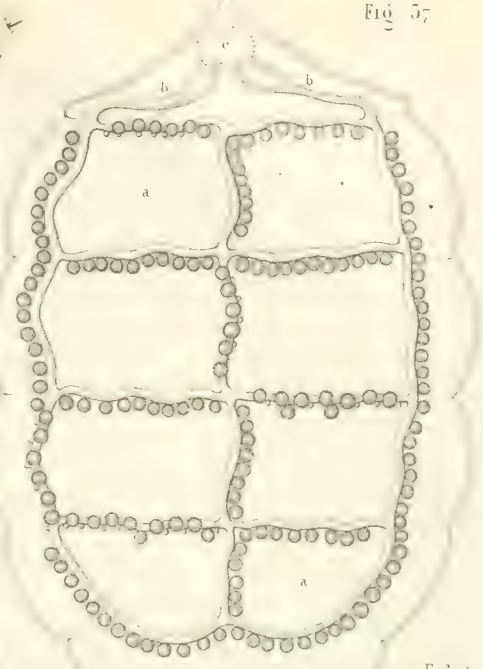


Fig. 36

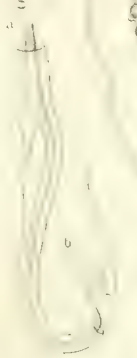


Fig. 49

Fig. 48

Fig. 39

Fig. 43

Fig. 50

Fig. 45

Fig. 46

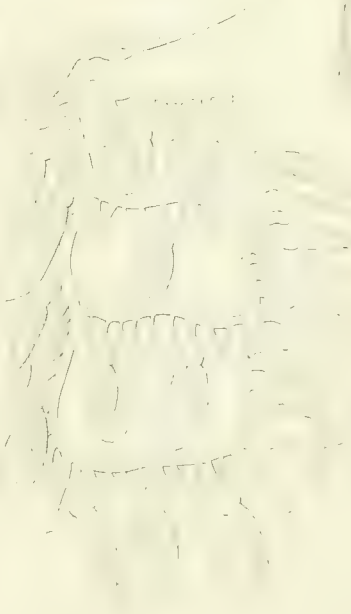


Fig. 41.

Fig. 44

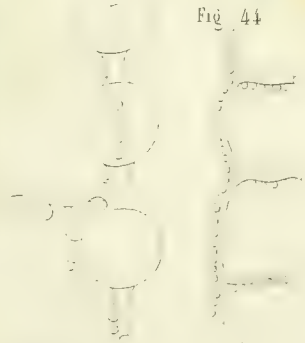


Fig. 47

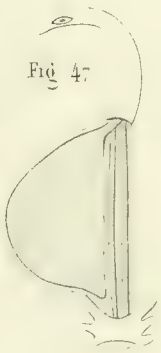


Fig. 42

Fig. 40

Léon Dufour del.

Borromée sc.

ANATOMIE DES SCORPIONS. (Par Mr. Léon Dufour.)

Fig. de 34 à 50.